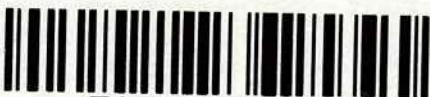


Escola Politécnica - EPBC



31200053614

BT/PEF-8716

ESTUDO DAS PLACAS.  
RESÍDUOS PONDERADOS E ELEMENTOS FINITOS

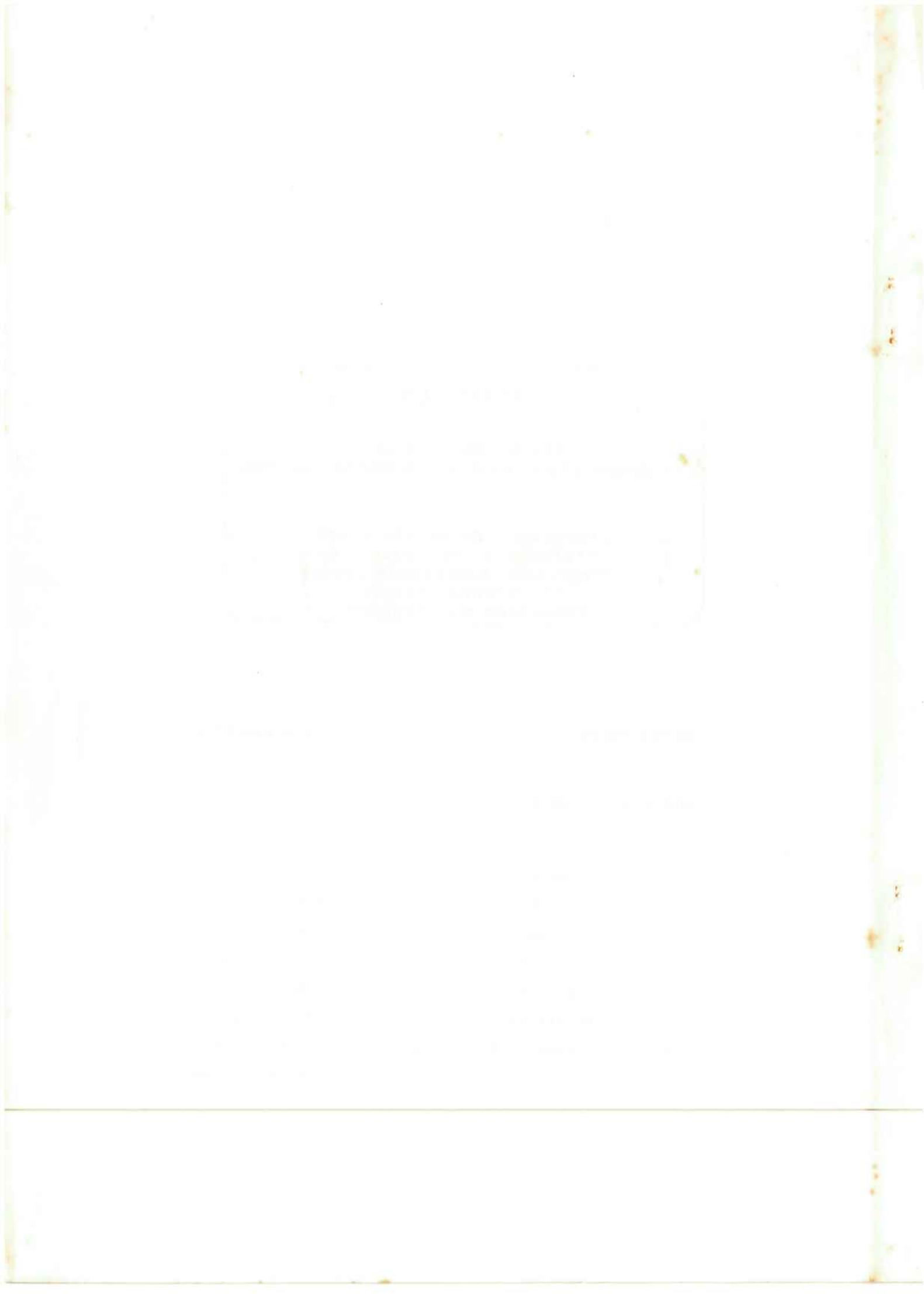
\*Henrique de Britto Costa  
\*\*Victor M. de Souza Lima  
\*Professor Assistente Doutor  
\*\*Professor Titular  
(recebido em 14/09/87)

EDITOR CHEFE

C.E.N.Mazzilli

COMISSÃO EDITORIAL

- |                                     |                       |
|-------------------------------------|-----------------------|
| - Engenharia de Solos               | W.Hachich             |
| - Estruturas de Concreto            | P.B.Fusco             |
| - Estruturas Metálicas e de Madeira | P.B.Fusco             |
| - Interação Solo-Estrutura          | C.E.M.Maffei          |
| - Mecânica Aplicada                 | D.Zagottis            |
| - Métodos Numéricos                 | J.C. André            |
| - Pontes e Grandes Estruturas       | J.C.Figueiredo Ferraz |
| - Teoria das Estruturas             | V.M.Souza Lima        |



Estudo das Placas. Resíduos Ponderados e Elementos Finitos

Henrique de Britto Costa

Victor M. de Souza Lima

1987



## PREÂMBULO

Este trabalho é o segundo de uma série de quatro, abaixo relacionados, que os autores desenvolveram no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo:

- Estado Plano de Tensão. Resíduos Ponderados e Elementos Finitos
- Estudo das Placas. Resíduos Ponderados e Elementos Finitos
- Teoria de Segunda Ordem das Placas. Estudo da Rigidez Secante
- Teoria de Segunda Ordem das Placas. Estudo da Rigidez Tangente

Nos quatro artigos, intimamente ligados entre si, procura-se mostrar, de forma simples e precisa, a natural afinidade que existe entre as formulações diferencial e integral - incluída nesta última a discretização por elementos finitos - no que diz respeito ao problema das placas elásticas delgadas de comportamento geometricamente não-linear.

