



Escola Politécnica - EPBC



31200053606

BT/PEF-8708

ANÁLISE DAS CHAPAS EM REGIME
ELASTO-PLÁSTICO PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS

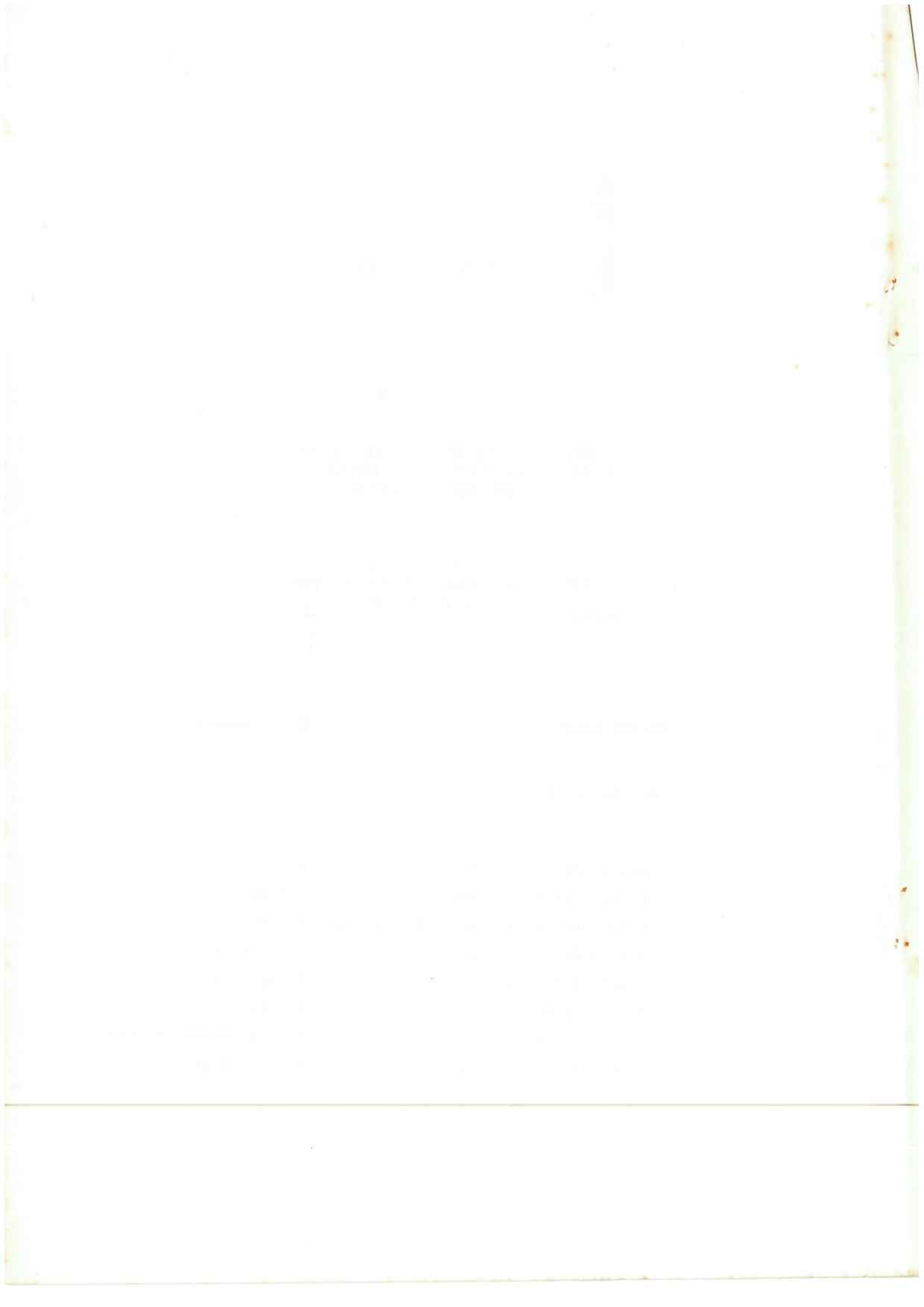
Luiz A. Cortese Diogo
Professor Assistente Doutor
(recebido em 01/06/87)

EDITOR CHEFE

C.E.N.Mazzilli

COMISSÃO EDITORIAL

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------|
| - Engenharia de Solos | W.Hachich |
| - Estruturas de Concreto | P.B.Fusco |
| - Estruturas Metálicas e de Madeira | P.B.Fusco |
| - Interação Solo-Estrutura | C.E.M.Maffei |
| - Mecânica Aplicada | D.Zagottis |
| - Métodos Numéricos | I.Q.Barros |
| - Pontes e Grandes Estruturas | J.C.Figueiredo Ferraz |
| - Teoria das Estruturas | V.M.Souza Lima |



