UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

DIAGONALIZAÇÃO E SUA GEOMETRIA

ANTONIO CONDE

Nº 86

NOTAS DIDÁTICAS

ICMC USP SÃO CARLOS

São Carlos – SP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN 0103-2585

DIAGONALIZAÇÃO E SUA GEOMETRIA

ANTONIO CONDE

Nº 86

NOTAS DIDÁTICAS

São Carlos – SP
Ago./2015

Diagonalização e sua geometria

Antonio Conde

Diagonalização e sua geometria

Demonstraremos por M_n o espaço vetorial real das matrizes n por n com entradas reais, que tem dimensão n^2.

M_n^s o espaço vetorial real das matrizes n por n simétricas com entradas reais, que tem dimensão $\frac{1}{2}(n(n+1))$.

M_n^a o espaço vetorial real das matrizes n por n anti simétricas com entradas reais, que tem dimensão $\frac{1}{2}(n(n-1))$.

$\mathcal{D}_n$ o espaço vetorial real das matrizes n por n diagonais com entradas reais, que tem dimensão n.

Observemos que

(1) $\frac{1}{2}(n(n-1)) + n = \frac{1}{2}(n(n+1))$
(2) $\frac{1}{2}(n(n-1)) + \frac{1}{2}(n(n+1)) = n^2$
(3) $M_n = M_n^s \oplus M_n^a$

Para (iii) veja que vale a igualdade, (para $A \in M_n$)

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

o primeiro fator de M_n^s e o segundo de M_n^a

Dotemos M_n do produto interno:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$$

Das propriedades

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \text{ e}$$

$$\mathrm{tr}(X^t) = \mathrm{tr}(X)$$

e linearidade de tr decorre que $\langle A, B\rangle$ é de fato um produto interno.

Se fixarmos uma ordem linear para as entradas das matrizes de M_n (por exemplo, a ordem do dicionario nos índices (i, j) de a_{ij}, estamos fixando seu isomorfismo linear)

$$\varphi : M_n \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

Tal isomorfismo é uma isometria quando tomamos em $\mathbb{R}^{n^2}$ o produto interno euclidiano, pois se A tem a linha i $(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n})$ sua transposta A^t terá para coluna i o mesmo vetor e portanto na posição i da diagonal de AA^t aparecera o número que é $a_{i_1}^2 + a_{i_2}^2 + \cdots + a_{i_n}^2$ e o traço de AA^t será finalmente a soma de todos os quadrados $a_{i_j}^2$ das entradas de A_1 ou seja φ preserva a norma.

$$\langle\varphi(A), \varphi(A)\rangle = \langle A, A\rangle$$

e portanto é uma isometria linear.

Vale que

$$\langle XA, B\rangle = \langle A, X^tB\rangle$$
$$\langle AX, B\rangle = \langle A, BX^t\rangle$$

$\langle XA, B\rangle = \operatorname{tr}\langle XAB^t\rangle = \operatorname{tr}(AB^tX) = \operatorname{tr}(A(X^tB)^t) = \langle A, X^tB\rangle$ e $\langle AX, B\rangle = \operatorname{tr}(AXB^t) = \operatorname{tr}(A(BX^t)^t) = \langle A, BX^t\rangle$

Dai vem que se X é do grupo ortogonal $X \in O(n)$, isto é $XX^t = \mathbb{1}$ identidade temos

$$\left\langle XAX^t, XBX^t\right\rangle = \langle A, B\rangle \text{ isto é}$$

a conjugação em M_n por matrizes do grupo ortogonal é isometria linear, já que

$$A \mapsto XAX^t \text{ é linear em } A$$

Tais conjugações preservam a decomposição

$$M_n = M_n^s \oplus M_n^a$$

já que A simétrica (antissimétrica) nos dá, para $X \in O(n)$, que

$$XAX^t \text{ é simétrica (antissimétrica)}$$

A conjugação por qualquer X inversível preserva o traço pois

$$\operatorname{tr}(XAX^{-1} = \operatorname{tr}(AX^{-1}X) = \operatorname{tr}(A)$$

Assim sendo a conjugação preserva os hiper planos de traço constante a

$$H_c = \operatorname{tr}^{-\Delta}(c)$$

Seja $\delta : M_n \to \mathcal{D}_n$ a aplicação que usa cada matriz $A \in M_n$ na matriz $\delta(A)$ que é a diagonal de A.

Vejamos que δ é uma projeção ortogonal de M_n sobre $\mathcal{D}_n$. É claro que $\delta\delta(A) = \delta(A)$.

