

K-DECIDIBILIDADE E INSTABILIDADE DE PONTOS DE EQUILÍBRIO

Sônia Regina Leite Garcia
 Departamento de Matemática Aplicada
 IME - USP
 endereço eletrônico: sonia@ime.usp.br

1. Introdução.

Consideraremos aqui sistemas mecânicos determinados por uma energia cinética da forma $T(q, \dot{q}) = \langle B(q)\dot{q}|\dot{q} \rangle$, onde $B(q)$ é matriz $n \times n$ simétrica, definida positiva, de classe C^2 na variável q , uma energia potencial

$$\pi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

de classe C^2 , responsável por um sistema de forças conservativo $-\frac{\partial \pi}{\partial q}$, e um sistema de forças posicionais (possivelmente não conservativo)

$$Q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

de classe C^1 .

Suporemos sem perda de generalidade que $\pi(O) = 0$.

Suporemos ainda que $\frac{\partial \pi}{\partial q}(O) = O$ e $Q(O) = O$. Assim, o ponto $q = \dot{q} = O$ será um ponto de equilíbrio do sistema Lagrangeano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \pi}{\partial q} + Q. \quad (1)$$

Nosso objetivo é estudar a estabilidade segundo Liapunov desse ponto de equilíbrio.

Observação: Como é usual em mecânica quando estamos trabalhando em $\mathbf{R}^m$, o gradiente de f como função de x será denotado por $\frac{\partial f}{\partial x}$.

2. Funções k-decidíveis.

Seja $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ uma vizinhança aberta da origem.

Definição 1: Seja $k \in \mathbf{N}$. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tem jato puntual de ordem k em O se existe um polinômio $P : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de grau menor ou igual a k tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p(x)}{\|x\|^k} = 0.$$

Quando existe, tal polinômio é único, e será denotado por $j^k f$ e chamado jato k de f em O , ou simplesmente jato k de f .

Uma função $g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ tem jato puntual de ordem k em O se cada componente de g tiver jato puntual de ordem k em O . Neste caso, se $g = (g_1, \dots, g_m)$ denotaremos por $j^k g$ à função de componentes polinomiais $(j^k g_1, \dots, j^k g_m)$.

Definição 2: Seja $k \in \mathbf{N}^*$. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ é dita k -decidível se

- (i) f tem jato puntual de ordem k em O ,
- (ii) Para toda $g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $j^k g = j^k f$, tem-se que f e g têm mesmo comportamento local quanto a extremo em $x = O$.

Pode-se mostrar que se f for k -decidível então ou f tem máximo local estrito em O , ou f tem mínimo local estrito em O , ou f não tem nem máximo nem mínimo local em O .

Nota: O conceito de k -decidibilidade foi introduzido por A. Barone-Netto em 1980, em sua tese de livre-docência (ver [1]). Algumas propriedades envolvendo k -decidibilidade encontram-se em [2].

3. Nossos resultados.

Trabalhando com o conceito de k -decidibilidade, conseguimos obter alguns resultados sobre estabilidade do equilíbrio $q = \dot{q} = O$ do sistema (1), que passaremos a enunciar.

Proposição 1: Se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\langle \frac{\partial \pi}{\partial q} - Q | q \rangle < 0, \quad \text{para cada } q \in B_\epsilon - \{O\},$$

então a origem $q = \dot{q} = O$ de (1) é instável.

Proposição 2: Suponha que para algum $k \geq 2$, $\frac{\partial \pi}{\partial q}$ tem jato puntual de ordem $k-1$ e que $\langle \frac{\partial \pi}{\partial q} | q \rangle$ é k -decidível e tem máximo local estrito em $q = O$. Suponha ainda que Q tem jato puntual de ordem $k-1$ nulo.

Então a origem $q = \dot{q} = O$ de (1) é instável.

Proposição 3: Suponha que para algum $k \geq 2$, $\frac{\partial \pi}{\partial q}$ tem jato puntual de ordem $k-1$, que π é k -decidível e que ao representarmos $j^k \pi$ na forma

$$j^k \pi = \pi_2 + \pi_3 + \cdots + \pi_k$$

com π_i homogêneo de grau i tenhamos $\pi_i(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$. Suponha ainda que Q tem jato puntual de ordem $k-1$ nulo.

Então a origem $q = \dot{q} = O$ de (1) é instável.

4. Bibliografia.

- [1] Barone-Netto, A., Jet-Detectable Extrema, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 92, 1984.
- [2] García, M.V.P., Estabilidade de Liapunoff e k -Decidibilidade *Relatório Técnico do Depto de Matemática Aplicada*, IME-USP, nº 9202, 1992.
- [3] Habets, P., Laloy, M., & Rouche, N. *Stability Theory by Liapunov's Direct Method*, Advanced Mathematical Sciences 22, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.