INTRODUÇÃO

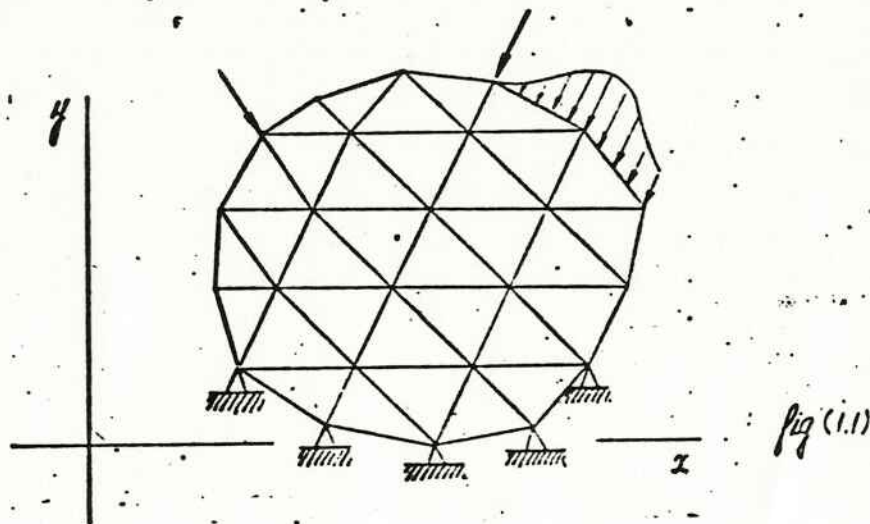
Apresenta-se, neste trabalho, a seqüência de operações que permitem a análise de chapas pelo método dos elementos finitos, quando se consideram deformações pequenas, mas que conduzem à plastificação do material. Admite-se, porém, que seja válida a adoção de relações de deformação-deslocamentos lineares.

As estruturas tridimensionais, bem como as situações de plasticidade com encruamento, podem ser analisadas com uma formulação análoga à que aqui se descreve.

1. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Considerar-se a estrutura lamina plana da fig. (1.1) discretizada em um número finito de elementos, nos quais o campo de deslocamentos, caracterizado pelas componentes u, v , é dado em função dos deslocamentos nodais por meio de funções de interpolação, ou seja

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum \phi_i(x, y) u_i \\ v(x, y) &= \sum \phi_i(x, y) v_i \end{aligned} \quad (1.1)$$



Em notação matricial, as equações acima são dadas por:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \sum N_i \underline{a}_i^e = \underline{N} \underline{a}^e \quad (1.2)$$

onde

$$N_i = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{a}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

O campo de deformações $\underline{\epsilon}$ é dado, considerando, em primeira aproximação, linearidade geométrica, em função dos deslocamentos nodais \underline{a}^e por

$$\underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L} \underline{N} \underline{a}^e = \underline{B} \underline{a}^e \quad (1.4)$$



1.1.1. The structure of the crystal lattice is shown in the diagram.

$$\text{The structure of the crystal lattice is shown in the diagram.}$$

$$\text{The structure of the crystal lattice is shown in the diagram.}$$

The structure of the crystal lattice is shown in the diagram.

The structure of the crystal lattice is shown in the diagram.



onde

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad \text{e} \quad \underline{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

A uma variação $\delta \underline{u}$ no campo de deslocamentos, corresponde uma variação $\delta \underline{\epsilon}$ no campo de deformações de modo que o trabalho virtual dos esforços externos é dado por

$$\delta \mathcal{T}_e = \sum_{S_e} \int \delta \underline{u}^T \underline{f} \, t \, ds + \sum_{A_e} \int \delta \underline{u}^T \underline{A} \, t \, da \quad (1.6)$$

onde t é a espessura,

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{A} = \begin{Bmatrix} A_x(x,y) \\ A_y(x,y) \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

enquanto que o trabalho virtual dos esforços internos é dado por

$$\delta \mathcal{T}_i = \sum_{S_e} \int \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} \, t \, ds \quad (1.8)$$

onde

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Como, na situação de equilíbrio, estas duas grandezas não iguais, pode-se escrever

$$\sum_{S_e} \int \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} \, t \, ds - \left[\sum_{S_e} \int \delta \underline{u}^T \underline{f} \, t \, ds + \sum_{A_e} \int \delta \underline{u}^T \underline{A} \, t \, da \right] = 0 \quad (1.10)$$

