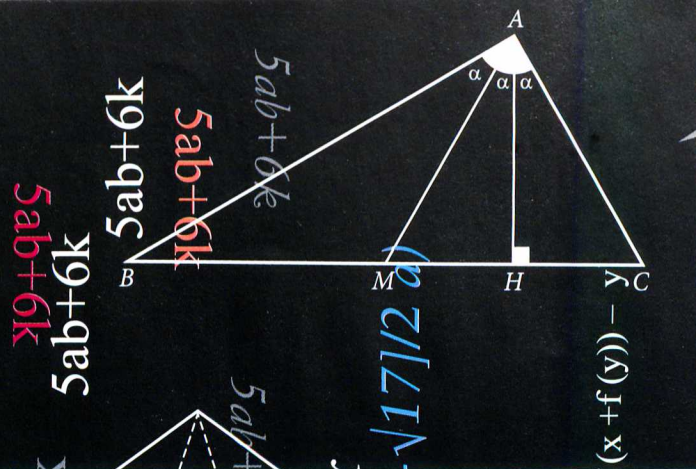




RESPONSÁVEIS

EDUARDO TENGAN, ÉLVIA MUREB SALLUM E

ANTÔNIO DE PÁDUA FRANCO FILHO

ENVIE SUAS SOLUÇÕES PARA RPM – PROBLEMAS

IME/USP – CIDADE UNIVERSITÁRIA

RUA DO MATÃO, 1010, BLOCO B, SALA 105

PRO
BLE
MAS

O professor Eduardo Tengan está se afastando da seção *Problemas* devido a uma viagem para pós-doutorado. Agradecemos a importante colaboração dele à RPM e lhe desejamos sucesso nessa nova fase. Damos as boas-vindas ao professor Antônio de Pádua Franco Filho, que passa a ser um dos responsáveis pela seção a partir deste número da RPM.

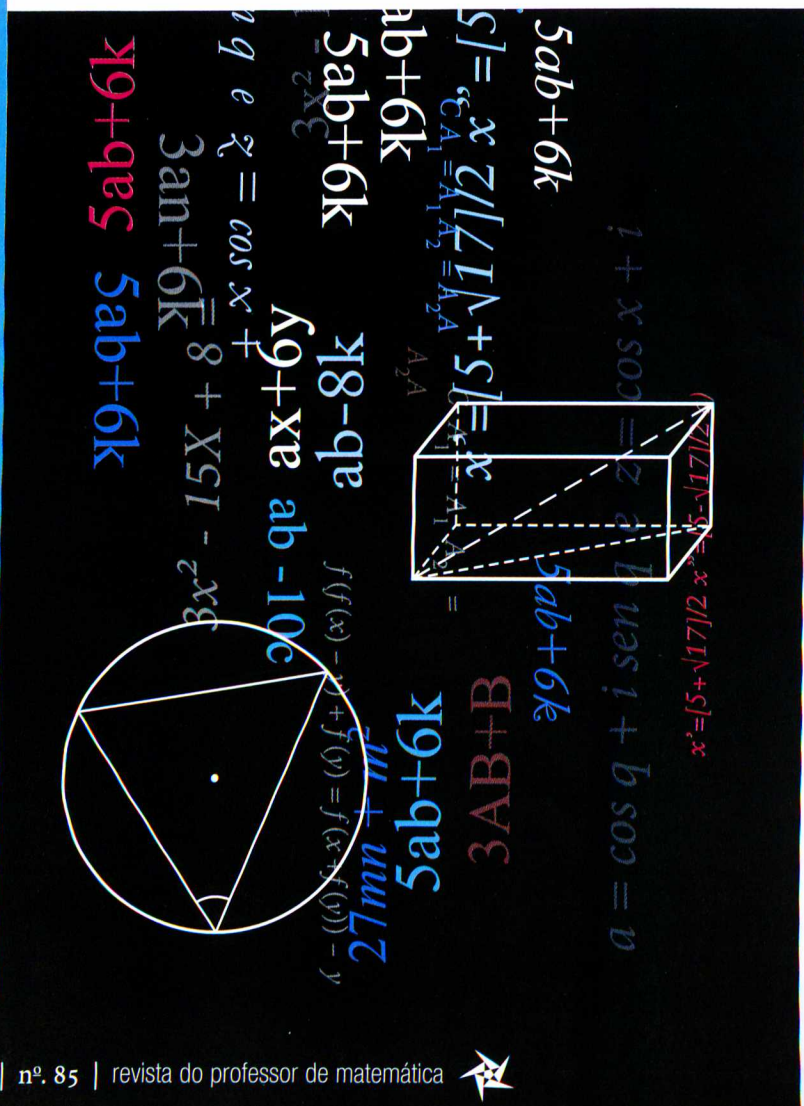
As soluções dos problemas 371 a 375 serão corrigidas apenas se enviadas até 20 de abril de 2015.