No primeiro boletim é deduzida a matriz de rigidez das chapas, em teoria de primeira ordem.

O segundo boletim é dedicado à obtenção da matriz de rigidez das placas delgadas de comportamento linear.

No terceiro se mostra como chegar à matriz de rigidez secante das placas, sob as hipóteses de uma teoria de segunda ordem de caráter simplificado. Também se fala algo a respeito do fenômeno da flambagem de chapas.

Finalmente, no último boletim se obtém a matriz de rigidez tangente das placas, a partir da matriz de rigidez secante deduzida no boletim anterior. Além disso, uma sugestão é feita, no que concerne às forças de membrana, no sentido de facilitar consideravelmente a construção da matriz de rigidez tangente, em cada incremento (ou iteração).

Na introdução do Método dos Elementos Finitos, utiliza-se sempre a formulação integral que corresponde à interpretação dada por Galerkin ao Método dos Resíduos Ponderados. Tal conduta permite, como se sabe, o ataque direto das equações diferenciais regentes do fenômeno, quer existam ou não princípios variacionais ligados à questão. Trata-se, portanto, de um procedimento de largo espectro, e os conceitos correlatos têm aplicação praticamente ilimitada.

### 1. Equacionamento Diferencial

Para uma placa construída de material homogêneo e isotropo, as relações momento-curvatura são dadas por (usa-se a notação usual; veja-se por exemplo [ 3 ]):

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2)$$

$$M_{xy} = D(1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

Nas expressões acima o parâmetro  $D = Eh^3 / [12(1-v^2)]$  é conhecido como rigidez da placa.

O equilíbrio de forças na vertical do elemento infinitesimal da figura 1 fornece:



$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (4)$$

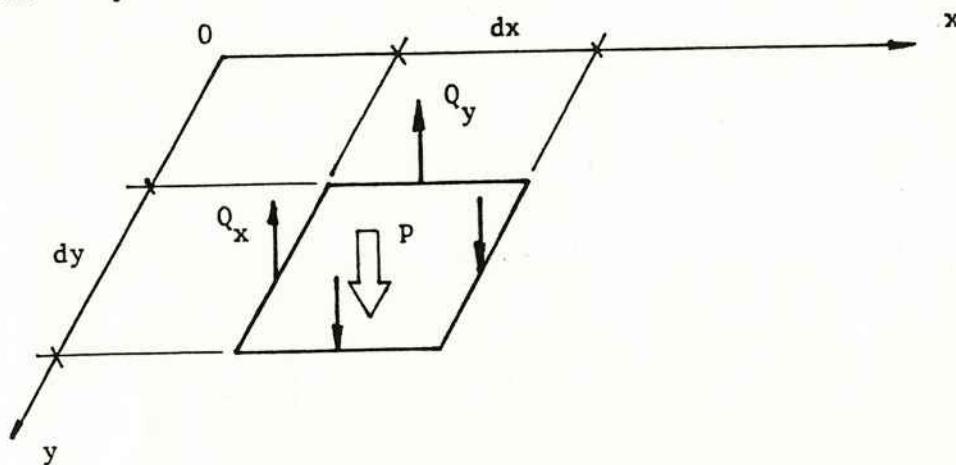


Figura 1 - Forças cortantes por unidade de comprimento

O equilíbrio de momentos em torno dos eixos O<sub>x</sub> e O<sub>y</sub> (figura 2) se escreve, respectivamente, como:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (5)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x$$

Sendo  $M_{yx} = -M_{xy}$ , a última equação fica:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (6)$$