Vamos agora mostrar que $\langle D, (A - \delta A)\rangle$ e nulo, ou seja mostrar que

$$\operatorname{tr}(D(A - \delta A)^t) = 0$$

mas observe que DA^t e $D\delta A$ tem a mesma diagonal, logo $\operatorname{tr}(DA^t - D\delta A) = 0$ como queremos.

Os hiperplanos H_c de traço constante c são ortogonais ao subespaço um dimensional das matrizes escalares, gerado pela identidade $\mathbb{1}$ vejamos $H_c \cap \langle \mathbb{1}\rangle = \left\{\frac{c}{n}\mathbb{1}\right\}$ a matriz escalar de diagonal constante igual a $\frac{c}{n}$.

Agora se $Y \in H_a$, $Y - \frac{c}{n}\mathbb{1}$ é paralelo a H_c. Como $\operatorname{tr}(Y) = c$ temos que $\operatorname{tr}(Y - \frac{c}{n}\mathbb{1}) = 0$ logo

$$\left\langle \mathbb{1}, Y \to \frac{c}{n}\mathbb{1}\right\rangle = 0 \text{ como queriamos.}$$

Portanto cada hiperespaço afim H_c tem a reta $\langle \mathbb{1}\rangle$ como complemento ortogonal.

As matrizes anti simétrica tem diagonais nulas, logo

$$M_n^a \subset H_0$$

Vamos nos restringir ao espaço M_n^s das matrizes simétricas

$$\dim M_n^s = n(n+1)/2$$

Pomos $H_c^s = H_c \cap M_n^s$ que são as simétricas de traço constante c.
H_c e H_c^s são subespaços afim, para $c = 0$ são subespaços vetoriais

$$\dim H_o^s = n(n+1)/2 - 1$$

H_o^s é um hiperplano de M_n^s.
O subespaço das diagonais $\mathcal{D}_n$ está em M_n^s.
Consideremos $O(n) \subset GL(n) \subset M_n = M_n^s \oplus M_n^a$.
$O(n)$ é subvariedade de M_n e a fibra tangente a $O(n)$ na identidade $\mathbb{1}$ é

$$T_{\mathbb{1}}O(n) = M_n^a$$

Observemos que M_n^s é ortogonal a M_n^a, pois $\langle A, B\rangle = \langle A^t, B^t\rangle = \langle A, -B\rangle = -\langle A, B\rangle$ que implica em $\langle A, B\rangle = 0$ para $A \in M_n^s$ e $B \in M_n^a$.

Como sabemos, as matrizes simétricas são diagonalizáveis pelo grupo ortogonal, ou seja a ação de $O(n)$ em M_n^s por conjugação

$$\begin{aligned} O(n) \times M_n^s &\longrightarrow M_n^s \\ (X, A) &\longmapsto XAX^t \end{aligned}$$

tem cada orbita $F(A) = \{XAX^t \mid X \in O(n)\}$ encontrando o subespaço das diagonais

$$F(A) \cap \mathcal{D}_n \neq 0$$

Para termos uma descrição das orbitas vamos examinar o grupo de isotropia de um ponto da mesma. Podemos tomar aquele ponto que é matriz diagonal $D \in \mathcal{D}_n$. Digamos

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Vamos incluir a multiplicidades λ_i com multiplicidade n_i

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \underline{\qquad} & n_1 \\ \lambda_2 & \underline{\qquad} & n_2 \\ \cdots & \underline{\qquad} & \cdots \\ \lambda_s & \underline{\qquad} & n_s \end{array}$$

com $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$. Temos assim que D determina uma partição de n.

Designando por $[n_i]$ a matriz identidade n_i por n_i, temos que, agrupando as multiplicidades.

$$D = \lambda_1[n_1] \oplus \lambda_2[n_2] \oplus \cdots \oplus \lambda_s[n_s]$$

Se uma matriz A tem para linhas os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ podemos denotá-la por

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{se a mesma tem colunas } u_1, u_2, \ldots, u_n$$

pomos a notação $A = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Um elemento X de $O(n)$ esta no grupo de isotropia de D, $O_D = \{X \in O(n) \mid XDX^{-1} = D\}$ se

$$XDX^{-1} = D \text{ ou } XD = DX \text{ isto é}$$

$X \in O_D$ se e só se X comuta com D examinemos cada membro da igualdade

$$XD = DX$$

Se $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $X = (X_{ij})$.

$XD = (\lambda_j X_{ij})$ isto é XD tem sua coluna u_i multiplicada por λ_i.