Considerando, na expressão acima, as equações (1.2) e (1.4), obtém-se

$$\sum_{S_e} \int \delta \underline{a}^{eT} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, t \, ds - \left[\sum_{S_e} \int \delta \underline{a}^{eT} \underline{N}^T \underline{f} \, t \, ds + \sum_{A_e} \int \delta \underline{a}^{eT} \underline{N}^T \underline{A} \, t \, da \right] = 0 \quad (1.11)$$

Os deslocamentos modais \underline{a}^e de um elemento relacionam-se ao conjunto dos deslocamentos modais \underline{a} da estrutura da seguinte maneira

$$\underline{a}^e = \underline{T}_e \underline{a} \quad (1.12)$$

Quando os deslocamentos nodais \underline{a}^e e \underline{a} se referem ao mesmo sistema de eixos, \underline{T}_e representa a matriz que fornece a posição do elemento na estrutura.

Tomando a equação (1.11), pode-se escrever

$$\underline{\delta a}^T \left[\sum_{Se} \underline{T}_e^T \int_{Se} \underline{B}^T \underline{\sigma} t ds - \left[\sum_{Se} \underline{T}_e^T \int_{Se} \underline{N}^T \underline{f} t ds + \sum_{Ae} \underline{T}_e^T \int_{Ae} \underline{N}^T \underline{A} t ds \right] \right] =$$

$$\underline{\delta a}^T \cdot \underline{\psi}(\underline{a}) = 0 \quad (1.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(\underline{a}) &= \sum_{Se} \underline{T}_e^T \int_{Se} \underline{B}^T \underline{\sigma} t ds - \left[\sum_{Se} \underline{T}_e^T \int_{Se} \underline{N}^T \underline{f} t ds + \sum_{Ae} \underline{T}_e^T \int_{Ae} \underline{N}^T \underline{A} t ds \right] \\ &= \sum_{Se} \underline{T}_e^T \int_{Se} \underline{B}^T \underline{\sigma} t ds - \underline{P} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Tendo esforços externos concentrados nos nós, deve-se adicioná-los aos termos entre colchetes da expressão acima, que representa o sistema de equações de equilíbrio entre os esforços internos, representados pelo primeiro termo à direita, e os esforços externos, representados pelos termos entre colchetes.

Tomando variações de $\underline{\psi}$, obtém-se

$$\underline{\delta \psi} = \sum_{Se} \underline{T}_e^T \int_{Se} \underline{B}^T \underline{\delta \sigma} t ds - \underline{\delta P} \quad (1.15)$$

nas regiões não plastificadas, ou quando há descarregamento nas regiões plastificadas

$$\underline{\delta \sigma} = \underline{D} \underline{\delta \epsilon} \quad (1.16)$$

onde \underline{D} é a matriz de elasticidade, dada por

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Quando há carregamento nas regiões plastificadas

$$\delta \underline{\sigma} = \underline{D}_{EP} \delta \underline{\epsilon} \quad (1.18)$$

onde \underline{D}_{EP} é a matriz de elasto-plasticidade

De um modo geral, portanto

$$\delta \underline{\psi} = \left[\sum \underline{T}_e^T \left[\int_{S_e} \underline{B}^T \underline{D}_{EP} \underline{B} t dS \right] \underline{T}_e \right] \delta \underline{a} - \delta \underline{P} = \underline{K}_T \delta \underline{a} - \delta \underline{P} \quad (1.19)$$

onde \underline{K}_T é a matriz de rigidez tangente com $\underline{D}_{EP} = \underline{D}$, quando não ocorrem deformações plásticas.

A matriz de elasto-plasticidade \underline{D}_{EP} pode ser determinada considerando que nas regiões plastificadas, onde a função de plastificação $F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ se anula, a variação $\delta \underline{\epsilon}$ é dada, quando há carregamento, por

$$\delta \underline{\epsilon} = \delta \underline{\epsilon}_E + \delta \underline{\epsilon}_P \quad (1.20)$$

onde $\delta \underline{\epsilon}_E$, correspondente à parcela elástica, é dado por

$$\delta \underline{\epsilon}_E = \underline{D}^{-1} \delta \underline{\sigma} \quad (1.21)$$

e $\delta \underline{\epsilon}_P$, correspondente à parcela plástica, deve ser normal à superfície de plastificação, de modo que