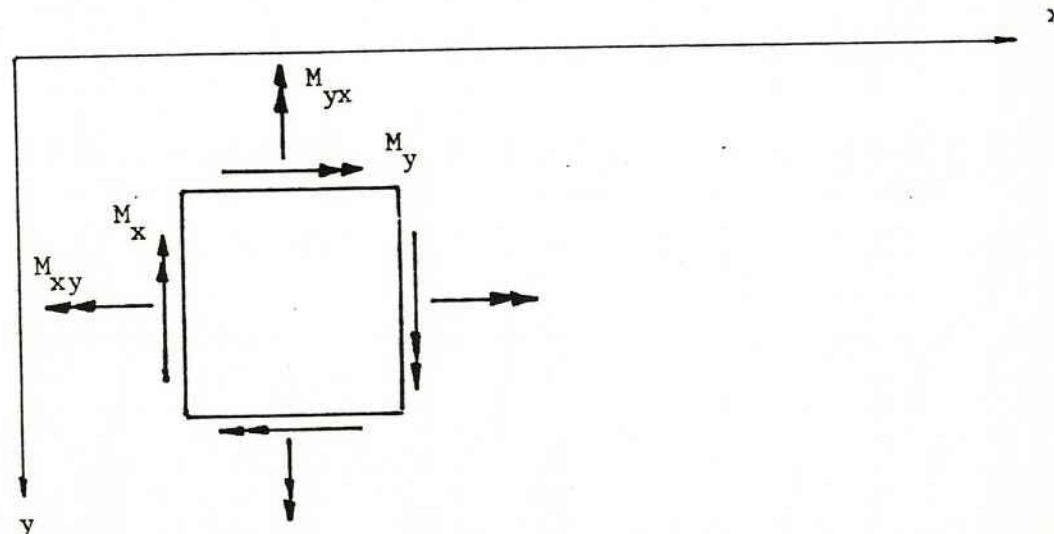
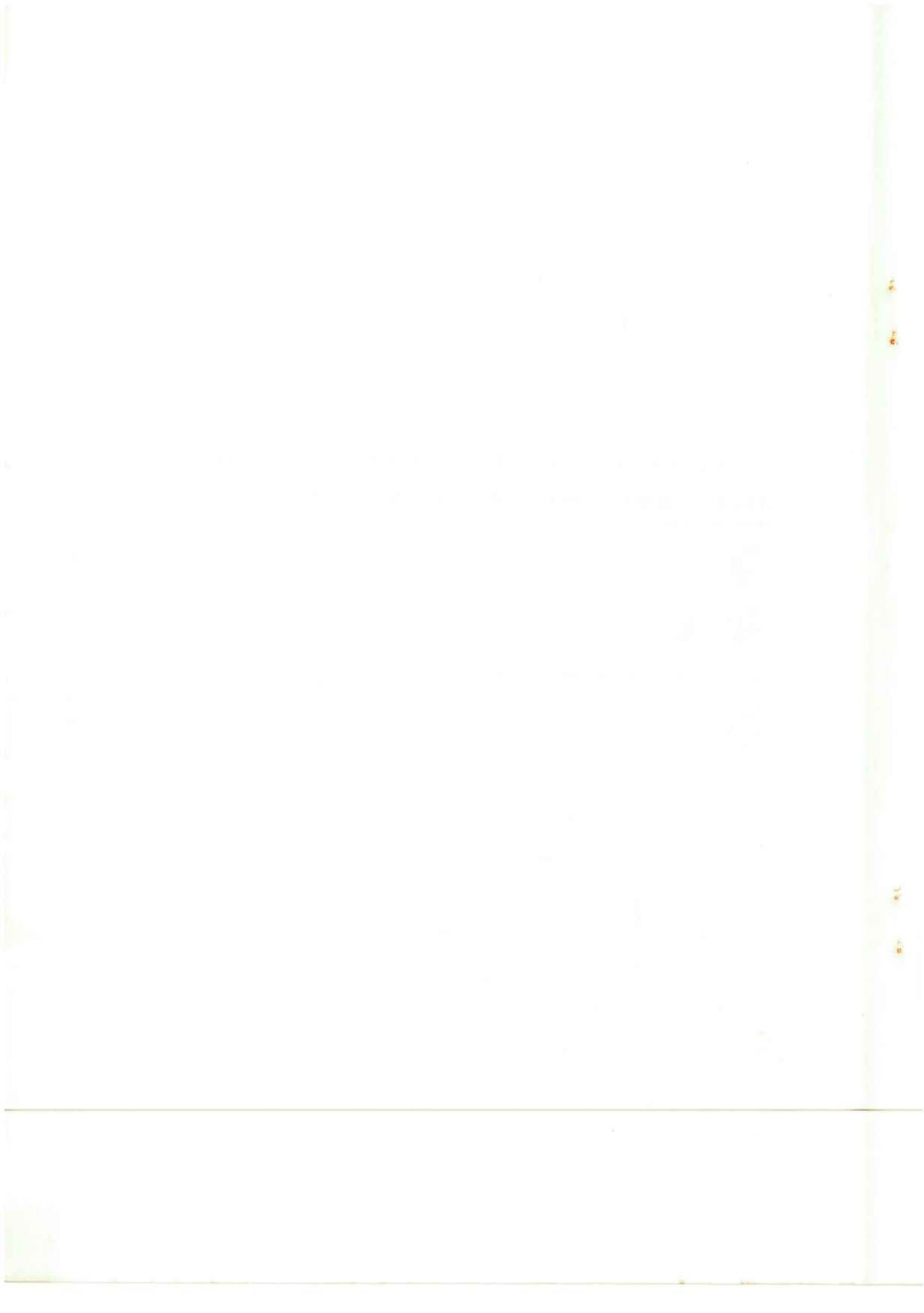


Figura 2 - Momentos por unidade de comprimento

Combinando-se adequadamente as expressões (4), (5) e (6), chega-se a:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (7)$$



Introduzindo-se (1), (2) e (3) em (7), obtém-se finalmente a equação de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (8)$$

Quanto às condições de contorno da equação de Lagrange, considere-se a fronteira da placa dividida em duas partes,  $C_d$  e  $C_\sigma$ , conforme se indica na figura 3:

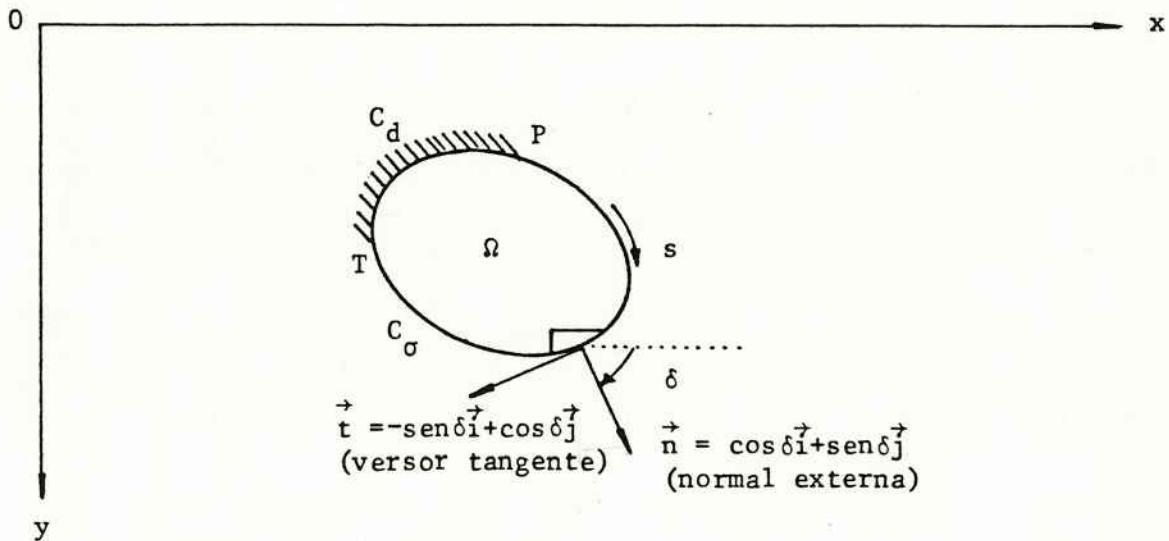


Figura 3

Em  $C_d$  (região de apoio da placa) são conhecidos:

$$w = \bar{w} \quad (\text{recalque de apoio}) \quad (9)$$

$$(\partial w / \partial n) = \bar{\theta} \quad (\text{rotação forçada de apoio}) \quad (10)$$

Essas são as condições de contorno essenciais (ou geométricas).