$DX = (\lambda_i X_{ij})$ isto é, DX é obtida de X multiplicando a linha v_i por λ_i. A igualdade então nos diz que

$$\lambda_i x_{ij} = \lambda_j x_{ij}$$

o que nos da duas possibilidades, ou $\lambda_i - \lambda_j$ ou $x_{ij} = 0$ caso contrario. Levando em conta as multiplicidades n_i de λ_{ij} concluímos que: se x comuta com D então x é formado por blocos na diagonal dos subgrupos ortogonais $O(n_1), O(n_2), \ldots, O(n_s)$, ou seja x é do grupo de isotropia de D se e só se x está no subgrupo

$$O(n_1) \times O(n_2) \times \cdots \times O(n_s) \subset O(n)$$

Assim sendo identificamos a orbita de D como sendo homeomorfa ($O(n)$ é compacto) a

$$F(D) = \frac{O(n)}{O(n_1) \times O(n_2) \times \cdots \times O(n_s)} = F(n_1, n_2, \ldots, n_s)$$

mas esta é exatamente a variedade bandeira real determinada pela partição de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$.

Como a ação de $O(n)$ em M_n^s é diferenciável, nós temos ai um mergulho da variedade bandeira $F(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ no espaço vetorial euclidiano M_n^s.

Fixado o natural $n \geqslant 2$, para cada partição (n_i) deste n, temos o mergulho da respectiva variedade bandeira em M_n^s. M_n^s esta assim folheado (com singularidade) pelas variedades bandeiras que vem das partições de n. Nos vamos chamar esta folheação de M_n^s de n-pacote de flags e chamaremos a variedade bandeira de flag.

Cada flag então corta $\mathcal{D}_n$ em algum ponto D. Na verdade, se aplicarmos à diagonal de D uma permutação σ obteremos outra matriz diagonal D_σ, que é de fato uma conjugada de D. A matriz de $O(n)$ que faz este serviço é a matriz P obtida a partir da identidade $\mathbb{1}$ aplicando-se a mesma permutação σ nas suas colunas. Quando multiplicamos PD a matriz resultante é a obtida de D onde permutamos suas colunas segundo σ.

Vejamos no caso $n = 3$ e pomos σ como uma involução $(1,2,3) \to (3,2,1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ao completarmos $PDP^{-1} = PDP$ já que $P = P^{-1}$ permutamos as linhas de PD perfazendo involução nas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \to (\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Assim sendo, cada permutação σ aplicada na diagonal de D, produz a nova matriz diagonal D_σ que continua a estar na orbita de D. Isto nos diz que a orbita de D encontra a de $\mathcal{D}_n$ nos pontos D_σ onde σ varia no grupo isométrico S_n. Se D tem todos seus autovalores λ_i distintos 2 a 2 então o número de pontos em $F_D \cap \mathcal{D}_n$ é $n!$. Havendo multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_s$ o número de pontos passa a ser

$$\frac{n!}{n_1!, n_2!, \ldots, n_s!}$$

Para facilitar a representação geométrica vamos nos deter no hiperplano das matrizes de traço 1.

Sendo nossa ação de $O(n)$ um M_n por isometrias temos que se $\|A\| = \|XAX^D\|$ para $X \in O(n)$ e portanto a conjugação preserva as esferas com centro na origem. Com a conjugação preserva também o traço da matriz, os hiperplanos de traço constante H_c também são preservados.

Se S_r é a esfera de M_n^s de centro 0 e $R > 0$, vamos ver quanto $t\mathbb{1}$ está nesta esfera.

Devemos ter $\|t\mathbb{1}\| = t\|\mathbb{1}\| = |t|\sqrt{n} = r$ ou seja $|t| = \frac{r}{\sqrt{n}}$. Neste caso $\|t\mathbb{1}\| = r$ e $t\mathbb{1} \in S_r$.

Agora, quando é que $t\mathbb{1}$ tem traço c.

$\mathrm{tr}(t\mathbb{1}) = t\ \mathrm{tr}(\mathbb{1}) = t\ n = c$. Portanto, para termos uma matriz escalar da reta $< \mathbb{1} >$ que pertence a H_c devemos ter $t = \frac{c}{n}$. Para que esta matriz escalar esteja também na esfera de raio r devemos ter

$$\frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{|c|}{n}$$

donde $r = \frac{|c|}{\sqrt{n}}$.

Concluímos então que dado H_c se tomarmos $r = \frac{|c|}{\sqrt{n}}$ temos que $c\mathbb{1}$ estará no hiperplano H_c e na esfera S_r e este é o único ponto em comum, pois H_c é ortogonal a $< \mathbb{1} >$.