$$\delta \underline{\epsilon}_P = \lambda \underline{\Phi} \quad (1.22)$$

onde

$$\underline{\Phi} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{array} \right\} \quad (1.23)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} F(\sigma_x + \delta \sigma_x, \sigma_y + \delta \sigma_y, \tau_{xy} + \delta \tau_{xy}) &= F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) + \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} \\ &= 0 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.24)$$

ou, em notação matricial

$$\Phi^T \delta \underline{\sigma} = 0 \quad (1.25)$$

Considerando sucessivamente as equações (1.21), (1.20) e (1.22), obtém-se

$$\delta \underline{\sigma} = \underline{D} \delta \underline{\epsilon}_E = \underline{D} (\delta \underline{\epsilon} - \delta \underline{\epsilon}_p) = \underline{D} (\delta \underline{\epsilon} - \lambda \underline{\Phi}) \quad (1.26)$$

de modo que, pela equação (1.25)

$$\Phi^T \underline{D} (\delta \underline{\epsilon} - \lambda \underline{\Phi}) = 0 \quad (1.27)$$

ou seja

$$\lambda = \frac{\Phi^T \underline{D} \delta \underline{\epsilon}}{\Phi^T \underline{D} \underline{\Phi}} \quad (1.28)$$

Levando o valor de λ na equação (1.26), obtém-se

$$\delta \underline{\sigma} = \left[\underline{D} - \frac{\underline{D} \underline{\Phi} \Phi^T \underline{D}}{\Phi^T \underline{D} \underline{\Phi}} \right] \delta \underline{\epsilon} = (\underline{D} - \underline{D}_p) \delta \underline{\epsilon} = \underline{D}_{EP} \delta \underline{\epsilon} \quad (1.29)$$

Quando a função de plastificação apresenta arestas (como ocorre quando se adota, por exemplo, o critério de Tresca) onde o vetor $\delta \underline{\epsilon}_p$ é, em princípio, indeterminado, adota-se a média correspondente aos valores obtidos em cada lado da aresta.

2. O MÉTODO INCREMENTAL COM ITERAÇÕES EM CADA INCREMENTO

Considerando duas situações de equilíbrio, a equação (1.19) permite escrever

$$\underline{\delta P} = \underline{K_T} \underline{\delta a} \quad (2.1)$$

Este ponto, pode-se dividir o carregamento externo em m incrementos $\underline{\Delta P}^m$, de modo que, após a aplicação do m -ésimo incremento, os deslocamentos modais \underline{a}^m são dados por

$$\underline{a}^m = \underline{a}^{m-1} + \underline{\Delta a}^m \quad m = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

onde

$$\underline{\Delta a}^m = \underline{K_T}^{-1}(\underline{a}^{m-1}) \cdot \underline{\Delta P}^m \quad (2.3)$$

No primeiro incremento ($m=1$) os deslocamentos \underline{a}^0 são nulos e $\underline{K_T}(0) = \underline{K}_0$ é a matriz de rigidez correspondente à análise linear.

Conhecidos os deslocamentos modais \underline{a}^m , determinam-se, em cada ponto, as componentes ε_x^m , ε_y^m , γ_{xy}^m do vetor $\underline{\varepsilon}^m$, bem como o incremento

$$\underline{\Delta \varepsilon}^m = \underline{\varepsilon}^m - \underline{\varepsilon}^{m-1} \quad (2.4)$$

ao qual corresponde, no caso geral, o incremento

$$\underline{\Delta \sigma}^m = \int_0^{\underline{\Delta \varepsilon}^m} (\underline{D} - \underline{D}_p) \delta \underline{\varepsilon} = \underline{\Delta \sigma}_E^m - \underline{\Delta \sigma}_P^m \quad (2.5)$$

onde

$$\underline{\Delta \sigma}_E^m = \int_0^{\underline{\Delta \varepsilon}^m} \underline{D} \delta \underline{\varepsilon}^m = \underline{D} \int_0^{\underline{\Delta \varepsilon}^m} \delta \underline{\varepsilon}^m = \underline{D} \underline{\Delta \varepsilon}^m \quad (2.6)$$

e

$$\underline{\Delta \sigma}_P^m = \int_{r \underline{\Delta \varepsilon}^m}^{\underline{\Delta \varepsilon}^m} \underline{D}_p \delta \underline{\varepsilon}^m \quad (2.7)$$