Em  $C_\sigma$  (borda livre) são conhecidos:

$$M_n = \bar{M}_n \quad (\text{momento aplicado}) \quad (11)$$

$$V_n = \bar{V}_n \quad (\text{carga vertical aplicada}) \quad (12)$$

$$\text{sendo } V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \quad (13)$$

Há ainda duas forças verticais concentradas, aplicadas nos pontos P e T:

$$R_P = (M_{nt})_P \quad \text{e} \quad R_T = (M_{nt})_T$$

As expressões (11) e (12) representam as condições de contorno naturais (ou estáticas).

Há ainda a considerar a chamada condição mista de contorno. Existem dois casos possíveis: o apoio simples, caracterizado pelas expressões (9) e (11), e a situação definida pelas condições (10) e (12), útil quando há de se tirar proveito de eventual simetria existente no problema.

Para finalizar este ítem, escrevem-se a seguir algumas expressões que se revela-



rão úteis logo adiante. Assim, isolando-se um trecho infinitesimal  $ds$  do contorno (figura 4), o equilíbrio de forças na vertical gera:

$$Q_n = Q_x \cos \delta + Q_y \sin \delta$$

Introduzindo-se na fórmula acima as expressões (5) e (6), vem:

$$Q_n = \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos \delta + \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \sin \delta \quad (14)$$

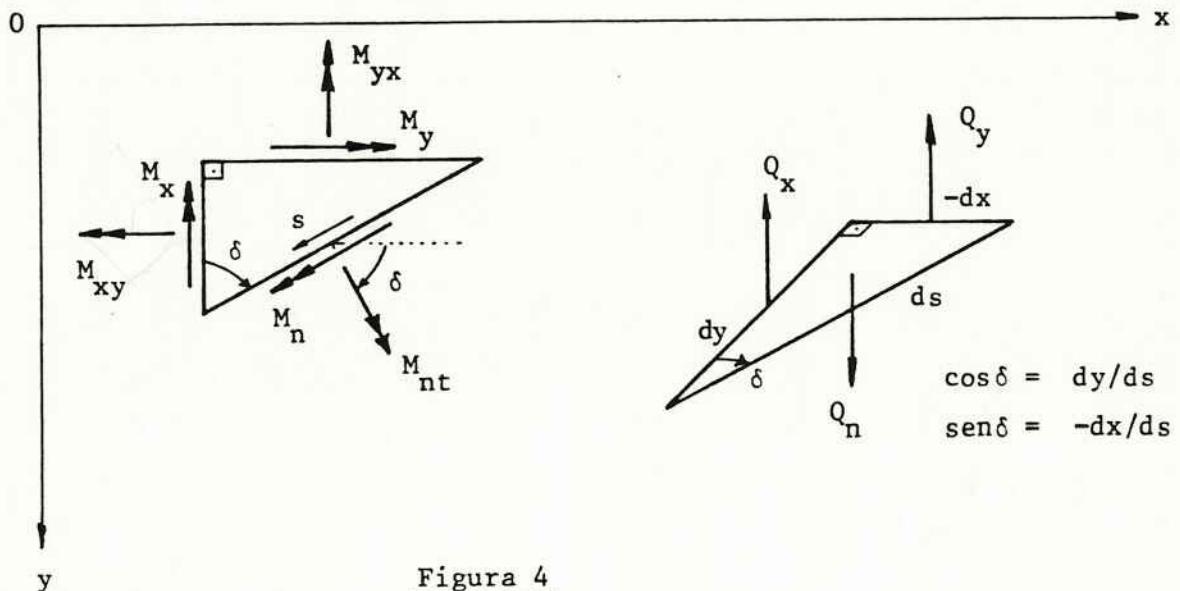


Figura 4

Ainda com referência à figura 4, o equilíbrio de momentos em torno dos eixos  $Ox$  e  $Oy$  indica, respectivamente, que:

$$M_{nt} \cos \delta - M_n \sin \delta = M_{xy} \cos \delta - M_y \sin \delta \quad (15)$$

$$M_n \cos \delta + M_{nt} \sin \delta = M_x \cos \delta - M_{xy} \sin \delta \quad (16)$$

## 2. Método dos Resíduos Ponderados

Considere-se uma função arbitrária  $\phi = \phi(x, y)$ , contínua e duas vezes derivável no domínio da placa, tal que:

$$\phi = 0 \quad \text{e} \quad (\partial \phi / \partial n) = 0 \quad \text{em } C_d$$

Das condições acima resulta, imediatamente, que em  $C_d$ :

$$(\partial \phi / \partial x) = (\partial \phi / \partial y) = 0$$

Multipliquem-se ambos os membros de (7) pela função  $\phi$ . Em seguida, por integração na placa, obtém-se:

$$\iint_{\Omega} \phi \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p \right) dx dy = 0 \quad (17)$$

Demonstra-se [1] que se a equação integral acima se cumpre para qualquer  $\phi$ , então a equação diferencial (7) será cumprida em todo e qualquer ponto da placa. A recíproca é imediata.



Suponha-se agora a existência de uma solução aproximada  $\hat{w}(x,y)$ , com a qual, fazendo-se uso das fórmulas (1), (2) e (3), se determinam  $\hat{M}_x(x,y)$ ,  $\hat{M}_y(x,y)$  e  $\hat{M}_{xy}(x,y)$ . A injeção destes últimos em (7) acarreta:

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{M}_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + p \neq 0$$

O primeiro membro da desigualdade acima representa o erro (ou resíduo) obtido ao se introduzir a solução aproximada na equação diferencial de equilíbrio.

Portanto, o primeiro membro de (17), com  $M_x = \hat{M}_x$ ,  $M_y = \hat{M}_y$  e  $M_{xy} = \hat{M}_{xy}$ , se constitui na integral de tais resíduos, ponderados pela função  $\phi$ . É óbvio que essa integral não será necessariamente igual a zero. Entretanto, considerando-se que, para a solução exata do problema, a integral em questão é de fato igual a zero, obtém-se, conforme será esclarecido mais adiante, interessantes conclusões a respeito da solução aproximada, quando se força tal integral a se anular.