Daí sabemos que para $r > \frac{|c|}{\sqrt{n}}$ temos numa esfera como a intersecção

$$H_c \cap S_r$$

Assim sendo se $\|A\| = r$ então a flag $F(A)$ esta nessa esfera menor.

De início tínhamos que cada flag vinda de uma partição de n mergulhara em um espaço euclidiano de dimensão $\frac{1}{2}(n(n+1))$. Com o raciocínio logo acima temos que a dimensão pode ser reduzida de dois, isto é, cada flag no caso, mergulha em uma esfera de dimensão

$$\frac{1}{2}(n(n+1)) - 2$$

Vejamos alguns exemplos em dimensão baixa para $n = 0$ e $n = 1$ não há o que fazer. Seja então $n = 2$ e partição de $n = 1 + 1$ que nos da a reta projetiva

$$\frac{O(2)}{O(1) \times O(1)} = P^1$$

P^1 é o mesmo que o circulo S^1

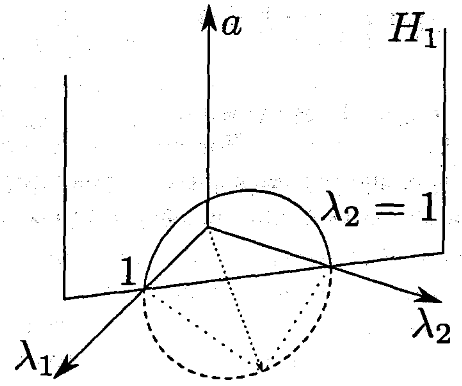
$$F(1,1) = \frac{O(2)}{O(1) \times O(1)} = P^1$$

Devemos tomar M_2^s e uma matriz de diagonal com autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ que pode ser } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tem traço 1. M_2^s tem dimensão $3 = \frac{1}{2}(2(2+1))$. As esferas deste ambiente são as bidimensionais usuais, como S^2 com centro na origem. Os hiperplanos ou são planos bidimensionais, como aquele das matrizes de traços 1. Como devemos a correspondência

$$M_2^s \ni \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ a & \lambda_2 \end{pmatrix} \longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, a) \in \mathbb{R}^3$$



O ponto $(0,1,0)$ é da nossa matriz escolhida, que esta no plano H_1 e na esfera de centro na origem e raio 1. H_1 é ortogonal ao vetor $(1,1,0)$ que representa a matriz identidade $\mathbb{1}$.

Portanto a equação deste plano no $\mathbb{R}^3$ é

$$x + y = 1$$

Quando conjugamos a matriz (o ponto $(0,1,0)$) estamos mergulhando $P^1 = S^1$ na intersecção da esfera S^2 com o plano H_1 que nos da um círculo

$$S^2 \cap H_1$$

Este círculo está em S^2 e tem centro na reta gerada pelo vetor $(1,1,0)$ que corresponde à $\mathbb{1}$.

Ao variarmos o valor do traço $c > 0$ podemos tomar o ponto $(0,c,0)$ que vem da matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$ que dará $S^1 = P^1$ mergulhado como o círculo que é a intersecção da esfera de centro zero e raio c com o plano que passa por $(0,0,c)$ e é perpendicular do vetor $(1,1,0)$ cuja operação é

$$x + y = c$$

O plano H_c é paralelo ao plano H_1 ambos perpendiculares ao vetor $(1,1,0)$. Os mergulhos de $P^1 = S^1$ em cada caso da um círculo com centro na reta gerada por $(1,1,0)$, perpendicular ao plano de eixos λ_1 e λ_2 e cujo raio em função do traço c é: $c\sqrt{2}$, pois seu diâmetro é exatamente o segmento que une os pontos $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

Agora, tomemos o caso $n = 3$ temos aqui duas partições com significado $1 + 1 + 1 = 3 = 2 + 1$.

Vejamos o caso $2 + 1 = 3$. Aqui temos a flag

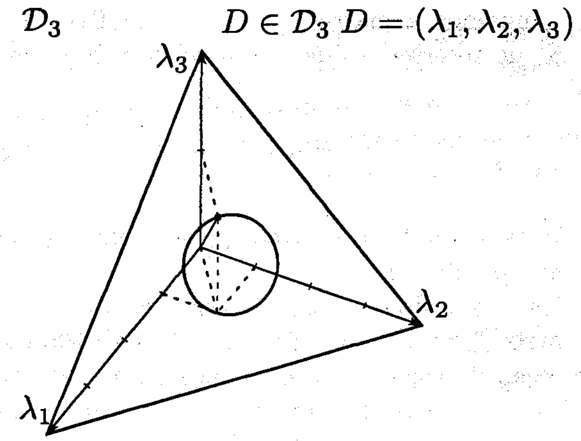
$$F(2,1) = \frac{O(3)}{O(2) \times O(1)} = P^2$$

que é o plano projetivo P^2. Este está mergulhado em M_3^s que tem dimensão 6, mas como a dimensão cai de 2, P^2 está de fato mergulhado em dimensão 4.

