REVISTA DE LA UNION
MATEMATICA ARGENTINA
Volumen 24, Número 3, 1969

SÔBRE O PÔSTO DE UM MÓDULO (1)

Jorge Aragona e Artibano Micali

O objetivo desta nota é o de generalizar um resultado sôbre formas lineares que se encontra em {2} . No que segue, todo anel é suposto comutativo e com elemento unidade.

1. PRELIMINARES.

Sejam A um anel e M um A-módulo. Designaremos por M* o dual de M e, se A fôr un anel de integridade, por t(M) o sub-A-módulo de torção de M. É conhecido que t(M) é o núcleo da aplicação natural $M \longrightarrow M \otimes_A K$, onde K é o corpo de frações de A.

Seja $A \longrightarrow K$ um homomorfismo de anéis de A num corpo K que transforma elemento unidade em elemento unidade. Então K pode ser munido, de uma maneira evidente, de uma estrutura de A-módulo. Para todo A-módulo M, o K-*pôsto* de M é definido como sendo a dimensão do K-espaço vectorial $M \otimes_A K$ e notaremos $r_K(M) = [M \otimes_A K : K]$. Se A fôr um anel de integridade en K o corpo de frações de A, falaremos simplesmente do *pôsto* de M e indicaremos com $r(M) = [M \otimes_A K : K]$.

LEMA 1. *Sejam* A *um anel e* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de* A-*módulos. Temos* $r_K(M) \leq r_K(M') + r_K(M'')$ *e se* $\mathrm{Tor}_1^A(M'',K) = 0$, *então* $r_K(M) = r_K(M') + r_K(M'')$.

Com efeito, é suficiente ver que se tem a sequência exata de K-espaços vectoriais

$$\ldots\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M'',K) \longrightarrow M' \otimes_A K \longrightarrow M \otimes_A K \longrightarrow M'' \otimes_A K \longrightarrow 0$$

COROLÁRIO. *Se* A *fôr um anel de integridade e* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de* A-*módulos, então* $r(M) = r(M') + r(M'')$.

Isto resulta do fato de que K, corpo de frações de A, é um A-módulo plano.

Observemos finalmente que se A é um anel de integridade e $a \neq 0$ um ideal de A, então $r(a) = 1$. Com efeito, é claro que $r(a) \leq 1$. Supondo que $r(a) = 0$, deduziríamos que $a \otimes_A K = 0$, onde K é o corpo

(1) Trabalho realizado com auxílio de FAPESP Proc. Matemática 66/038.

de frações de A, e como $\mathfrak{a}$ está contido em $\mathfrak{a} \otimes_A K$, seguiria que $\mathfrak{a}=0$.

2. MÓDULOS DE PÔSTO n.

TEOREMA. *Sejam* A *um anel de integridade,* M *um* A*-módulo e* $n \geq 1$ *um inteiro. As seguintes condições são equivalentes:*

i) *existe uma família livre* $(x_i)_{1\leq j\leq n}$ *de elementos de* M *tal que* $\mathrm{Ann}(M/(x_1,\ldots,x_n)A) \neq 0$;

ii) *existe uma família* $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ *de formas linares sôbre* M *e uma família* $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ *de elementos de* M *tais que*

$f_1(x_1) = \ldots = f_n(x_n) \neq 0$, $f_i(x_j) = 0$ *se* $i \neq j$ *e*

$f_i(x_i)y = \sum_{j=1}^{n} f_j(y)x_j$ *para todo* $y \in M$ *e para* $i = 1,\ldots,n$;

iii) $r(M) = n$;

iv) *existe uma família* $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ *de formas linares sôbre* M*, duas a duas distintas, tais que:* $t(M) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\,(f_i)$ *e, para todo* j, $1 \leq j \leq n$, $\bigcap_{i\neq j} \mathrm{Ker}(f_i) \neq t(M)$