Continuando, integre-se duas vezes por partes, consecutivamente, o primeiro membro de (17):

$$\begin{aligned} \bullet \int \int_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} dx dy &= \int_{C_{\sigma}} \phi \frac{\partial M_x}{\partial x} \cos \delta ds - \int \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy = \\ &= \int_{C_{\sigma}} \phi \frac{\partial M_x}{\partial x} \cos \delta ds - \int_{C_{\sigma}} \frac{\partial \phi}{\partial x} M_x \cos \delta ds + \int \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x dx dy \\ \bullet \int \int_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} dx dy &= \int_{C_{\sigma}} \phi \frac{\partial M_y}{\partial y} \sin \delta ds - \int \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy = \\ &= \int_{C_{\sigma}} \phi \frac{\partial M_y}{\partial y} \sin \delta ds - \int_{C_{\sigma}} \frac{\partial \phi}{\partial y} M_y \sin \delta ds + \int \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y dx dy \\ \bullet \int \int_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} dx dy &= \int_{C_{\sigma}} \phi \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \delta ds - \int \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dx dy = \\ &= \int_{C_{\sigma}} \phi \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \delta ds - \int_{C_{\sigma}} \frac{\partial \phi}{\partial x} M_{xy} \cos \delta ds + \int \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} M_{xy} dx dy \\ \bullet \int \int_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} dx dy &= \int_{C_{\sigma}} \phi \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \sin \delta ds - \int \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy = \\ &= \int_{C_{\sigma}} \phi \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \sin \delta ds - \int_{C_{\sigma}} \frac{\partial \phi}{\partial y} M_{xy} \cos \delta ds + \int \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} M_{xy} dx dy \end{aligned}$$

Observe-se que as integrais de contorno acima deveriam ser desenvolvidas ao longo de toda a fronteira da placa, mas como  $\phi = 0$  e  $(\partial \phi / \partial x) = (\partial \phi / \partial y) = 0$  em  $C_d$ ,



elas serão calculadas apenas em  $C_\sigma$ .

As duas últimas expressões, somadas, dão:

$$2 \iint_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} dx dy = \int_{C_\sigma} \phi \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \delta + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \sin \delta \right) ds + \\ - \int_{C_\sigma} M_{xy} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \sin \delta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \delta \right) ds + 2 \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} M_{xy} dx dy$$

Substituindo-se em (17) os resultados oriundos das integrações por partes, resulta:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} M_{xy} \right) dx dy + \\ + \int_{C_\sigma} \phi \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \cos \delta + \frac{\partial M_y}{\partial y} \sin \delta - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \delta - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \sin \delta \right) ds + \\ - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial x} (M_x \cos \delta - M_{xy} \sin \delta) ds + \\ - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial y} (M_y \sin \delta - M_{xy} \cos \delta) ds = - \iint_{\Omega} \phi p dx dy$$

Injetando-se na equação acima as expressões (14), (15) e (16), obtém-se:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} M_{xy} \right) dx dy + \int_{C_\sigma} \phi Q_n ds + \\ - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial x} (M_n \cos \delta + M_{nt} \sin \delta) ds + \\ - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial y} (M_n \sin \delta - M_{nt} \cos \delta) ds = - \iint_{\Omega} \phi p dx dy$$

Reorganizando-se os termos da expressão acima, vem:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} M_{xy} \right) dx dy + \\ + \int_{C_\sigma} \phi Q_n ds - \int_{C_\sigma} M_n \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \delta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \delta \right) ds + \\ + \int_{C_\sigma} M_{nt} \left( - \frac{\partial \phi}{\partial x} \sin \delta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \delta \right) ds = - \iint_{\Omega} \phi p dx dy$$



Sendo:

$$\vec{n} = \cos\delta \vec{i} + \sin\delta \vec{j}$$

$$\vec{t} = -\sin\delta \vec{i} + \cos\delta \vec{j}$$

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j}$$

resultam as seguintes expressões:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \text{grad } \phi \times \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos\delta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin\delta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \text{grad } \phi \times \vec{t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \sin\delta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos\delta$$

que, substituídas na equação integral anterior, produzem:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} M_{xy} \right) dx dy + \int_{C_\sigma} \phi Q_n ds + \\ - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial n} M_n ds + \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial s} M_{nt} ds = - \iint_{\Omega} \phi p dx dy$$

Integrando-se por partes, na região  $C$  do contorno, a última das integrais do primeiro membro da equação acima, vem:

$$\int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial s} M_{nt} ds = \left| \phi M_{nt} \right|_P^T - \int_{C_\sigma} \phi \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} ds$$

