RT-MAP-8502

"TRANSVERSAIS DE CORTES ORIENTADOS
EM GRAFOS BIPARTIDOS"

Paulo Feofiloff

JULHO 1985

# TRANSVERSAIS DE CORTES ORIENTADOS EM GRAFOS BIPARTIDOS

Paulo Feofiloff

Instituto de Matemática e Estatística da USP

## 1. O PROBLEMA

Um grafo orientado consiste de um conjunto finito $V$ de vértices, um conjunto finito $a$ de arestas, e funções $p$ e $n$ de $a$ em $V$. Um subconjunto $X$ de $V$ é positivo se não existe $\alpha$ em $a$ tal que $n\alpha \in X$ e $p\alpha \in V-X$. Um conjunto negativo é definido pela dualidade entre $p$ e $n$. Os conjuntos $\emptyset$ e $V$ são ditos triviais.

Uma fonte é um vértice $v$ tal que $\{v\}$ é um conjunto positivo. Um sorvedouro é definido dualmente. O grafo é bipartido orientado se cada um de seus vértices é uma fonte ou um sorvedouro.

Para todo subconjunto $t$ de $a$ e todo conjunto positivo $X$, seja $tX$ o conjunto $\{\alpha \in t : p\alpha \in X, n\alpha \in V-X\}$. Se $X$ é negativo, defina $tX$ dualmente. Os conjuntos da forma $aX$ são chamados cortes orientados. Uma transversal (de cortes orientados) é um subconjunto $t$ de $a$ tal que $tX \neq \emptyset$ para todo conjunto positivo ou negativo não-trivial $X$.

Uma transversal $t$ é limitada por uma função inteira positiva $u$ sobre $V$ se $|t\{v\}| \leq u(v)$ para cada $v$ em $V$.

<u>Problema</u>: Encontrar condições necessárias e suficientes para que, num grafo bipartido orientado, um conjunto $r$ de arestas inclua uma transversal limitada por $u$.

Uma solução do Problema foi proposta pelo autor e por Younger [FY2]. O presente trabalho dá uma descrição mais simples daquela solução. A simplificação é baseada numa variante de uma relação supermodular demonstrada por Frank, Sebö e Tardos [FST].

Espera-se que a solução do Problema seja útil para o estudo da seguinte conjetura [W,EG]: Em todo grafo orientado, uma coleção máxima de transversais duas a duas disjuntas tem a mesma cardinalidade que um conjunto mínimo da forma $aX$ onde $X$ é um conjunto positivo ou negativo não-trivial. A identidade já foi demonstrada [S,FY1] para grafos dotados de conexão fonte-sorvedouro.

## 2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Um <u>apinhamento</u> de conjuntos é uma coleção de conjuntos disjuntos dois a dois. Uma <u>partição</u> de um conjunto $X$ é um apinhamento $P$ de subconjuntos não-nulos de $X$ tal que $\cup P = X$. Uma <u>partição positiva</u> consiste de conjuntos positivos; uma <u>partição negativa</u> é definida dualmente.

Uma <u>decomposição</u> de um conjunto positivo $X$ é uma coleção $\mathcal{Y}$ de conjuntos negativos não-triviais que admite uma partição $\{\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_m\}$ tal que

para cada $i$, $\mathcal{Y}_i$ é um apinhamento e

a coleção $\{V - \cup\mathcal{Y}_1, \ldots, V - \cup\mathcal{Y}_m\}$ é uma partição de $X$.

Uma decomposição de um conjunto negativo é definida dualmente. Exemplos: Para $X$ negativo não-trivial, qualquer partição positiva de $V - X$ é uma decomposição de $X$. Para qualquer partição negativa $S$ de $X$, a coleção $\{V - S : S \in S\}$ é uma decomposição de $X$.

A seguinte propriedade segue imediatamente da definição: Para toda decomposição $\mathcal{Y}$ de um conjunto positivo $X$,

(1) $aY \cap aY' = \emptyset$ para elementos distintos $Y, Y'$ de $\mathcal{Y}$ e

(2) $\cup\{aY : Y \in \mathcal{Y}\} = X$.

