

COMPOSIÇÃO DE VARIÂNCIAS EM DEPÓSITOS MINERAIS

Jorge Kazuo Yamamoto *

INTRODUÇÃO

Como se sabe as reservas são avaliadas em blocos tecnológicos ou de cubagem, cujos resultados são então acumulados para se obter a reserva total do depósito. A acumulação de teores e reservas dos blocos para todo o depósito é direta, contudo o mesmo não acontece para a variância dos blocos parciais para o depósito ou parte dele. Tanto o teor médio ou as reservas total ou parcial são de fácil obtenção, mas não se tem idéia da variância de estimação desses valores no depósito ou parte do mesmo, embora se conheça tais valores nos blocos tecnológicos ou de cubagem individuais. Este trabalho apresenta uma proposta para obtenção da variância associada à estimação do teor médio de parte ou de todo o depósito. Para isso apresenta-se uma revisão da metodologia corrente sob o ponto de vista crítico, antes de expor a metodologia proposta.

REVISÃO DA METODOLOGIA CORRENTE

Segundo Journel & Huijbregts (1978, pág. 320), sob a hipótese de estacionaridade de parte do depósito ou de todo, o teorema da combinação das estimativas de krigagem mostra que a krigagem direta da média global dá o mesmo resultado da combinação das estimativas locais de krigagem. Ainda conforme os mesmos autores, em mineração, a média global seria muito raramente estimada diretamente pelas seguintes razões:

- a) não é possível assumir a estacionaridade ou deriva simples de forma conhecida sobre todo o depósito;
- b) mesmo se a estacionaridade pudesse ser verificada no depósito, a resolução das equações de krigagem seria impossível pelas dimensões dos mesmos devido a existência de muitos dados. Além disso, a construção do sistema de krigagem implicaria no conhecimento da função estrutural $C(h)$ ou $\gamma(h)$ sobre todo o depósito, quando a confiabilidade do variograma é de até a metade das dimensões do depósito.

Assim, segundo Journel & Huijbregts (1978, pág. 321), para estimar o valor da média global, é geralmente aconselhável combinar as estimativas dos volumes componentes do depósito, por meio da combinação das estimativas de krigagem.

O teorema da combinação das estimativas de krigagem (Journel & Huijbregts, 1978, pág. 321) é válido somente quando o mesmo conjunto de amostras for usado na avaliação dos blocos parciais, o que implicaria no uso de todas as amostras disponíveis no depósito D, que inviabilizaria novamente a resolução dos sistema de equações de krigagem.

* Geólogo, formado em 1976 pelo Instituto de Geociências-USP; Mestre em Geologia Geral e de Aplicação em 1986 pelo IG-USP e Doutor em Recursos Minerais em 1991 pelo IG-USP. Professor Assistente Doutor do Dep. Geologia Econômica-IG USP.

A média global do depósito pode ser obtida como média ponderada das estimativas locais pelos seus respectivos volumes:

$$Z^*_D = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N V_i \cdot Z^*_{vi} \quad (1)$$

onde: Z^*_D é a estimativa da média global;

D é o volume total do depósito e igual a soma dos N volumes V_i ;

V_i é o volume do i -ésimo bloco do depósito;

Z^*_{vi} é o teor médio do i -ésimo bloco do depósito.

Ainda de acordo com Journel & Huijbregts (1978) as variâncias de krigagem não podem ser combinadas como podem as estimativas de krigagem. A variância de estimativa, conforme estes autores, pode ser escrita como:

$$\sigma^2_{ED} = E\left\{\left[Z_D - Z^*_D\right]^2\right\} = E\left\{\left[\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N V_i \cdot (Z_{vi} - Z^*_{vi})\right]^2\right\} \quad (2)$$

o que dá:

$$\sigma^2_{ED} = \frac{1}{D^2} \left[\sum_{i=1}^N V_i^2 \cdot \sigma^2_{Kvi} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_i \cdot V_j E\left\{(Z_{vi} - Z^*_{vi})(Z_{vj} - Z^*_{vj})\right\} \right] \quad (3)$$