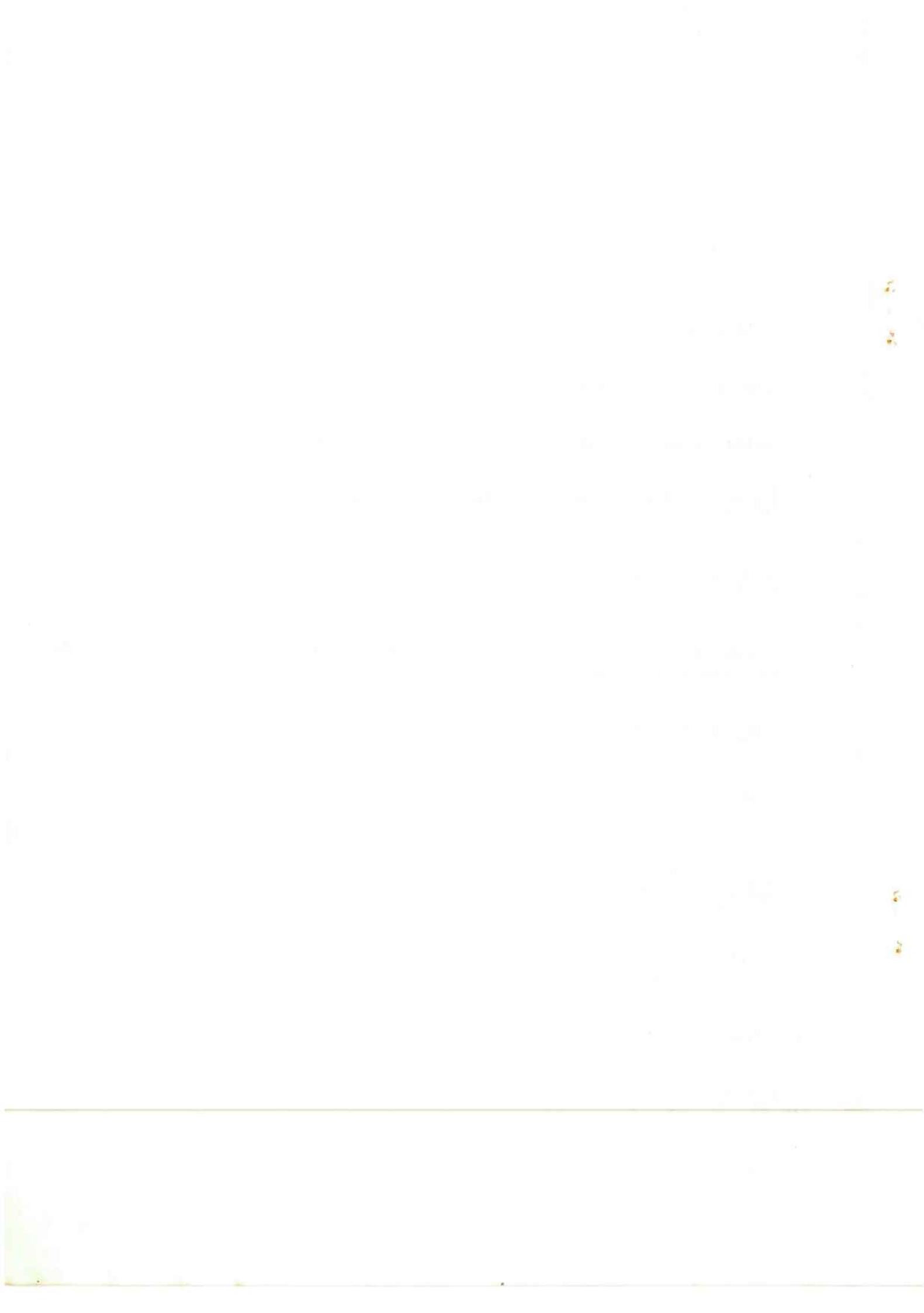
Mas  $\left| \phi M_{nt} \right|_P^T = 0$ , pois  $\phi = 0$  em  $P$  e  $T$ .

Portanto:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} M_{xy} \right) dx dy + \\ - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial n} M_n ds + \int_{C_\sigma} \phi \left( Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \right) ds = - \iint_{\Omega} \phi p dx dy$$

Em virtude de (13), a expressão anterior fica:

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} M_{xy} \right) dx dy = \\ = \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial n} M_n ds - \int_{C_\sigma} \phi V_n ds - \iint_{\Omega} \phi p dx dy$$



Finalmente, injetando-se (11) e (12) na equação anterior, consegue-se introduzir naturalmente, na formulação do problema, as condições de contorno naturais, ficando-se com:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} M_{xy} \right) dx dy = \\ & = \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \bar{M}_n ds - \int_{C_\sigma} \phi \bar{V}_n ds - \iint_{\Omega} \phi p dx dy \end{aligned} \quad (18)$$

A expressão (18) é conhecida como a forma fraca de (17), por ser mais permissiva, isto é, ela admite uma menor ordem de continuidade na determinação das funções  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ , embora exija, por outro lado, uma maior ordem de continuidade ao se definirem as funções  $\phi$ .

Até aqui não houve aproximações. Admita-se agora a seguinte solução aproximada:

$$\hat{w} = w_o + \sum_{j=1}^n c_j \phi_j \quad (19)$$

onde a função  $w_o$  é arbitrária, mas satisfaz às condições de contorno essenciais:

$$w_o = \bar{w} \quad \text{e} \quad (\partial w_o / \partial n) = \bar{\theta} \quad \text{em } C_d$$

que são assim chamadas por que devem ser forçosamente consideradas, na escolha da função de ponderação  $\phi$ , sob a forma:

$$\phi = 0 \quad \text{e} \quad (\partial \phi / \partial n) = 0 \quad \text{em } C_d$$

como foi visto.

As demais funções  $\phi_j$  são funções arbitrárias, tais que:

$$\phi_j = 0 \quad \text{e} \quad (\partial \phi_j / \partial n) = 0 \quad \text{em } C_d$$

e são conhecidas como funções coordenadas. Tanto  $\phi_j$  quanto  $w_o$  devem ser contínuas e duas vezes deriváveis em  $\Omega$ .

Galerkin propôs que as funções de ponderação  $\phi(x,y)$  fôssem as mesmas que as usadas para as funções coordenadas  $\phi_j(x,y)$ .

Em assim sendo, introduz-se a solução aproximada (19) nas expressões (1), (2) e (3), e o resultado desta operação na forma fraca (18), na qual se faz, sucessivamente, a função de ponderação  $\phi$  igual a cada uma das  $n$  funções coordenadas  $\phi_j$ . Obtém-se com tal procedimento um sistema de  $n$  equações algébricas lineares, o qual, depois de resolvido, levanta as incógnitas do problema, que são os  $n$  parâmetros  $c_j$  da solução aproximada.

A aplicação prática do Método dos Resíduos Ponderados esbarra, entretanto, em várias dificuldades. As principais são:

- a) as funções coordenadas  $\phi_j$  são definidas em todo o domínio da placa. Isso restringe a utilidade do método às placas de formato geometricamente simples, como por exemplo aquelas retangulares.