Um <u>terno positivo</u> consiste de um conjunto positivo $X$, uma decomposição $\mathcal{Y}$ de $X$, e um subconjunto $H$ de $V$. Um terno negativo é definido dualmente. Um subconjunto $r$ de $a$ é <u>viável</u> se, para todo terno (positivo ou negativo) $X, \mathcal{Y}, H$, a inclusão $rX \subseteq rH$ implica a desigualdade $|\mathcal{Y}| \leq uH$, onde $uH = \sum_{v \in V} u(v)$.

<u>Teorema</u>: Para todo grafo bipartido orientado $(V,a,p,n)$ e qualquer função inteira positiva $u$ sobre $V$, um subconjunto $r$ de $a$ inclui uma transversal limitada por $u$ se e só se $r$ é viável.

<u>Prova do "só se"</u>: Suponha que $r$ inclui uma transversal $t$ limitada por $u$. Seja $X, \mathcal{Y}, H$ um terno positivo

ou negativo tal que $rX \subseteq rH$ . Como $tY \cap tY' = \emptyset$ para elementos distintos $Y,Y'$ de $\mathcal{Y}$ , tem-se $|\mathcal{Y}| \leq |tX|$ ; mas $|tX| \leq |tH|$ , pois $tX \subseteq tH$ ; e $|tH| \leq uH$ pois $t$ é limitada. Portanto, $r$ é viável. //

<u>Redução do "se" aos Lemas da Simetria e Supermodularidade</u>: Suponha que $r$ é viável. Seja $t$ um subconjunto viável minimal de $r$ . Vamos mostrar que $t$ é uma transversal limitada por $u$ .

Seja $X$ um conjunto positivo não-trivial qualquer e $H$ um subconjunto de $V$ tal que $tX \subseteq tH$ . Como $X$ tem uma decomposição não-nula (especificamente, $\{V-X\}$) e $t$ é viável, temos $1 \leq uH$ . Assim, $H \neq \emptyset$ . Portanto, $tX \neq \emptyset$ . O raciocínio dual mostra que $tX \neq \emptyset$ para todo conjunto negativo não-trivial $X$ . Assim, $t$ é uma transversal. Resta mostrar que $t$ é limitada.

Uma <u>barreira</u> de uma aresta $\alpha$ é um terno $X,\mathcal{Y},H$ tal que $tX \subseteq tH \cup \{\alpha\}$ e $|\mathcal{Y}| > uH$ . Em virtude da minimalidade de $t$ , todo $\alpha$ em $t$ tem uma barreira. Na verdade, todo $\alpha$ tem duas barreiras, uma positiva e uma negativa, como passamos a indicar. Suponha que $X,\mathcal{Y},H$ é uma barreira positiva de $\alpha$ . Pelo Lema da Simetria dado abaixo, existe uma decomposição $\tilde{\mathcal{Y}}$ de $V-X$ tal que $|\tilde{\mathcal{Y}}| \geq |\mathcal{Y}|$ . Como $r(V-X) = rX$ , o terno $V-X,\tilde{\mathcal{Y}},H$ é uma barreira negativa de $\alpha$ .

Seja $v$ um vértice qualquer, digamos um sorvedouro; vamos mostrar que $|t\{v\}| \leq u(v)$ . De acordo com o parágrafo anterior, toda aresta de $t\{v\}$ tem uma barreira positiva. Em particular, existe um terno positivo $X, \mathcal{Y}, H$ tal que

$$tX \subseteq tH \cup t\{v\} \quad \text{e} \quad |\mathcal{Y}| \geq uH + |t\{v\} \cap tX| \tag{1}$$

Escolha $X, \mathcal{Y}, H$ de tal modo que $t\{v\} \cap tX$ seja maximal. Então

$$t\{v\} \subseteq tX \tag{2}$$

como mostraremos no próximo parágrafo. Ademais,

$$|\mathcal{Y}| \leq uH + u(v) \tag{3}$$

pela condição de viabilidade aplicada ao terno $X, \mathcal{Y}, H \cup \{v\}$. De (2), (1) e (3), segue que $|t\{v\}| = |t\{v\} \cap tX| \leq u(v)$.