O valor r caracteriza o ponto em que, ao longo do incremento $\underline{\Delta \varepsilon}^m$, se atinge a superfície de plastificação. Pode-se obter uma primeira estimativa r^0 de r por meio da seguinte interpolação linear

$$r^1 = - \frac{F_0}{F_1 - F_0} \quad (2.8)$$

válida nos pontos em que

$$F(\sigma_x^{m-1}, \sigma_y^{m-1}, \tau_{xy}^{m-1}) = F(\sigma_0) = F_0 < 0$$

$$F(\sigma_x^{m-1} + \Delta\sigma_{xE}^m, \sigma_y^{m-1} + \Delta\sigma_{yE}^m, \tau_{xy}^{m-1} + \Delta\tau_{xyE}^m) = F(\sigma_1) = F_1 > 0$$

Nos pontos em que $F_1 < 0$, $r^1 = 1$, enquanto nos pontos em que $F_0 = 0$ e $F_1 > 0$, $r^1 = 0$

O valor r^1 , determinado pela equação (2.8), caracteriza o ponto P^1 de coordenadas

$(\sigma_x^{m-1} + r^1 \Delta\sigma_{xE}^m, \sigma_y^{m-1} + r^1 \Delta\sigma_{yE}^m, \tau_{xy}^{m-1} + r^1 \Delta\tau_{xyE}^m)$, próximo à superfície de plastificação. Conhecendo-se,

em seguida, o ponto P , projeção de P^1 na superfície de plastificação, segundo a direção $P_0 P_1$, como

mostra a fig. (2.1). Partindo do ponto P , pode-se escrever

$$\delta F = F - F^1 = 0 - F^1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}\right)' \Delta\sigma_x^1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_y}\right)' \Delta\sigma_y^1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}\right)' \Delta\tau_{xy}^1 \quad (2.9)$$

ou, em notação matricial

$$-F^1 = \Phi^{1T} \Delta\sigma^1 \quad (2.10)$$

Quando $\Delta\sigma^1$ for proporcional a $\Delta\sigma_E^m$, isto é

$$\Delta\sigma^1 = \Delta r^1 \Delta\sigma_E^m \quad (2.11)$$

resulta

$$\Delta r^1 = - \frac{F^1}{\Phi^{1T} \Delta\sigma_E^m} \quad (2.12)$$

Portanto o ponto P , onde se inicia a plastificação tem coordenadas $(\sigma_x^{m-1} + r \Delta\sigma_{xE}^m,$

$\sigma_y^{m-1} + r \Delta\sigma_{yE}^m, \tau_{xy}^{m-1} + r \Delta\tau_{xyE}^m)$ onde

$$r = r^1 + \Delta r^1 \quad (2.13)$$

Conhecido o valor r , pode-se calcular numericamente a integral indicada na

equação (2.5) dividindo-se o integrando $(1-r) \Delta\sigma_E^m$ em p parcelas iguais. Em cada um dos pontos

P_j assim obtidos

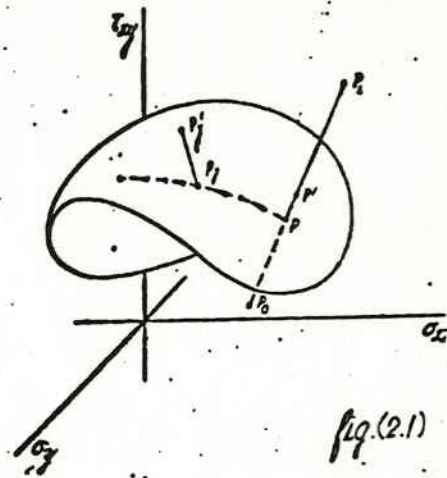


fig. (2.1)

$$\underline{\sigma}_j^m = \underline{\sigma}_{j-1}^m + \Delta \underline{\sigma}_j^m \quad (2.14)$$

onde

$$\Delta \underline{\sigma}_j^m = \Delta \underline{\sigma}_{Ej}^m + \Delta \underline{\sigma}_{Pj}^m \quad (2.15)$$

com

$$\Delta \underline{\sigma}_{Ej}^m = \frac{1-\nu}{\rho} \Delta \underline{\sigma}_E^m \quad \text{e} \quad \Delta \underline{\sigma}_{Pj}^m = \frac{1-\nu}{\rho} D_{P,j-1} \Delta \underline{\varepsilon}^m \quad (2.16)$$