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Como $\mathrm{Ann}(M/(x_1,\ldots,x_n)A) \neq 0$, existe um elemento $a\in A$, $a \neq 0$ tal que $aM \subset (x_1,\ldots,x_n)A$. Logo, para todo $y \in M$, se tem $ay = \sum_{i=1}^{n} f_i(y)x_i$ onde $f_i(y) \in A$ para todo i e como a família $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ é livre, f_i é uma aplicação linear de M em A para todo i.Com efeito, $(a - f_i(x_i))x_i - \sum_{j\neq i} f_j(x_i)x_j = 0$ implica que $f_i(x_i) = a \neq 0$ para todo i e $f_j(x_i) = 0$ para $i \neq j$. Temos assim $f_i(x_i)y = \sum_{j=1}^{n} f_j(y)x_j$ para todo y em M.

De outro lado, tomando y_1 e y_2 em M, se tem $\sum_{i=1}^{n} f_i(y_1 - y_2)x_i = = f_i(x_i)(y_1 + y_2) = f_i(x_i)y_1 + f_i(x_i)y_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(y_1)x_i + + \sum_{i=1}^{n} f_i(y_2)x_i$, logo $f_i(y_1 + y_2) = f_i(y_1) + f_i(y_2)$ para todo i. Ànalogamente, se $c \in A$ e $y \in M$, deduzimos que $f_i(cy) = c.f_i(y)$ para todo i.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Seja $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0$ onde os a_j estão em A. Resulta, da igualdade precedente, que $0 = f_i(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j) = a_i f_i(x_i)$ e como $f_i(x_i) \neq 0$ e A é um anel de integridade, então $a_i = 0$ para todo i. Supondo que $\mathrm{Ann}(M/(x_1,\ldots,x_n)A) = 0$ e reduzindo a relação $f_i(x_i)y=$

$\sum_{j=1}^{n} f_j(y)x_j$ para todo $y \in M$, módulo $(x_1,\ldots,x_n)A$, deduziríamos $f_i(x_i) \in \mathrm{Ann}(M/(x_1,\ldots,x_n)A)$ de onde, $f_i(x_i) = 0$ para todo i.