Suponha que, ao contrário do que se afirma em (2), $t\{v\} - tX$ contém uma aresta $\alpha'$. Esta aresta tem uma barreira positiva. Em particular, existe um terno positivo $X', \mathcal{Y}', H'$ tal que $t\{v\} \cap tX' = \{\alpha'\}$, $tX' \subseteq tH' \cup t\{v\}$ e $|\mathcal{Y}'| \geq uH' + |t\{v\} \cap tX'|$. Seja $H_\cap$ o conjunto $(H \cap X') \cup (H' \cap X) \cup (H \cap H')$ e $H_\cup$ o conjunto $(H - X') \cup (H' - X) \cup (H \cap H')$. Note que $X \cap X'$ e $X \cup X'$ são conjuntos positivos, $t(X \cap X') \subseteq tH_\cap \cup t\{v\}$ e

$$t(X \cup X') \subseteq tH_\cup \cup t\{v\}. \tag{4}$$

Ademais, $t(X \cap X') \subseteq tH_\cap$, (5)

pois $t\{v\} \cap tX' = \{\alpha'\}$ e $\alpha' \notin tX$. Pelo Lema da Supermodularidade dado abaixo, existem decomposições $\mathcal{Y}_\cap$ e $\mathcal{Y}_\cup$ de $X \cap X'$ e $X \cup X'$ respectivamente tais que

$$|\mathcal{Y}_\cap| + |\mathcal{Y}_\cup| \geq |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Y}'|.$$

Como $t$ é viável, (5) implica $|\mathcal{Y}_\cap| \leq uH_\cap$. Logo,

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}_\cup| &\geq |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Y}'| - |\mathcal{Y}_\cap| \\ &\geq uH + uH' - uH_\cap + |t\{v\} \cap tX| + |t\{v\} \cap tX'| \end{aligned}$$

$$\geq \ uH + uH' - uH_\cap + |t\{v\} \cap t(X \cup X')|$$

$$\geq \ uH_\cup + |t\{v\} \cap t(X \cup X')| \ . \tag{6}$$

Por (4) e (6), o terno $X \cup X', \mathcal{Y}_\cup, H_\cup$ tem as mesmas propriedades que $X, \mathcal{Y}, H$. Ademais, $t\{v\} \cap tX$ é subconjunto próprio de $t\{v\} \cap t(X \cup X')$ o que contradiz a maximalidade de $X, \mathcal{Y}, H$. A contradição prova (2). //

Lema da Simetria: Para toda decomposição $\mathcal{Y}$ de um conjunto positivo $X$, existe uma decomposição $\tilde{\mathcal{Y}}$ de $V - X$ tal que $|\tilde{\mathcal{Y}}| \geq |\mathcal{Y}|$.

Lema da Supermodularidade: Para decomposições $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}'$ de conjuntos positivos $X$ e $X'$ respectivamente, existem decomposições $\mathcal{Y}_\cap$ e $\mathcal{Y}_\cup$ de $X \cap X'$ e $X \cup X'$ respectivamente tais que $|\mathcal{Y}_\cap| + |\mathcal{Y}_\cup| \geq |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Y}'|$.

O segundo lema é uma variante de um resultado de Frank, Sebö e Tardos [FST]. A prova que daremos do primeiro lema é essencialmente uma versão da prova do Teorema de McWhirter e Younger [McWY].

## 3. SIMETRIA

Seja $X$ um conjunto positivo, $\mathcal{A}$ uma partição positiva de $X$ e $\mathcal{B}$ uma partição negativa de $V - X$. Um conjunto positivo $D$ está espremido entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ se, para todo $C$ em $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, ou $C \cap D = \emptyset$ ou $C - D = \emptyset$.

Uma cobertura de uma coleção $\mathcal{D}$ de conjuntos positivos é um conjunto $t$ de arestas tal que $tD \neq \emptyset$ para todo elemento não-trivial $D$ de $\mathcal{D}$.

Um apinhamento $\mathcal{P}$ é mais fino que outro $\mathcal{P}'$ se todo elemento de $\mathcal{P}$ está incluido num elemento de $\mathcal{P}'$. Todo conjunto positivo $X$ tem uma partição positiva que é mais fina que qualquer outra partição positiva de $X$.