O procedimento anterior, por ser aproximado, determina o ponto P_j' próximo à superfície de plasticização. O ponto P_j é determinado, então, pela projeção de P_j' na superfície de plasticização, segundo a normal à "superfície em P_j ". Assim, partindo do ponto P_j , pode-se escrever

$$\delta F = F - F' = 0 - F' = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \right)' \Delta \sigma_x' + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \right)' \Delta \sigma_y' + \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right)' \Delta \tau_{xy}' \quad (2.17)$$

ou, em notação matricial

$$-F' = \Phi'^T \Delta \underline{\sigma}' \quad (2.18)$$

Como $\Delta \underline{\sigma}'$ é proporcional a Φ' , isto é,

$$\Delta \underline{\sigma}' = k \Phi' \quad (2.19)$$

resulta

$$k = - \frac{F'}{\Phi'^T \Phi'} \quad (2.20)$$

Com as operações anteriores obtêm-se as componentes $\sigma_x^m, \sigma_y^m, \tau_{xy}^m$ do vetor $\underline{\sigma}^m$ com o qual pode-se calcular o resíduo

$$\underline{Q}^m = \underline{\psi}^m - \sum_{Se} \underline{t}^T \int_{Se} \underline{B}^T \underline{\sigma}^m t ds - \underline{P}^m \quad (2.21)$$

onde

$$\underline{P}^m = \sum_1^m \Delta \underline{P}^m \quad (2.22)$$

Neste trabalho definiu-se o resíduo da seguinte maneira

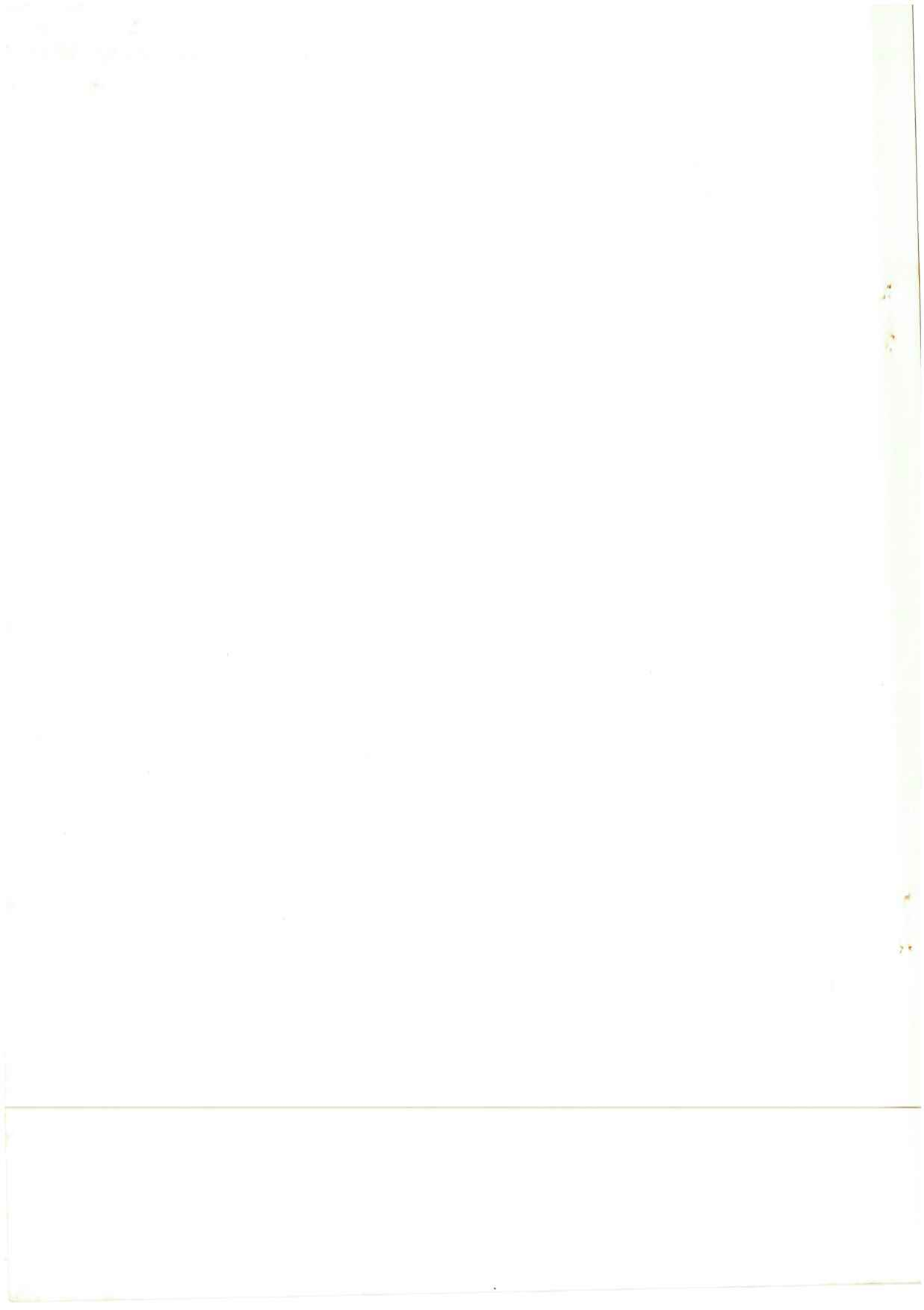
$$\underline{R}^m = \frac{\underline{P}^{mT} \cdot \underline{\psi}^m}{\underline{P}^{mT} \cdot \underline{P}^m} \quad (2.23)$$