O problema está no cálculo das covariâncias dos erros $E\{(Z_{vi} - Z^*_{vi})(Z_{vj} - Z^*_{vj})\}$ que, teoricamente, segundo Journel & Huijbregts (1978, pág. 324), é possível somente se a função semi-variograma $\gamma(h)$ for conhecida para todas as distâncias h dentro do depósito, além do cálculo das covariâncias dos erros ser muito complicado. Segundo Kim & Baafi (1984) a covariância do erro entre dois erros de estimação, deve ser considerada porque os mesmos pontos de dados são muitas vezes usados para estimar cada unidade do bloco e, por isso, os erros de estimação são estatisticamente dependentes. Kim & Baafi (1984) também reafirmaram a impossibilidade do cálculo da covariância do erro, por ser proibitivo em termos de tempo de computação, quando o número de dados é grande.

Dada a impossibilidade de resolução direta da equação (3), os autores de trabalhos consultados optaram pela resolução aproximada da mesma.

Assim, Journel & Huijbregts (1978, pág. 413) optaram pela solução prática expressando o erro de estimação global $[Z_D - Z^*_D]$ como a soma dos n ($n \leq N$) erros elementares independentes:

$$Z_D - Z^*_D = \sum_{k=1}^n \lambda_k (Z_k - Z^*_k) \quad (4)$$

a variância de estimação global torna-se:

$$\sigma^2_{ED} = E\{[Z_D - Z^*_D]^2\} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 E\{[Z_k - Z^*_k]^2\} \quad (5)$$

O problema agora consiste na distinção dos n sucessivos estágios de estimação, os erros dos quais são aproximadamente independentes.

Uma outra aproximação, proposta por Kim & Baafi (1984),

baseia-se no agrupamento de blocos próximos dentro de um polígono para definição de um único conjunto de pontos de dados que seria utilizado na estimação dos blocos individuais. Se o mesmo conjunto de pontos de dados é utilizado na estimação dos blocos próximos, então o teorema da combinação das estimativas de krigagem é válido e a estimativa da média global e da variância associada é direta. Entretanto, a estimativa obtida refere-se a uma pequena parte do depósito que poderia ser estimada a partir de um conjunto de pontos de dados comum a todos os blocos que o compõem. Portanto, a aproximação de Kim & Baafi (1984) não se aplica a estimação da variância global do depósito.

Outra proposta foi apresentada por Valente & Miola (1988) que, ao promoverem a simplificação da equação de variância de estimativa global, chegaram a variância do depósito como média dos multiplicadores de Lagrange encontrados nos blocos. Veja que sobre os multiplicadores de Lagrange não se tem nenhum controle, podendo ora ser negativo ora positivo, dependendo do conjunto de pontos de dados utilizado e de sua configuração espacial.

Pela revisão apresentada, observa-se que o problema de cálculo da covariância dos erros não foi resolvido, mesmo à custa de simplificações e aproximações. A dificuldade está justamente na impossibilidade de obtenção da função semi-variância ou covariância sobre todo o depósito e, por isso, se o cálculo da variância global depender deste fator só será possível desprezando-se a covariância dos erros, o que daria um resultado aproximado, visto que este termo não é desprezível, como foi observado por Kim & Baafi (1984).