Prova do Lema da Simetria: Seja $\mathcal{A}$ a partição positiva mais fina de $X$; $\mathcal{B}$ a partição negativa mais fina de $V-X$; $\mathcal{D}$ a coleção dos conjuntos positivos espremidos entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$; e $t$ uma cobertura mínima de $\mathcal{D}$.

Vamos mostrar que $|\mathcal{Y}| \leq |tX|$. Como $aY \cap aY' = \emptyset$ para elementos distintos $Y, Y'$ de $\mathcal{Y}$ e $aY \subseteq aX$ para todo $Y$ em $\mathcal{Y}$, a desigualdade $|\mathcal{Y}| \leq |tX|$ é consequencia da inclusão $\{V-Y : Y \in \mathcal{Y}\} \subseteq \mathcal{D}$, que passamos a verificar. Para todo $Y$ em $\mathcal{Y}$ e todo $B$ em $\mathcal{B}$, $B \cap Y$ e $B-Y$ são conjuntos negativos. Como $\mathcal{B}$ não admite refinamento, um dos conjuntos $B \cap Y$ e $B-Y$ deve ser nulo. Um raciocínio análogo mostra que $A \cap Y = \emptyset$ ou $A-Y = \emptyset$ para todo $A$ em $\mathcal{A}$. Portanto, para todo $Y$ em $\mathcal{Y}$, $V-Y$ está espremido entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Nos três parágrafos seguintes vamos mostrar que existe uma decomposição $\tilde{\mathcal{Y}}$ de $V-X$ tal que $|\tilde{\mathcal{Y}}| = |tX|$. Com isto, estará concluída a prova do Lema.

Sejam $A$ e $B$ elementos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ respectivamente. Como $t$ é uma cobertura de $\mathcal{D}$, existe uma sequência

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de arestas tal que

$p\alpha_1 \in A$,

$n\alpha_1 = n\alpha_2$, $p\alpha_2 = p\alpha_3$, $\ldots$, $n\alpha_{k-2} = n\alpha_{k-1}$, $p\alpha_{k-1} = p\alpha_k$,

$n\alpha_k \in B$ e

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{2i+1}, \ldots, \alpha_k \in t$.

Seja $t'$ o conjunto $(t - \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2i+1}, \ldots, \alpha_k\}) \cup \{\alpha_2, \ldots, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{k-1}\}$. Como $|t'| < |t|$ e $t$ é mínimo, $\mathcal{D}$ tem um elemento não-trivial $Z$ tal que $t'Z = \emptyset$. Para um tal $Z$ tem-se $A - Z = \emptyset$, $B \cap Z = \emptyset$ e $|tZ| = 1$.

Seja $A$ um elemento qualquer de $\mathcal{A}$. Para cada $B$ em $\mathcal{B}$, seja $Z_B$ o elemento maximal da coleção $\{Z \in \mathcal{D} : A - Z = \emptyset,\ B \cap Z = \emptyset,\ |tZ| = 1\}$. Seja $\mathcal{Z}$ a coleção $\{Z_B : B \in \mathcal{B}\}$. Uma verificação de rotina mostra que $\mathcal{Z}$ é um apinhamento, que $A - \cup\mathcal{Z} = \emptyset$, e que $(V - X) \cap \cup\mathcal{Z} = \emptyset$.

Para cada $A$ em $\mathcal{A}$, seja $\mathcal{Z}_A$ o mais fino dentre os apinhamentos $\mathcal{Z}$ que satisfazem as condições: $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D}$, $A - \cup\mathcal{Z} = \emptyset$, $(V - X) \cap \cup\mathcal{Z} = \emptyset$, e $|tZ| = 1$ para todo $Z$ em $\mathcal{Z}$. Seja $\tilde{\mathcal{Y}}$ a coleção $\cup\{\mathcal{Z}_A : A \in \mathcal{A}\}$. Uma verificação de rotina mostra que $\{V - \cup\mathcal{Z}_A : A \in \mathcal{A}\}$ é uma partição de $V - X$. Portanto $\tilde{\mathcal{Y}}$ é uma decomposição de $V - X$. Mas então $\sum_{Z \in \tilde{\mathcal{Y}}} |tZ| = |tX|$, donde $|\tilde{\mathcal{Y}}| = |tX|$. //