Tomemos a matriz de M_3^s. Devemos ter um autovalor de multiplicidade de 2 e outro de 1 já que $2 + 1 = 3$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

que é diagonal e de traço 1. Conjugando D pelo grupo $O(3)$ obtermos o mergulho de P^2 em M_3^s mas como já apresentamos antes P^2 está na intersecção do hiperplano H_1 que é perpendicular ao vetor $\mathbb{1}$ e passa por D. Não podemos representar o espaço 6-dimensional M_3^s no plano deste papel, mas podemos representar o espaço $\mathcal{D}_3$ das matrizes diagonais de M_3^s, que tem dimensão 3.



O hiperplano de traço $\mathbb{1}H_1$ de M_3^s corta $\mathcal{D}_3$ exatamente no plano que passa pelos vetores unitários dos eixos λ_1, λ_2 e λ_3. As matrizes diagonais de traço 1 e $\lambda_1's \geqslant 0$ formam o triangulo equilátero que tem para vértices os vetores $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$, como na figura acima. Sua equação é

$$x + y + z = 1$$

A matriz $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é representada pelo ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Quando conjugamos D por $O(3)$ obtemos como orbita de D o mergulho de P^2 na esfera 4-dimensional que é a intersecção de esfera S^5 centro 0 e raio $\|D\| = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ com o hiperplano 5 dimensional H_1 perpendicular a $\mathbb{1}$ e passando por D. Tal intersecção é uma esfera com centro na reta por $\mathbb{1}$. Fazendo as contas obtemos o centro sendo o ponto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ que representa a matriz diagonal $\frac{1}{3}\mathbb{1}$. Como ela deve passar por D, seu raio e a norma do vetor

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$$

que é $2\sqrt{6}$.

Esta é uma esfera de dimensão 4 que contem P^2 ali mergulhado como uma superfície de dimensão 2. Como $P^2 \subset S^4$ não é igual, podemos omitir um ponto desta S^4 e assim temos $S^4 - pt$ homeomorfa (difeomorfa) a $\mathbb{R}^4$ e temos um mergulho de P^2 em $\mathbb{R}^4$.

A título de informação apenas (a prova é sofisticada) sabemos que não é possível mergulhar P^2 em $\mathbb{R}^3$.

E o caso da partição $1 + 1 + 1 = 3$ o que se passa? Devemos tomar uma matriz diagonal de traço 1 e com autovalores distintos (multiplicidade 1)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Aqui temos a flag $F(1,1,1)$

$$F(1,1,1) = \frac{O(3)}{O(1) \times O(1) \times O(1)}$$

cuja dimensão é 3 e é realizada em M_3^s numa esfera de dimensão 4 do hiperplano H_1 como antes.

Esta flag tem então codimensão 1 e mergulhar assim em $\mathbb{R}^4$. Quando se começam a considerar variedades flag, no passado só se tratava das que vinham da partição

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1$$

ou seja $F(1,1,\ldots,1)$. Podemos assim chamá-las de flag clássica. Há quem chame a $F(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ de flags generalizadas.

Vamos intercalar nesta sequência de exemplo, informações sobre a aplicação

$$\delta : M_n^s \longrightarrow \mathcal{D}_n \subset M_n^s$$

onde $\delta(A)$ = diagonal de A.

Vejamos inicialmente que δ é uma projeção ortogonal. Para isso devemos mostrar que o vetor $\delta(A) - A$ é ortogonal aos subespaços $\mathcal{D}_n$.

Seja então $D \in \mathcal{D}_n$.

Devemos provar que $\delta\delta(A) = \delta(A)$ que é claro e

$$\langle \delta(A) - A, D \rangle = 0$$

onde A é qualquer em M_n^s e D é qualquer em $\mathcal{D}_n$. Observamos que a matriz $\delta(A) - A$ tem diagonal nula. Daí

$$\langle \delta(A) - A, D \rangle = \mathrm{tr}((\delta(A) - A)D) = 0$$

Se $D \in \mathcal{D}_n$ tem auto valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e σ é uma permutação qualquer de S_n $\lambda_{\sigma_1}, \lambda_{\sigma_2}, \ldots, \lambda_{\sigma_n} \neq D_\sigma$ é outra matriz de $\mathcal{D}_n$.