Se o valor mínimo obtido for maior, que o resíduo especificado (muito pequeno, 10^{-4}),
procede-se a iterações. Num a iteração que é a i , tem-se.

$$\underline{a}_i^m = \underline{a}_{i-1}^m + \Delta \underline{a}_i^m \quad (2.24)$$

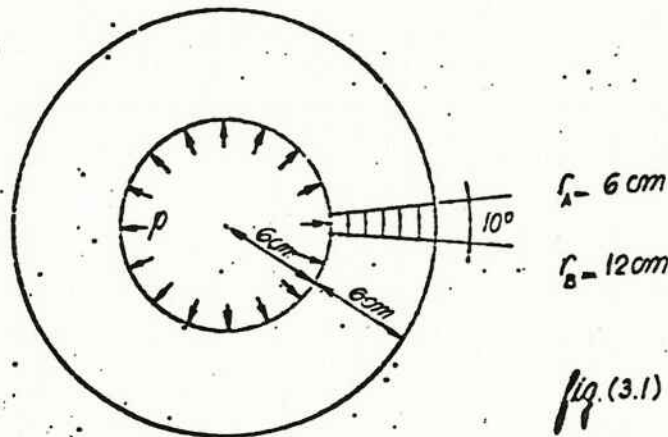
onde

$$\Delta \underline{a}_i^m = - \underline{K}_T^{-1}(\underline{a}_{i-1}^m) \cdot \underline{\psi}(\underline{a}_{i-1}^m) \quad (2.25)$$



3. EXEMPLO

Neste item, apresentamos os resultados obtidos, com o método descrito no item anterior, na análise do cilindro de parede espessa da fig. (3.1) de material elasto-plástico de módulo de elasticidade $E = 2.100 \text{ t/cm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$ e tensão de escoamento $\sigma_e = 240 \text{ t/cm}^2$.



A discretização é feita com elementos isoparamétricos de 8 nós, do tipo indicado na fig. (3.2), em que as funções de interpolação, correspondentes aos nós situados nos vértices são dadas por

$$\Phi_i(r, A) = 1/4 (1 + r_0)(1 + A_0)(r_0 + A_0 - 1)$$

onde

$$r_0 = r / r_i \quad e \quad A_0 = A / A_i$$



fig. (3.2)