## 4. SUPERMODULARIDADE

<u>Lema 1</u>: Sejam $Y$ e $Y'$ conjuntos negativos. Dadas partições negativas $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ de $Y$ e $Y'$, existem partições negativas $\mathcal{P}_\cap$ e $\mathcal{P}_\cup$ de $Y \cap Y'$ e $Y \cup Y'$.

tais que $|\mathcal{P}_\cap| + |\mathcal{P}_\cup| = |\mathcal{P}| + |\mathcal{P}'|$ .

Prova: Seja $\mathcal{R}$ a família definida pela união disjunta de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ (isto é, $\mathcal{R}$ tem duas cópias de cada elemento de $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ ). Um elemento R de $\mathcal{R}$ cruza outro elemento, R' , se $R \cap R' \neq \emptyset$ , $R \nsubseteq R'$ e $R \nsupseteq R'$ . Se R cruza R' , substitua R por $R \cap R'$ e R' por $R \cup R'$ . A família assim obtida tem menos cruzamentos que $\mathcal{R}$ . Repita a operação até obter uma família $\mathcal{R}^*$ que não tem cruzamentos. Seja $\mathcal{P}_\cap$ a coleção dos elementos minimais de $\mathcal{R}^*$ , e seja $\mathcal{P}_\cup$ o complemento de $\mathcal{P}_\cap$ em $\mathcal{R}^*$ . Verifica-se que $\mathcal{P}_\cap$ e $\mathcal{P}_\cup$ são partições de $X \cap X'$ e $X \cup X'$ . Ademais, $|\mathcal{P}_\cap| + |\mathcal{P}_\cup| = |\mathcal{R}^*| = |\mathcal{R}| = |\mathcal{P}| + |\mathcal{P}'|$ . //

<u>Lema da Supermodularidade</u>: Sejam X e X' conjuntos positivos. Para decomposições $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}'$ de X e X', existem decomposições $\mathcal{Y}_\cap$ e $\mathcal{Y}_\cup$ de $X \cap X'$ e $X \cup X'$ tais que $|\mathcal{Y}_\cap| + |\mathcal{Y}_\cup| \geq |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Y}'|$ .

Prova: Seja $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ a partição que caracteriza $\mathcal{Y}$ como decomposição de X . Seja $\{Y_1', \ldots, Y_n'\}$ a partição correspondente de $\mathcal{Y}'$ .

Seja $\Pi$ a família de apinhamentos definida pela união disjunta de $\{Y_1,\ldots,Y_m\}$ e $\{Y_1',\ldots,Y_n'\}$ . Para cada P em $\Pi$ , considere o conjunto positivo $V - \cup P$ . Seja $\mathcal{Q}$ a família de todos estes conjuntos positivos.

Suponha que dois elementos, Q e Q' , de $\mathcal{Q}$ se cruzam, e sejam $P$ e $P'$ os elementos correspondentes de $\Pi$. Pelo Lema 1, existem partições negativas $P_\cap$ e $P_\cup$ tais que $V - \cup P_\cap = Q \cup Q'$, $V - \cup P_\cup = Q \cap Q'$ e $|P_\cap| + |P_\cup| = |P| + |P'|$. Substitua $P, P'$ por $P_\cap, P_\cup$ e $Q, Q'$ por $Q \cup Q'$, $Q \cap Q'$. Repita esta operação até obter famílias $\Pi^*$ e $\mathcal{Q}^*$ tais que $\mathcal{Q}^*$ não tem cruzamentos.