Assim, variando σ em S_n obtermos o conjunto finito de pontos dando exatamente

$$F(D) \cap \mathcal{D}_n$$

Se D com traço 1 o mesmo acontece com as D_σ e tal conjunto está assim num hiperplano de $\mathcal{D}_n$. O envólucro convexo $P(D)$ deste conjunto finito de pontos nos dá um poliedro conexo cujos vértices são os $\{D_\sigma\}$. Vejamos porque:

$Z = F(D) \cap \mathcal{D}_n$ é um conjunto finito de pontos de $\mathcal{D}_n$, com traço 1, portanto estão no hiperplano de $\mathcal{D}_n$ de traço 1. Este conjunto finito Z é invariante por permutações $\sigma \in S_n$ nas coordenadas deles. Cada permutação σ é produzida pela conjugação de uma matriz de permutação X_σ de $O(n)$, que são isometrias. Tais isometrias atuam no poliedro $P(D)$ deixando-o invariante. Se mostrarmos que um ponto de Z é vértice de $P(D)$ então todos são,pois,congruentes por tais isometrias.

O conjunto Z tem seu diâmetro realizado por dois de seus pontos A e B. Tomemos por A um hiperplano H_A e por B então H_B ambos perpendiculares ao segmento de extremidades A e B. Assim temos a fatia de $\mathcal{D}_n$ determinada por estes hiperplanos. A e B estão na fronteira de tal fatia. Não pode haver outro ponto de Z nesta fronteira e nem em ser exterior por isso aumentaria o diâmetro de Z, contra uma hipótese sobre A e B. Assim sendo A e B são vértices legítimos do poliedro $P(D)$ e daí, pelo comentário acima o conjunto de vértices o $P(D)$ é Z.

O poliedro $P(D)$ tem seu grupo simetria, digamos $T(P(D))$. Cada permutação $\sigma \in S_n$ produz uma simetria de $P(D)$ digamos, $\tilde{\sigma}$ e portanto $\tilde{\sigma} \in T(P(D))$. Temos assim um homeomorfismo.

$$h : S_n \longrightarrow T(P(D))$$

Se D tem seus autovalores distintos dois a dois, h é injetivo pois $\sigma \neq t \Rightarrow \tilde{\sigma} \neq \tilde{t}$. Caso contrario, isto é, caso haja autovalor com multiplicidade podemos ter $\sigma \neq t$ com $\tilde{\sigma} = \tilde{t}$.

Seria interessante examinar quanto é que h é sobrejetora (o que não faremos).

Vejamos exemplos no caso $n = 4$.

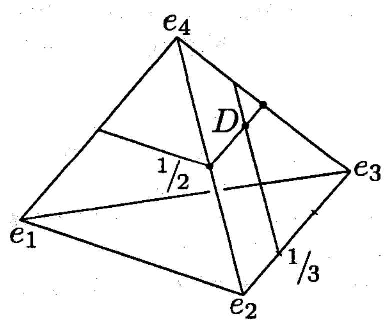
Tomemos inicialmente a partição $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ e fixemos a matriz de traço 1

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{6} & & \\ & & \frac{2}{6} & \\ & & & \frac{3}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{6} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esta está em $\mathcal{D}_4$ que tem base canônica

$$e_1(1,0,0,0), e_2(0,1,0,0), e_3(0,0,1,0), e_4(0,0,0,1)$$

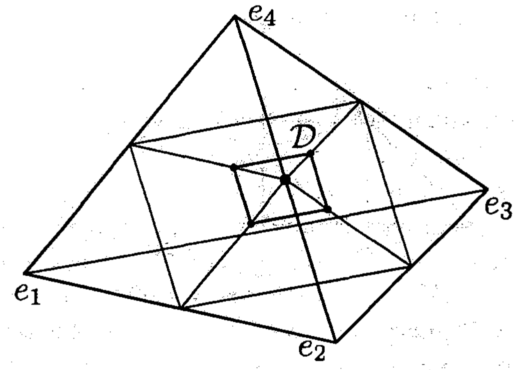
Temos assim estes quatro pontos formando um tetraedro regular em $\mathcal{D}_4$



que é parte do hiperplano (traço 1) de equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

Quando impomos, para cada i, $x_i \geqslant 0$ temos o tetraedro regular. A matriz D que escolhemos $D = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ é um ponto do tetraedro indicado como D. Fazendo todas as permutações destas coordenadas obtermos $4! = 24$ pontos que comporão os vértices do octaedro truncado



Observe que o quadrado que tem D para um dos vértices é exatamente o corte de um "bico" do ectaedro regular inscrito no tetraedro que tem para vértices os pontos médios das arestas do tetraedro.