- b) mesmo nas placas de formato simples, a função  $w_0$  pode se tornar difícil de obter, se as condições de contorno essenciais forem complicadas.
- c) a introdução de condições de contorno de natureza mista (apoio livre, por exemplo) exige certos artifícios [1].
- d) os parâmetros incógnitos da solução aproximada não podem ser interpretados fisicamente. Embora não seja essa uma dificuldade matemática, merece ser levada em conta.

O Método dos Elementos Finitos surge exatamente para superar, de forma admirável, as dificuldades enunciadas. No próximo ítem serão apresentadas, resumidamente, as peculiaridades de tal método na resolução do problema das placas.

### 3. Método dos Elementos Finitos

Ambos os métodos (Galerkin e elementos finitos) seguem a mesma formulação. A única diferença reside na escolha das funções coordenadas  $\phi_j$ . A extrema versatilidade do Método dos Elementos Finitos se deve à utilização das chamadas funções de forma, ou de interpolação, cujas características não cabe aqui ressaltar, quanto o assunto já tem sido extensamente irradiado. Apenas se deve dizer que, em virtude do caráter localizado das funções de interpolação, as quais são definidas no interior dos elementos, ficam removidas as barreiras, descritas no final do ítem anterior, no tocante à aplicação prática do Método de Galerkin.

Com efeito, graças a esse caráter localizado das funções de forma, a restrição a formatos geometricamente simples se dá agora apenas para o elemento finito em si, e não mais para a placa em estudo. Assim, placas de geometria complicada não são mais difíceis de se resolver que as retangulares.

Além disso, as funções de forma, como se sabe, permitem a interpretação dos parâmetros da solução aproximada como sendo exatamente os deslocamentos (e rotações) dos chamados pontos nodais. Isso, além de tornar o método extremamente popular, faz com que o tratamento das condições de contorno essenciais (e, por extensão, da própria condição mista de apoio livre), se torne cristalinamente simples e imediato, como será visto.

Como é sabido, a solução aproximada (19) assume, no Método dos Elementos Finitos, o seguinte aspecto:

$$\hat{w} = \sum_{j=1}^{n'} (\bar{w}_j \phi_j + \bar{\alpha}_j \psi_j + \bar{\beta}_j \eta_j) + \sum_{j=n'+1}^n (w_j \phi_j + \alpha_j \psi_j + \beta_j \eta_j) \quad (20)$$

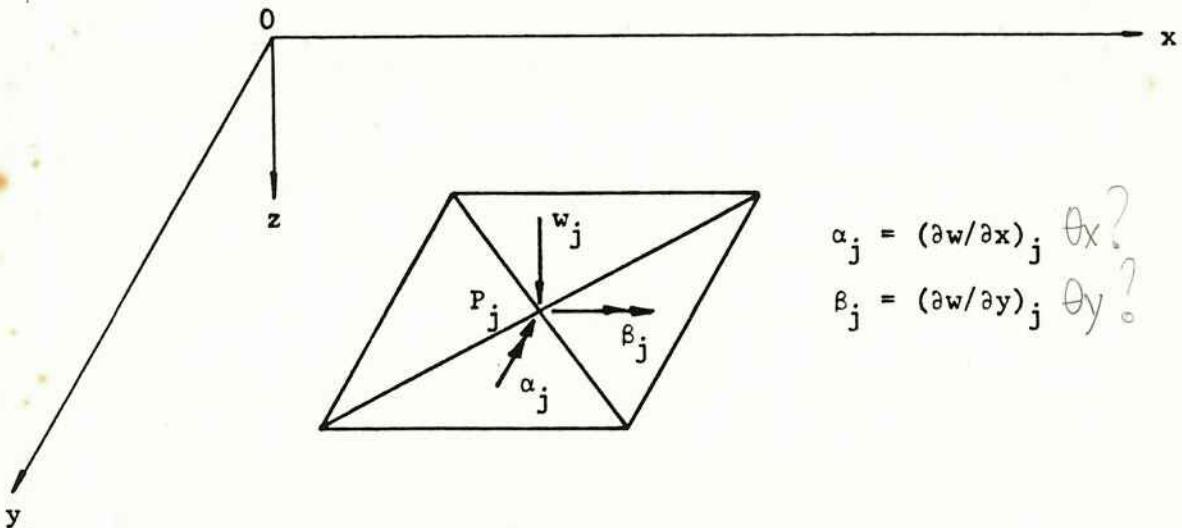
Na expressão acima,  $\bar{w}_j$ ,  $\bar{\alpha}_j$  e  $\bar{\beta}_j$  são, respectivamente, o deslocamento transversal e as rotações, conhecidos, de  $n'$  pontos nodais  $P_j$  dispostos ao longo da fronteira  $C_d$ . Por outro lado,  $w_j$ ,  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são o deslocamento e as rotações, desconhecidos, de  $n - n'$  pontos nodais  $P_j$  espalhados pelo domínio  $\Omega$  e sobre a fronteira  $C_\Omega$  (figura 5). Além disso,  $\phi_j$ ,  $\psi_j$  e  $\eta_j$  são funções de interpolação, de classe  $C_1$  [2], relativas ao nó  $P_j$ , e associadas, respectivamente, ao deslocamento e às rotações.

Na prática, entretanto, numeram-se indistintamente todos os nós, de 1 a  $n$ . Assim, (20) fica:

$$\hat{w} = \sum_{j=1}^n (w_j \phi_j + \alpha_j \psi_j + \beta_j \eta_j) \quad (21)$$

Agora,  $w_j$ ,  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  representam os parâmetros, conhecidos ou não, dos  $n$  pontos





$$\alpha_j = (\partial w / \partial x)_j \quad \theta_x ?$$

$$\beta_j = (\partial w / \partial y)_j \quad \theta_y ?$$

Figura 5 - Parâmetros nodais relativos a  $P_j$

nodais.