Seja $\mathcal{Q}_\cap$ a coleção dos elementos minimais de $\mathcal{Q}^*$ e seja $\mathcal{Q}_\cup$ o complemento de $\mathcal{Q}_\cap$ em $\mathcal{Q}^*$. Sejam $\Pi_\cap$ e $\Pi_\cup$ as subcoleções correspondentes de $\Pi^*$. Defina $\mathcal{Y}_\cap$ e $\mathcal{Y}_\cup$ como $\cup\Pi_\cap$ e $\cup\Pi_\cup$ respectivamente. Verifica-se que $\{V - \cup P : P \in \Pi_\cap\} = \mathcal{Q}_\cap$ e $\mathcal{Q}_\cap$ é uma partição positiva de $X \cap X'$; portanto $\mathcal{Y}_\cap$ é uma decomposição de $X \cap X'$. Analogamente, $\mathcal{Y}_\cup$ é uma decomposição de $X \cup X'$. Ademais,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Y}_\cap| + |\mathcal{Y}_\cup| &= \sum\{|P| : P \in \Pi^*\} \\
&= \sum\{|P| : P \in \Pi\} \\
&= |Y_1| + \ldots + |Y_m| + |Y'_1| + \ldots + |Y'_n| \\
&= |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Y}'| . //
\end{aligned}$$

REFERENCIAS


[EG] J.Edmonds e R.Giles, A min-max relation for submodular functions on graphs, em *Annals of Discrete Math. 1*, North-Holland, 1977, 185-204.

[FY1] P.Feofiloff e D.H.Younger, Directed cut transversal packing for source-sink connected graphs, a ser publicado.

[FY2] P.Feofiloff e D.H.Younger, Vertex-constrained transversals in a bipartite graph, a ser publicado.

[FST] A.Frank, A.Sebö e E.Tardos, Covering directed and odd cuts, em *Annals of Discrete Math. (Math. Prog. Conference, Oberwolfach, 1984)*.

[McWY] I.P.McWhirter e D.H.Younger, Strong covering of a bipartite graph, *J.London Math. Soc (2)*, 3 (1971) 86-90 .

[S] A.Schrijver, Min-max relations for directed graphs, em *Annals of Discrete Math. 16*, North-Holland, 1982, 261-280.

[W] D.R.Woodall , Menger and König systems, em *Theory and Applications of Graphs,* Lecture Notes in Math. 642, Springer-Verlag, 1978, 620-635.

"RELATÓRIO TÉCNICO"
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-7701 - Ivan de Queiroz Barros
On equivalence and reducibility of Generating Matrices of RK-Procedures - Agosto 1977

RT-MAP-7702 - V.W. Setzer
A Note on a Recursive Top-Down Analizer of N.Wirth - Dezembro 1977

RT-MAP-7703 - Ivan de Queiroz Barros
Introdução a Aproximação Ótima - Dezembro 1977

RT-MAP-7704 - V.W. Setzer, M.M. Sanches
A linguagem "LEAL" para Ensino básico de Computação - Dezembro 1977

RT-MAP-7801 - Ivan de Queiroz Barros
Proof of two Lemmas of interest in connection with discretization of Ordinary Differential Equations - Janeiro 1978

RT-MAP-7802 - Silvio Ursic, Cyro Patarra
Exact solution of Systems of Linear Equations with Iterative Methods
Fevereiro 1978

RT-MAP-7803 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypohamiltonian Digraphs - Março 1978

RT-MAP-7804 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
Hypotraceable Digraphs - Maio 1978

RT-MAP-7805 - W. Hesse, V.W. Setzer
The Line-Justifier: an example of program development by transformations
Junho 1978

RT-MAP-7806 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Capítulo I - Tópicos Introdutórios
Capítulo II - Discretização
Julho 1978

RT-MAP-7807 - Ivan de Queiroz Barros
$(\Gamma',\Gamma)$ - Estabilidade e Métodos Preditores-Corretores - Setembro 1978

RT-MAP-7808 - Ivan de Queiroz Barros
Discretização
Capítulo III - Métodos de passo progressivo para Eq. Dif. Ord. com condições iniciais - Setembro 1978

RT-MAP-7809 - V.W. Setzer
Program development by transformations applied to relational Data-Base queries - Novembro 1978

RT-MAP-7810 - Nguiffo B. Boyom, Paulo Boulos
Homogeneity of Cartan-Killing spheres and singularities of vector fields - Novembro 1978

TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-7811 - D.T. Fernandes e C. Patarra
Sistemas Lineares Esparsos, um Método Exato de Solução - Novembro 1978