O octaedro truncado é um dos poucos poliedros com regularidade de vértices (ou de faces) que tesselam o $\mathbb{R}^3$. Os outros dois são: o cubo (que é vértice e face regular) e o dodecaedro rômbico (que é face regular). Isso torna a flag

$$F(1,1,1,1) = \frac{O(4)}{O(1) \times O(1) \times O(1) \times O(1)}$$

muito especial. Esta variedade tem dimensão igual a de $O(4)$ que é 6 e está mergulhada em $\mathbb{R}^8$ já que

$$\frac{4(4+1)}{2} - 2 = 2.5 = 2 = 8$$

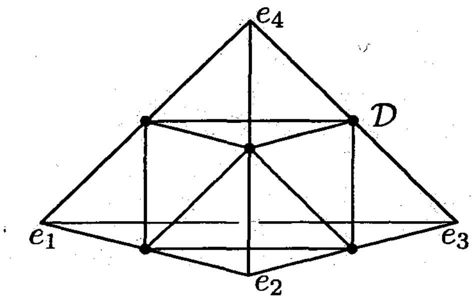
Esta é uma boa dimensão de mergulho, já que os resultados gerais de Whitney dizem que ela mergulha em $\mathbb{R}^{11}$ (por ser orientável).

Examinemos ainda para $n = 4$ o que acontece com a partição $4 = 2+2$. Para tal devemos tomar uma matriz diagonal em dois autovalores com multiplicidade 2, digamos

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ de traço 1.}$$

Este será um ponto do tetraedro de vértices

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0) \\ e_2 &= (0,1,0,0) \\ e_3 &= (0,0,1,0) \\ e_4 &= (0,0,0,1) \end{aligned}$$



Simetrizando D por permutações obtemos todos os pontos médios das arestas que compõem os vértices do ectaedro regular. Este poliedro não tessela o $\mathbb{R}^3$. Ele tem o mesmo grupo de simetria do cubo e do octaedro truncado.

A variedade flag determinada por D sua orbita pela conjugação por $O(4)$ é

$$F(D) = F(2,2) = \frac{O(4)}{O(2) \times O(2)}$$

que é a Grassmanniana de planos no $\mathbb{R}^4$, G_{22}.

Para n qualquer e $n_1+n_2+\cdots+n_s$ partição qualquer de n, formando uma matriz diagonal D com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ de multiplicidade respectivamente $n_1, n_2, \ldots, n_s$. A ação de $O(n)$ por conjugação sobre D produz uma orbita que é a variedade flag

$$F(D) = F(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \frac{O(n)}{O(n_1) \times O(n_2) \times \ldots O(n_s)}$$

que está assim mergulhada no espaço euclidiano das matrizes simétricas M_n^s que tem para subespaço o das matrizes diagonais $\mathcal{D}_n$. Temos, como vimos, a projeção ortogonal de M_n^s em $\mathcal{D}_n$

$$\delta : M_n^s \longrightarrow \mathcal{D}_n$$
$$\delta(A) = \text{diagonal de } A$$

Seja $Z = F(D) \cap \mathcal{D}_n$. Este é um conjunto finito de pontos que são D e os permutados de D.

Denotamos por $P(D)$ o envólucro convexo de Z. $P(D)$ é um poliedro convexo cujos vértices são exatamente Z, como já demonstramos.

Podemos agora fornecer informações bastante interessantes que relaciona a flag $F(D)$ com $P(D)$ que são dois teoremas elaborados por:

Shur: A imagem de $F(D)$ por δ está contida em $P(D)$ (por volta de 1920).

Horn: A imagem de $F(D)$ por δ é sobre $F(D)$ (por volta de 1953).

Portanto, podemos enunciar os dois teoremas num só e os chamarmos de

Teorema de Schur-Horn: A imagem de $F(D)$ por δ é igual a $P(D)$.

Este teorema de Schur-Horn é, de certa forma, surpreendente pois $F(D) \subset M_n^s$ é uma variedade C^∞, portanto suave, sem nenhum singularidade enquanto sua projeção ortogonal é um poliedro e assim com vértices e arestas este que é por assim dizer uma variedade linear por parte e cheia de singularidades.