METODOLOGIA PROPOSTA

A variância global do depósito não pode ser obtida diretamente pela resolução da equação (3), pelos motivos expostos no item anterior, dentre os quais o principal é a falta de informação da função covariância para distâncias superiores à metade da extensão do depósito. Assim, qualquer proposta de solução para cálculo da variância global não pode depender da função covariância e, nesse sentido, a solução apresentada baseia-se no cálculo da variância de interpolação que, segundo Yamamoto (1991), pode ser aplicada para cálculo da variância de interpolação associada a krigagem de bloco. Em outras palavras, a variância de interpolação do bloco pode ser composta diretamente a partir das variâncias parciais dos sub-blocos ou então aplicando-se os ponderadores médios do bloco, pelo teorema da combinação das estimativas de krigagem, na equação da variância de interpolação. A variância de interpolação de um bloco tecnológico estimado por n amostras de furos vizinhos e nd sub-blocos, pode ser obtida pela composição das nd variâncias parciais dentro dos sub-blocos com a variância entre os sub-blocos, que é a variância correspondente aos teores dos sub-blocos em relação ao teor do bloco; esta parcela é menor que a variância das amostras, pois os sub-blocos são de volumes maiores que as amostras. Esta relação é conhecida na literatura como relação de aditividade de variâncias (Rendu, 1978, pág. 45; Journel & Huijbregts, 1978, pág. 67; Isaacks & Srivastava, 1989, pág. 479).

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{nd} \epsilon_{bi}^2}{nd} + \frac{\sum_{i=1}^{nd} (T_{bi} - T_B)^2}{nd} \quad (6)$$

onde: nd é o número de sub-blocos utilizado para estimar o bloco;
 ϵ_{bi}^2 é a variância de interpolação associada ao teor do i -ésimo sub-bloco;
 T_{bi} é o teor do i -ésimo sub-bloco;
 T_B é o teor do bloco.

ou aplicando-se os ponderadores médios do bloco (teorema da combinação das estimativas de krigagem):

$$\epsilon_B^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot (T_i - T_B)^2 \quad (7)$$

onde: T_i é o teor da i -ésima amostra de furo vizinho.

As equações (6) e (7) são equivalentes, ou seja, resultam no mesmo valor da variância de interpolação do bloco como foi demonstrado por Yamamoto (1991).

Tendo em vista que não é possível a utilização de um único conjunto de amostras de furos vizinhos para avaliação de todos os blocos, fica descartada a aplicação da equação (7) para cálculo da variância global do depósito. Assim, a metodologia proposta está baseada no uso da equação (6) para, a partir da composição das variâncias parciais dos blocos, determinação da variância global do depósito. Para isso a equação (6) é reescrita em novos termos e de acordo com a relação de aditividade de variâncias citada:

$$\epsilon_D^2 = \sum_{i=1}^{nb} \epsilon_{Bi}^2 / nb + \sum_{i=1}^{nb} (T_{Bi} - T_D)^2 \quad (8)$$

onde: nb é o número de blocos do depósito;
 ϵ_{Bi}^2 é a variância do i -ésimo bloco obtido pelas equações (6) ou (7);
 T_{Bi} é o teor médio do i -ésimo bloco;
 T_D é o teor médio do depósito,

que pode ser obtido como:

$$T_D = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{nb} V_i \cdot T_{Bi} \quad (9)$$

onde: V_i é o volume do i -ésimo bloco,

o volume do depósito, portanto, é igual a:

$$D = \sum_{i=1}^{nb} V_i \quad (10)$$

O primeiro termo da equação (8) é a variância dentro dos blocos, ou seja, a variância devida aos blocos propriamente dito, e o segundo termo é a variância entre os sub-blocos, devida à diferença de teores entre os blocos e o teor médio do depósito, que corresponde à parcela da variância pelo aumento de suporte, mantendo-se a relação volume-variância constante.

Para demonstrar a validade da equação (8) no cálculo da variância global do depósito, utiliza-se de um depósito hipotético, formado por quatro blocos, cada um dos quais estimado por quatro sub-blocos, nos quais foram realizadas medidas de uma variável aleatória X . Este depósito e as medidas feitas nos sub-blocos está esquematicamente representado no desenho da Figura 1.

Calculando-se a média e a variância para cada sub-bloco, obtém-se os valores representados na Figura 2.