RT-MAP-7812 - V.W. Setzer e G. Bressan
Desenvolvimento de Programas por Transformações: uma Comparação entre dois Métodos - Novembro 1978

RT-MAP-7813 - Ivan de Queiroz Barros
Variação do Passo na Discretização de Eq. Dif. Ord. com Condições Iniciais - Novembro 1978

RT-MAP-7814 - Martin Grötschel e Yoshiko Wakabayashi
On the Complexity of the Monotone Asymetric Travelling Salesman Polytope I: HIPOHAMILTONIAN FACETS - Dezembro 1978

RT-MAP-7815 - Ana F. Humes e E.I. Jury
Stability of Multidimensional Discrete Systems: State-Space Representation Approach - Dezembro 1978

RT-MAP-7901 - Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
On the complexity of the Monotone Asymetric Travelling Salesman Polytope II: HYPOTRACEABLE FACETS - Fevereiro 1979

RT-MAP-7902 - M.M. Sanches e V.W. Setzer
A portabilidade do Compilador para a Linguagem LEAL - Junho 1979

RT-MAP-7903 - Martin Grötschel, Carsten Thomassen, Yoshiko Wakabayashi
Hypotraceable Digraphs - Julho 1979

RT-MAP-7904 - N'Guiffo B. Boyom
Translations non triviales dans les groupes (transitifs) des transformations affines - Novembro 1979

RT-MAP-8001 - Ângelo Barone Netto
Extremos detectáveis por jatos - Junho 1980

RT-MAP-8002 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. I - Medida e Integração Abstrata - Julho 1980

RT-MAP-8003 - Routo Terada
Fast Algorithms for NP-Hard Problems which are Optimal or Near-Optimal with Probability one - Setembro 1980

RT-MAP-8004 - V.W. Setzer e R. Lapyda
Uma Metodologia de Projeto de Bancos de Dados para o Sistema ADABAS
Setembro 1980

RT-MAP-8005 - Imre Simon
On Brzozowski's Problem: $(1 \cup A)^m = A^*$ - Outubro 1980

RT-MAP-8006 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. II - Espaços Lp - Outubro 1980

## TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-8101 - Luzia Kazuko Yoshida e Gabriel Richard Bitran
Um algoritmo para Problemas de Programação Vetorial com Variáveis Zero-Um - Fevereiro 1981

RT-MAP-8102 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. III - Medidas em Espaços Topológicos - Março 1981

RT-MAP-8103 - V.W. Setzer, R. Lapyda
Design of Data Models for the ADABAS System using the Entity-Relationship Approach - Abril 1981

RT-MAP-8104 - Ivan de Queiroz Barros
Medida e Integração
Cap. IV - Medida e Integração Vetoriais - Abril 1981

RT-MAP-8105 - U.S.R. Murty
Projective Geometries and Their Truncations - Maio 1981

RT-MAP-8106 - V.W. Setzer, R. Lapyda
Projeto de Bancos de Dados, Usando Modelos Conceituais
Este relatório Técnico complementa o RT-MAP-8103. Ambos substituem o RT-MAP-8004 ampliando os conceitos ali expostos. - Junho 1981

RT-MAP-8107 - Maria Angela Gurgel, Yoshiko Wakabayashi
Embedding of Trees - August 1981

RT-MAP-8108 - Ivan de Queiroz Barros
Mecânica Analítica Clássica - Outubro 1981

RT-MAP-8109 - Ivan de Queiroz Barros
Equações Integrais de Fredholm no Espaço das Funções A-Uniformemente Contínuas - Novembro 1981

RT-MAP-8110 - Ivan de Queiroz Barros
Dois Teoremas sobre Equações Integrais de Fredholm - Novembro 1981

RT-MAP-8201 - Siang Wun Song
On a High-Performance VLSI Solution to Database Problems - Janeiro 1982

RT-MAP-8202 - Maria Angela Gurgel, Yoshiko Wakabayashi
A Result on Hamilton-Connected Graphs - Junho 1982

RT-MAP-8203 - Jörg Blatter, Larry Schumaker
The Set of Continuous Selections of a Metric Projection in C(X) - Outubro 1981