(i) $\Longrightarrow$ (iii). Como A é um anel de integridade é a família $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ é livre, a sequência exata de A-módulos $0 \longrightarrow (x_1,\ldots,x_n)A \longrightarrow M \longrightarrow$ $\longrightarrow M/(x_1,\ldots,x_n)A \longrightarrow 0$ nos dá $r(M)=r((x_1,\ldots,x_n)A)+r(M/(x_1,\ldots,x_n)A)=$ $n + r(M/(x_1,\ldots,x_n)A)$. Além disso como $\mathrm{Ann}(M/(x_1,\ldots,x_n)A) \neq 0$, então $(M/(x_1,\ldots,x_n)A) \otimes_A K = t(M/(x_1,\ldots,x_n)A) \otimes_A K = 0$. Logo, $r(M) = n$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Se $r(M) = n$, é claro que o K-espaço vectorial $M \otimes_A K$ tem sempre uma base do tipo $(x_i \otimes 1)_{1\leq i\leq n}$ e isto implica que a família $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ é livre. De outro lado, para todo $y \in M$, $y \neq 0$, podemos escrever $y \otimes 1 = \sum_{i=1}^{n}(a_i/b_i)(x_i \otimes 1)$ onde os a_i/b_i estão em K. Pondo $b = \prod_{i=1}^{n} b_i$ e $c_i = a_i\prod_{i\neq j} b_j$, a relação precedente é equivalente à relação $(by - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i) \otimes 1 = 0$. Isto implica (cf. {1}, cap 2, prop. 4) que $by - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ não é livre em M, logo que existe um elemento $c \in A$, $c \neq 0$ tal que $c(by - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i) = 0$. Logo, $cb \in \mathrm{Ann}(M/(x_1,\ldots,x_n)A)$ e $cb \neq 0$, uma vez que A é um anel de integridade.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii). Com efeito, para todo j, $1 \leq j \leq n$, existe um elemento $x'_j \in \bigcap_{i\neq j} \mathrm{Ker}(f_i) - t(M)$ tal que $x'_j \notin \mathrm{Ker}(f_j)$. As hipóteses feitas implicam que a família $(x'_j)_{1\leq j\leq n}$ é livre. Pondo $x_i =$ $= f_1(x'_1)\ldots\ldots\widehat{f_i(x'_i)}\ldots\ldots f_n(x'_n)x'_i$ para todo i, segue-se que a família $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ é livre, que $f_j(x_i) = 0$ se $i \neq j$ e que $f_1(x_1) = f_2(x_2)\ldots$ $= f_n(x_n) \neq 0$. Seja $f\colon M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} f_i(M)$ a aplicação A-linear definida por $f(x) = (f_i(x))_{1\leq i\leq n}$ para todo x em M e $J = \mathrm{Im}(f)$. A sequência exata de A-módulos $0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow M \longrightarrow J \longrightarrow 0$ nos dá $r(M) = r(J)$. Consideremos a família $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de elementos de J definida por $e_j = (f_i(x_j))_{1\leq i\leq n}$. Mostremos que a família $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ é livre maximal. Com efeito, a relação $0 = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = (c_i f_i(x_i))_{1\leq i\leq n}$, onde os c_i estão em A, implica que $c_i f_i(x_i) = 0$, logo que $c_i = 0$ para todo i. De outro lado, se $y \in J$ existe un elemento $x \in M$ tal que $y=(f_i(x))_{1\leq i\leq n}$ Se tomarmos $c = -f_1(x_1) = -f_2(x_2) = \ldots\ldots = -f_n(x_n) \neq 0$, temos a re lação não trivial $cy + \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i = 0$ entre os e_i e y. Isto nos mostra que a família $(e_i)_{1 \le i \le n}$ é livre maximal, logo que $r(J) = n$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv). Trivial.

OBSERVAÇÕES.

(1) Sejam A um anel de integridade, M um A-módulo e $n \geq 1$ um inteiro. Se uma qualquer das condições equivalentes do teorema precedente fôr verificada, então M não pode ser um módulo de torção. Com efeito, se $M = t(M)$, então $r(M) = 0$, o que é absurdo, uma vez que $r(M) = n \geq 1$.

(2) No caso $n = 1$, $f_1 = f$, em (iv) $\Longrightarrow$ (iii) se tem a sequência exata de A-módulos $0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow M \longrightarrow f(M) \longrightarrow 0$ e portanto, as condições $t(M) \neq M$ e $f \neq 0$ são equivalentes.

3. A x-CONDIÇÃO

1. Em seguida, vamos mostrar como o teorema acima se relaciona com a noção de x-condição introduzida em {2}. Sejam A um anel de integridade, M um A-módulo e f uma forma linear sôbre M. Se existir um x em M tal que $f(x) \neq 0$ e $f(x)y = f(y)x$ para todo $y \in M$, diremos que a forma linear f obedece à *x-condição*.

EXEMPLOS.

1) Se f é uma forma linear injectiva sôbre M, então f obedece à x-condição, com $x \in M - \{0\}$, x qualquer. Recìprocamente a x-condição não implica que f seja injectiva, mas sòmente que $Ker(\psi) = 0:f(x)A$. Vemos assin que se $0:f(x)A = 0$ as duas noções coincidem.

2) Daremos aquí um exemplo de forma linear que obedece à x-condição mas que não é injectiva. Para isto, sejam $A = Z$ o anel dos inteiros racionais, $M = Z \times Z/(2)$ (produto direto) e f a forma linear sôbre M definida por $f(m,\bar{n}) = 2m$ para todo $(m,\bar{n}) \in M$. É claro que f é uma linear sôbre M e se consideramos o elemento $x = (1,\bar{0}) \in M, f(x) \neq 0$. De outro lado, para todo $y = (m,\bar{n}) \in M$ se tem $f(x)y = 2(m,\bar{n}) = (2m,\bar{0})$ e $f(y)x = 2m(1,\bar{0}) = (2m,\bar{0})$. Assim f obedece a $(1,\bar{0})$-condição. O núcleo de f é o sub-A-módulo de M formado pelos pares $(0,\bar{0})$ e $(0,\bar{1})$.