enquanto que as correspondentes aos nós centrais são dadas por

$$\Phi_i(r, A) = 1/2 (1 - r^2)(1 + A_0) \quad \text{para } r_i = 0$$

$$\Phi_i(r, A) = 1/2 (1 - A^2)(1 + r_0) \quad \text{para } A_i = 0$$

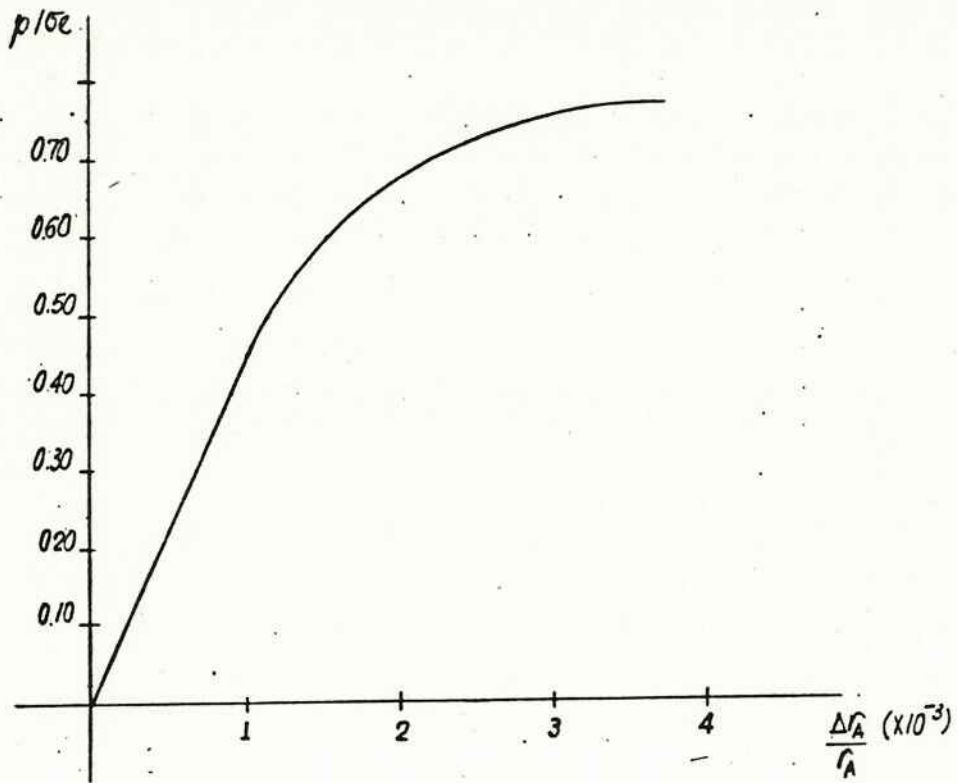
Adota-se o critério de Von Mises, em que a função de plastificação é dada por

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_e^2$$

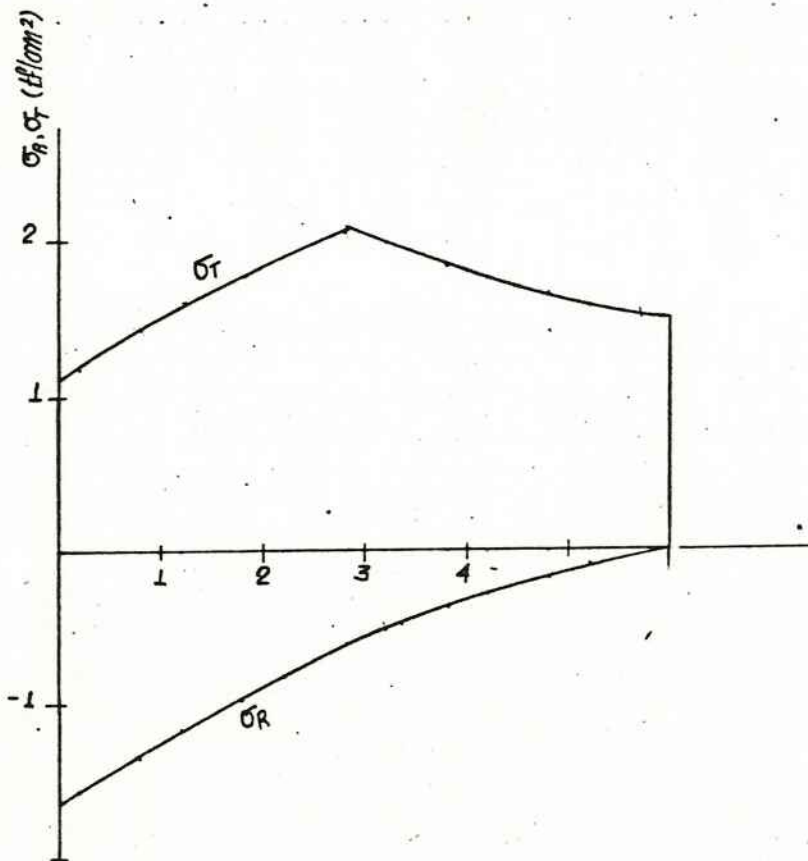
onde σ_e é a tensão de escoamento do material

Na obtenção da matriz de rigidez de cada elemento, emprega-se o método de Gauss de integração numérica, com 4 pontos de integração, nos quais se calculam, também, as tensões

DESLOCAMENTO RADIAL DA FACE INTERNA



TENSÕES RADIAIS E TANGENCIAIS PARA $p/\sigma_e = 0.70$



REFERÊNCIAS

R.1. ZIENKIEWICZ, O.C.

"The finite element method in engineering science."

MCGRAW-HILL, 3rd ed., 1977

R.2. NAYAK, G.C. e ZIENKIEWICZ, O.C.

"Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening."

INTERNACIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, VOL 5, 1972.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.