I			II			III			IV		
92	34	64	59	89	21	28	56	83	92	21	48
94	23	00	49	75	02	07	33	60	74	01	26
31	60	00	44	80	08	53	77	02	00	25	51
53	82	09	38	66	94	28	51	76	10	43	72
96	31	58	66	93	17	26	67	93	69	16	67
85	14	40	42	69	93	54	92	26	92	97	30
64	46	76	91	35	88	53	82	55	75	07	37
28	86	36	19	56	88	87	16	44	64	31	60

Figura 1: Desenho mostrando um depósito hipotético com quatro blocos, estimados a partir de quatro sub-blocos, nos quais foram medidos seis valores de uma variável aleatória X .

I		II		III		IV	
51,167	49,167	44,500	43,667	44,500	43,667	51,167	49,167
1228,806	894,806	610,917	986,889	610,917	986,889	1228,806	894,806
39,167	55,000	47,833	33,500	47,833	33,500	39,167	55,000
828,472	814,333	695,806	604,250	695,806	604,250	828,472	814,333
54,000	63,333	59,667	61,833	59,667	61,833	54,000	63,333
844,333	733,556	751,556	889,806	751,556	889,806	844,333	733,556
56,000	62,833	56,167	45,667	56,167	45,667	56,000	62,833
441,333	800,472	565,139	531,222	565,139	531,222	441,333	800,472

Figura 2: Médias e variâncias calculadas nos sub-blocos.

Para esclarecimento a média foi calculada como:

$$E[X] = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (11)$$

e a variância como:

$$\text{Var}[X] = E[(X - \bar{X})^2] = E[X^2] - \bar{X}^2 \quad (12)$$

Compondo-se os valores das médias e variâncias, estas conforme a equação (6), dos sub-blocos para os respectivos blocos, obtém-se os valores representados esquematicamente na Figura 3.

Compondo-se novamente agora as médias e variâncias dos blocos (conforme dados da Figura 3) para o depósito, usando respectivamente as equações (9) e (8), obtém-se os seguintes resultados:

I	II
48.625 941.604+34.212 = 975.816	42.375 724.466+28.685 = 753.151
IV	III
59.042 704.924+16.865 = 721.789	55.834 684.431+38.540 = 722.971

Figura 3: Média e variância dos blocos obtidos a partir da composição desses valores nos respectivos sub-blocos. A variância do bloco é representada como soma das variâncias dentro dos sub-blocos e entre os sub-blocos.

$$T_D = (48,625 + 42,375 + 59,042 + 55,834) / 4 = 51,469$$

$$\begin{aligned} \epsilon_D^2 = & \left\{ (975,816 + 753,151 + 721,789 + 722,791) / 4 + \right. \\ & \left[(48,625 - 51,469)^2 + (42,375 - 51,469)^2 + \right. \\ & \left. (59,042 - 51,469)^2 + (38,540 - 51,469)^2 \right] / 4 \left. \right\} = \end{aligned}$$

$$\epsilon_D^2 = 793,432 + 41,798 = 835,230$$

A prova definitiva da validade da proposta de composição de médias e variâncias parciais para o depósito está no cálculo dessas estatísticas, usando respectivamente as equações (11) e (12), para todas as 96 amostras da variável aleatória X , que resultaram nos seguintes valores:

$$\bar{X} = 51,469$$

$$\text{Var}[X] = 835,228$$

A menos das diferenças por arredondamento, os valores obtidos foram exatamente iguais, o que prova a validade da equação (8) para composição de variâncias. Como foi visto a variância do depósito, determinada como a variância de dispersão total, foi exatamente igual considerando-se amostras, sub-blocos ou blocos. É preciso esclarecer que a variância total do depósito foi calculada como soma de duas variâncias: a variância dentro dos blocos e a variância entre blocos. Esta última parcela da variância corresponde a variância devido ao aumento de suporte (volume do bloco), portanto ela deveria ser menor, mantendo-se a relação volume-variância constante. Para mostrar que esta relação foi mantida, considere os dados da Figura 1, ou seja, as amostras ou valores da variável aleatória X ; os dados de teores dos sub-blocos da Figura 2, representando teores de sub-blocos obtidos pelo agrupamento de seis amostras (volumes maiores que as amostras) e os dados de teor dos blocos da Figura 3, representando teores dos blocos obtidos pelo agrupamento de quatro sub-blocos (volumes maiores que os sub-blocos). Calculando-se a média e variância para cada um desses conjuntos de dados obtém-se os resultados mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Média e variância de dispersão determinadas para amostras, sub-blocos (pelo agrupamento de amostras) e blocos (pelo agrupamento de sub-blocos).

CONJUNTO	Nº DADOS	MÉDIA	VARIÂNCIA
AMOSTRAS	96	51,469	835,230
SUB-BLOCOS	16	51,469	71,370
BLOCOS	4	51,469	41,798

Nesta tabela pode-se observar que a relação volume-variância foi mantida, pois com o aumento do suporte houve diminuição da variância. O efeito prático do aumento do volume de amostras em sub-blocos e blocos está na diminuição da variância, mantendo-se a média constante, conforme enuncia o Teorema do Limite Central.

A equação (8) é válida somente se os blocos forem de mesmo suporte, caso contrário ela deve levar em consideração estas diferenças, como se apresenta na equação (13)

$$\epsilon_D^2 = \sum_{i=1}^{nb} \epsilon_{Bi}^2 \cdot V_i / D + \sum_{i=1}^{nb} (T_{Bi} - T_D)^2 \cdot V_i / D \quad (13)$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi apresentado o método para cálculo da variância global do depósito, a partir das variâncias parciais dos blocos que o compõe. Esta metodologia é válida para composição de variâncias de interpolação, não sendo válida para composição de variâncias de estimação ou de krigagem, devido a impossibilidade de cálculo da covariância dos erros. A variância de interpolação faz uso direto dos ponderadores da krigagem ordinária que, são determinados levando em consideração a informação estrutural da função semi-variância ou covariância. Finalmente, foi mostrada que a variância global do depósito é sempre resultante da soma de duas parcelas de variâncias: a primeira chamada dentro dos blocos e a segunda entre os blocos. Esta segunda parcela corresponde a dispersão de teores em relação ao teor médio do depósito, se forem considerados os blocos como unidade de cálculo.

AGRADECIMENTOS

O Autor expressa seus agradecimentos ao Eng^o Antônio Claret Antunes Campos pela revisão e sugestões apresentadas, as quais melhoraram o conteúdo deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ISAACKS, E.H. & SRIVASTAVA, R.M. An introduction to applied geostatistics. New York, Oxford University Press, 1989, 561p.
- JOURNAL, A.G. & HUIJBREGTS, C.J. Mining geostatistics. London, Academic Press, 1978, 600p.
- KIM, Y.C. & BAAFI, E.Y. Combining local kriging variances for short-term mine planning. In: VERLY, G; DAVID, M.; JOURNAL, A.G. (eds) Geostatistics for natural resources characterization 1984, part 1, p.185-199.
- RENDU, J.M. An introduction to geostatistical methods of mineral evaluation. Johannesburg, South African Inst. Min. Metall., 1978, 84p.
- VALENTE, J. & MIOLA, W. Composição de variâncias de krigagem. In: SEM. NAC.: " O COMPUTADOR E SUA APLICAÇÃO NO SETOR MINERAL: PESQUISA, LAVRA E BENEFICIAMENTO MINERAIS", São Lourenço, 1988, p.232-241.
- YAMAMOTO, J.K. Comparação de métodos computacionais para avaliação de reservas: um estudo de caso na Jazida de Cobre de Chapada, GO. São Paulo, 175p. (Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências-USP).