RT-MAP-8204 - Jörg Blatter, Larry Schumaker
Continuous Selections and Maximal Alternators for Spline Approximation - Dezembro 1981

RT-MAP-8205 - Arnaldo Mandel
Topology of Oriented Matroids - Junho 1982

RT-MAP-8206 - Erich J. Neuhold
Database Management Systems; A General Introduction - Novembro 1982

RT-MAP-8207 - Béla Bollobás
The Evolution of Random Graphs - Novembro 1982

## TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-8208 - V.W. Setzer
Um Grafo Sintático para a Linguagem PL/M-80 - Novembro 1982

RT-MAP-8209 - Jayme Luiz Szwarcfiter
A Sufficient Condition for Hamilton Cycles - Novembro 1982

RT-MAP-8301 - W.M. Oliva
Stability of Morse-Smale Maps - Janeiro 1983

RT-MAP-8302 - Belá Bollobás, Istvan Simon
Repeated Random Insertion into a Priority Queue - Fevereiro 1983

RT-MAP-8303 - V.W. Setzer, P.C.D. Freitas e B.C.A. Cunha
Um Banco de Dados de Medicamentos - Julho 1983

RT-MAP-8304 - Ivan de Queiroz Barros
O Teorema de Stokes em Variedades Celuláveis - Julho 1983

RT-MAP-8305 - Arnaldo Mandel
The 1-Skeleton of Polytopes, oriented Matroids and some other lattices - - Julho 1983

RT-MAP-8306 - Arnaldo Mandel
Alguns Problemas de Enumeração em Geometria - Agosto 1983

RT-MAP-8307 - Siang Wun Song
Complexidade de E/S e Projetos Optimais de Dispositivos para Ordenação - - Agosto 1983

RT-MAP-8401-A - Dirceu Douglas Salvetti
Procedimentos para Cálculos com Splines
Parte A - Resumos Teóricos - Janeiro 1984

RT-MAP-8401-B
Parte B - Descrição de Procedimentos - Janeiro 1984

RT-MAP-8401-C
Parte C - Listagem de Testes - Janeiro 1984

RT-MAP-8402 - V.W. Setzer
Manifesto contra o uso de computadores no Ensino de 1º Grau - Abril 1984

RT-MAP-8403 - G. Fusco e W.M. Oliva
On Mechanical Systems with Non-Holonomic Constraints: Some Aspects of the General Theory and Results for the Dissipative Case - Julho 1984

RT-MAP-8404 - Imre Simon
A Factorization of Infinite Words - Setembro 1984 - São Paulo - IME-USP 7 pg.

RT-MAP-8405 - Imre Simon
The Subword Structure of a Free Monoid - Setembro 1984 - São Paulo - IME-USP 6 pg.

RT-MAP-8406 - Jairo Z. Gonçalves e Arnaldo Mandel
Are There Free Groups in Division Rings? - Setembro 1984 - São Paulo - IME-USP 25 pg.

RT-MAP-8407 - Paulo Feofiloff and D.H. Younger
Vertex-Constrained Transversals in a Bipartite Graph - Novembro 1984
São Paulo - IME-USP - 18 pg.

TÍTULOS PUBLICADOS

RT-MAP-8408 - Paulo Feofiloff
Disjoint Transversals of Directed Coboundaries - Novembro 1984
São Paulo - IME-USP - 126 pg.

RT-MAP-8409 - Paulo Feofiloff e D.H. Younger
Directed cut transversal packing for source-sink connected graphs -
São Paulo - IME-USP - 16 pg. - Novembro 1984

RT-MAP-8410 - Gaetano Zampieri e Ângelo Barone Netto
Attractive Central Forces May Yield Liapunov Instability - Dezembro 1984
São Paulo - IME-USP - 8 pg.

RT-MAP-8501 - Siang Wun Song
Disposições Compactas de Árvores no Plano - Maio 1985
São Paulo - IME-USP - 11 pg.

RT-MAP-8502 - Paulo Feofiloff
Transversais de Cortes Orientados em Grafos Bipartidos - Julho 1985
São Paulo - IME-USP - 11 pg.