Os mergulhos $F(D)$ das flags em M_n^s para cada $D \in \mathcal{D}_n$ são especiais, por exemplo, o grupo $O(n)$ atua em $F(D)$ isometricamente e transitivamente, pois como orbita de ação de grupo, dados A e $B \in F(D)$ existe sempre um $X \in O(n)$ tal que $XAX^{-1} = 13$. A ação é por isometria já que a conjugação o é. Podemos investigar se estes mergulhos tem algumas simetria (isometrias obvias). O mais natural é ver se as simetrias de poliedro $P(D)$ são simetrias de $F(D)$.

Para isso vamos tomar uma permutação σ do grupo de permutações S_n e deixar que a mesma atue em $\mathcal{D}_n$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \longmapsto (\lambda_{\sigma_1}, \lambda_{\sigma_2}, \ldots, \lambda_{\sigma_n})$$

Esta aplicação é conseguida também por conjugação em $\mathcal{D}_n$ por matrizes de permutação e é assim, isometria que preserva o conjunto de vértices Z de $P(D)$. Portanto, tais permutações preservam $P(D)$ já que a transformação é linear.

Vejamos como estas matrizes de permutação (que permutam a diagonal de cada $D \in \mathcal{D}_n$) atuam numa matriz genérica $A \in M_n^s$. Seja P a tal matriz de permutação ela produz, por conjugação, uma permutação σ dos autovalores (diagonais de $D \in \mathcal{D}_n$, isto é, $PDP^{-1} = P_\sigma$).

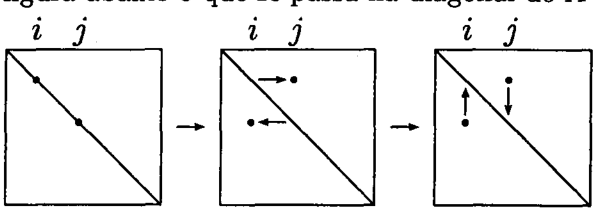
A composição AP altera A, permutando suas colunas, segundo a permutação σ, que produziu P a partir da matriz identidade $\mathbb{1}$.

Quando tomamos a composição QA com Q matriz de permutação obtida da identidade $\mathbb{1}$ permutando-se suas linhas, o que obtemos é a matriz obtida de A permutando-se as mesmas linhas.

Para termos o efeito geral da ação PAP^{-1} basta considerarmos P obtida de $\mathbb{1}$ por uma transposição de duas linhas. Isto da $P^{-1} = P$.

Se P foi obtida de $\mathbb{1}$ por uma transposição de troca as colunas i ej, temos $P = P^{-1}$ e AP e matriz obtida de A trocando-se as colunas i e j. Ao tomarmos $P(AP) = PAP = PAP^{-1}$ obtemos a matriz AP como as linhas i e j permutadas.

Veja na figura abaixo o que se passa na diagonal de A



Assim sendo, na diagonal de A as entradas, i e j serão permutadas igualmente. Haverá outras alterações de A para PAP fora da diagonal, mas queremos concentrar nossa atenção apenas na diagonal de A. Se A se projeta na sua diagonal D

$$F : M_n^s \longrightarrow \mathcal{D}_n$$
$$\delta(A) = D = \text{ diagonal de } A$$

Vemos que $\delta(PAP^{-1}) = P\delta(A)P^{-1}$.

Assim δ comuta com a ação de P, por conjugação, em M_n^s e em $\mathcal{D}_n$.

Como uma permutação genérica $\sigma \in S_n$ é composição de transposições temos o mesmo para a matriz de permutação genérica Q

$$\delta(QAQ^{-1}) = Q\delta(A)Q^{-1}$$

Assim sendo, toda isometria de poliedro $P(D)$ determinada por permutação $\sigma \in S_n$ produz uma simetria de $F(D)$. Temos aqui um homomorfismo do grupo S_n no grupo de simetria de $P(D)$ e portanto no grupo de simetrias de $F(D)$. Se $D \in \mathcal{D}_n$ tem as entradas da diagonal distintas 2 a 2 então tal homomorfismo é injetivo. Se houver multiplicidade não será. É interessante se examinar quando ele será sobre o grupo de simetria do poliedro $P(D)$.

Ou seja numa simetria de $P(D)$ produz uma permutação de seus vértices, quando tal permutação de vértices vem de uma permutação da coordenadas das mesmas?

Consideremos então $\mathbb{R}^n$ e o grupo simétrico S_n das permutações de n letras. S_n atua em $\mathbb{R}^n$ permutando as coordenadas

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_n})$$

para cada $\sigma \in S_n$. Cada ação σ destas é uma isometria de $\mathbb{R}^n$.