3) Consideremos o anel $A = Z$, o A-módulo $M = Z \times Z$ (produto direto) e a forma linear f sôbre M definida por $f(m,n) = m + n$, para todo $(m,n) \in M$. Suponhamos que exista um $x = (p,q) \in M$ tal que x obedeça à x-condição. Para todo $y = (m,n) \in M$ se deve ter $(p+q)(m,n) =$

$= (m+n)(p,q)$, isto é $np = mq$. Ora, uma tal relação é impossível para todo $(m,n) \in M$, exceto se $p = q = 0$, o que daria $x = 0$ e portanto $f(x) = 0$.

2. Indiquemos com $M^*(x)$ o sub-A-módulo de M^* das formas lineares que obedecem à x-condição. É lógico que podemos excluir sempre o caso $x=0$, uma vez que $M^*(0) = \emptyset$. Obtem-se assim:

$$\bigcup_{x \in M} M^*(x) \subset M^* \quad , \quad \text{logo} \quad \left\langle \bigcup_{x \in M} M^*(x) \right\rangle \subset M^*$$

onde indicamos com $<S>$, se S é um sub-conjunto de M, o sub-A-módulo de M gerado por S. Veremos, no N° 4, que em geral:

$$\left\langle \bigcup_{x \in M} M^*(x) \right\rangle \subsetneqq M^*$$

isto é, não é possível "aproximar" toda forma linear por formas lineares que obedecem a x-condições, x em M.

3. Do teorema precedente, resulta uma caracterização dos módulos munidos de uma forma linear que satisfaz a uma x-condição.

COROLÁRIO. *Sejam* A *um anel de integridade e* M *um* A-*módulo. As condições seguintes são equivalentes:*

(1) *existe um elemento* x *em* M *tal que* $\mathrm{Ann}(\{x\}) = 0$ *e* $\mathrm{Ann}(M/Ax) \neq 0$.

(2) *existe uma forma linear* f *sôbre* M *que obedece à* x-*condição.*

(3) $r(M) = 1$.

(4) M *não é um módulo de torção e existe uma forma linear* f *sôbre* M *tal que* $\mathrm{Ker}(f) = t(M)$.

4. CONTRA-EXEMPLO A FÓRMULA $\left\langle \bigcup_{x \in M} M^*(x) \right\rangle = M^*$.

Suponhamos que a fórmula acima seja verdadeira. Toda forma linear $f \in M^*$ se escreve $f = \sum_i f_i$ (soma finita), onde $f_i \in M^*(x_i)$ para todo i. Logo $f_i(x_i)y = f_i(y)x_i$ para todo $y \in M$. Isto nos mostra que $f_j(x_i)y - f_j(y)x_i \in \mathrm{Ker}(f_i) = t(M)$ (pelo corolário) isto é, existe um elemento $c \in A$, $c \neq 0$ tal que $f_j(cx_i)y = f_j(y)(cx_i)$ para todo y. Logo $f_j \in M^*(cx_i)$ e portanto $f \in M^*(cx_i)$. Mas, o exemplo 3) do N°3 nos mostra que, em geral, isto não é possível.

NOTA: La traducción de "pôsto" es "rango".

BIBLIOGRAFIA

{1} N. BOURBAKI, Algèbre Commutative, Chapitres 1 e 2, Hermann , París 1961.

{2} A. MICALI, Sur les algèbres universelles, Ann. Inst. Fourier Grenoble 14, 2 (1964), 33-88.

São Paulo , 23 de Novembro de 1966.