A interpolação (21) pode ser posta sob forma matricial:

$$\hat{w} = \underline{a}^t \underline{\xi} = \underline{\xi}^t \underline{a} \quad (22)$$

com:

$$\underline{a}^t = [ \underline{a}_1^t \dots \underline{a}_n^t ] \quad \text{e} \quad \underline{a}_j^t = [ w_j \quad \alpha_j \quad \beta_j ] \quad (23)$$

Também:

$$\underline{\xi}^t = [ \underline{\xi}_1^t \dots \underline{\xi}_n^t ] \quad \text{sendo} \quad \underline{\xi}_j^t = [ \phi_j \quad \psi_j \quad \eta_j ] \quad (24)$$

Portanto, com o uso de (22), em vez de (19), o sistema de equações obtido, em formato matricial, é o seguinte:

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{f} \quad (25)$$

onde  $\underline{K}$  é a matriz de rigidez da placa, e é dada por:

$$\begin{aligned} \underline{K} = D \iint_{\Omega} & \left[ \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^t}{\partial y^2} + v \left( \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^t}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2(1-v) \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^t}{\partial x \partial y} \right] dx dy \end{aligned} \quad (26)$$

O vetor  $\underline{f}$  é o vetor dos esforços nodais equivalentes:

$$\underline{f} = \iint_{\Omega} \underline{\xi} p \, dx dy + \int_C \underline{\xi} \bar{V}_n \, ds - \int_C \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n} \bar{M}_n \, ds \quad (27)$$

Em resumo, há  $n$  equações matriciais, das quais a  $i$ -ésima se escreve como:



$$\sum_{j=1}^n \underline{K}_{ij} \underline{a}_j = \underline{f}_i \quad (28)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \underline{K}_{ij} = D \iint_{\Omega} & \left[ \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi_j^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \xi_j^t}{\partial y^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi_j^t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \xi_j^t}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \xi_j^t}{\partial x \partial y} \right] dx dy \end{aligned} \quad (29)$$

Note-se a simetria de  $\underline{K}$ , já que:

$$\underline{K}_{ij} = \underline{K}_{ji}^t$$

Por outro lado (figura 6):

$$\underline{f}_i = \iint_{\Omega} \xi_i p \, dx dy + \int_{C_{\sigma}} \xi_i \bar{V}_n \, ds - \int_{C_{\sigma}} \frac{\partial \xi_i}{\partial n} \bar{M}_n \, ds = \left\{ \begin{array}{l} F_i^z \\ M_i^y \\ M_i^x \end{array} \right\} \quad (30)$$

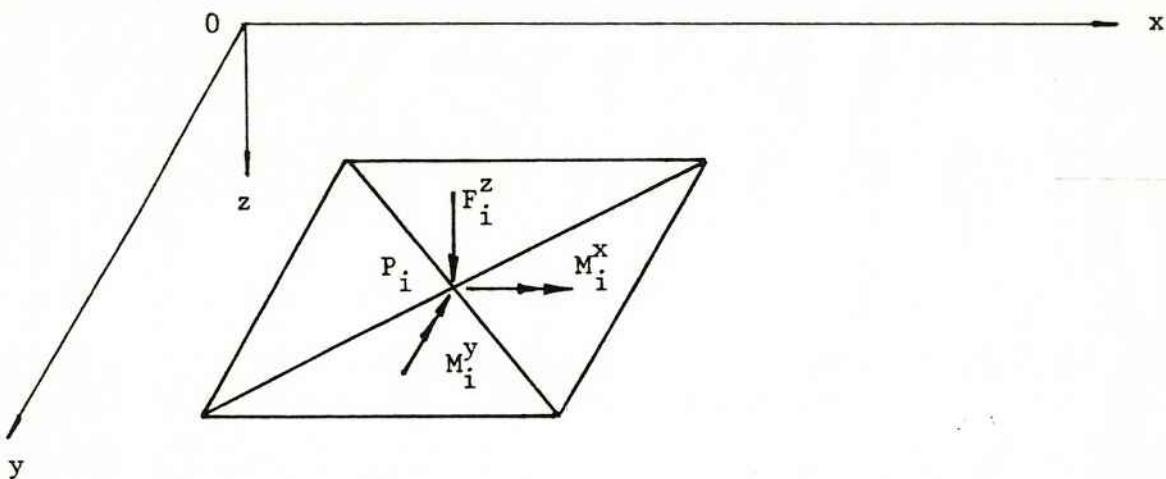


Figura 6 - Esforços nodais equivalentes aplicados ao nó  $P_i$

Cada equação matricial (28) se desdobra em três equações comuns. O produto final consiste, pois, num sistema de  $3n$  equações a  $3n$  incógnitas (estas últimas contidas no vetor  $\underline{a}$ ).

Resta apenas introduzir as condições de contorno geométricas. Reorganizando-se os graus de liberdade do problema, de modo a se colocarem em último lugar aqueles que correspondem aos deslocamentos e rotações impostos (na fronteira  $C_d$  ou numa eventual parte do contorno onde reine uma condição mista), o sistema (25) sofre a seguinte partição:



$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{aa} & \underline{\underline{K}}_{ab} \\ \underline{\underline{K}}_{ba} & \underline{\underline{K}}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{a}}_a \\ \underline{\underline{a}}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{f}}_a \\ \underline{\underline{f}}_b \end{Bmatrix} \quad (31)$$

A primeira das equações matriciais acima fornece os parâmetros nodais desconhecidos contidos em  $\underline{\underline{a}}_a$ . Em seguida, a segunda possibilita a determinação das reações de apoio contidas em  $\underline{\underline{f}}_b$ .

### BIBLIOGRAFIA

- [1] COSTA, H.B. Elementos finitos (via resíduos ponderados) na resolução do problema de segunda ordem das placas. São Paulo, EPUSP, 1986 (tese de doutoramento).
- [2] SOUZA LIMA, V. Método dos Elementos Finitos. São Paulo, EPUSP, 1980 (notas de aula).
- [3] TIMOSHENKO, S.P. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. 2ed, Tóquio, McGraw-hill, 1959.
- [4] ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. 3ed, Londres, McGraw-Hill, 1977.