371

Mostre que, se m e n são inteiros tais que 1999 divide $m^2 + n^2$, então 1999 divide m e n .

372

Dado um ângulo $\widehat{BAC}$ e um ponto D no seu interior, construir, com régua e compasso, um segmento de reta EF com extremidades nos lados do ângulo, passando pelo ponto D e tal que $ED = DF$. Descrever e justificar o procedimento.



373

Mostre que, para todo inteiro positivo n , existe uma potência de 7 cuja representação decimal contém pelo menos n zeros sucessivos.

374

Sejam um cone de revolução com uma esfera inscrita tangente à base do cone e um cilindro circular reto circunscrito à esfera com uma base contida na base do cone.

a) Se V_1 é o volume do cone e V_2 é o volume do cilindro, mostre que $V_1 \neq V_2$.

b) Achar o menor $k > 0$ tal que $V_1 = k V_2$ quando variamos o ângulo entre uma geratriz do cone e o diâmetro correspondente da base do cone.

375

Prove que a soma dos ângulos das faces que incidem em cada vértice de um tetraedro mede 180° se, e somente se, as faces são triângulos dois a dois congruentes.

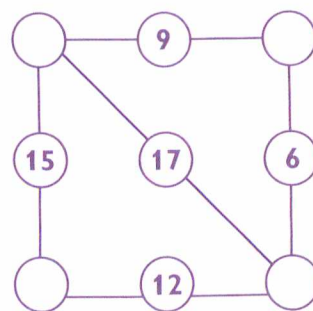
PROBLEMINHAS

1 Renato tem 30 melancias, Leandro tem 18 melancias e Marcelo tem 24 jacas. Ao contrário de Leandro e Renato, Marcelo não gosta de jaca. Por outro lado, os três gostam de melancia. Os três fazem então um acordo: Marcelo dá as suas 24 jacas para Leandro e Renato, e as melancias de Leandro e Renato são divididas igualmente entre os três, ou seja, 16 para cada. Qual é a divisão justa de jacas entre Renato e Leandro?

2 Sem levantar o lápis do papel, desenhe seis linhas retas que passem por todos os dezesseis pontos da figura ao lado.



3 Encontre uma maneira de colocar números naturais nos círculos de maneira que as somas ao longo de qualquer linha sejam sempre as mesmas. Há mais de uma solução?



(Probleminhas tirados do Banco de Questões 2014 da OBMEP)
Respostas na página 45.

SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NA RPM 83

361

Se x é um número real, seja $\lfloor x \rfloor$ o piso de x , ou seja, o maior inteiro n tal que $n \leq x$. Por exemplo, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ e $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

a) Mostre que, se n é um inteiro positivo, então

$$\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor = n - 1.$$

b) Considere os conjuntos de números naturais

$$A = \left\{ \left\lfloor n\sqrt{2} \right\rfloor \mid n = 1, 2, 3, 4, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \left\lfloor n(2 + \sqrt{2}) \right\rfloor \mid n = 1, 2, 3, 4, \dots \right\}$$

Mostre que A e B formam uma *partição* do conjunto dos inteiros positivos, isto é, mostre que cada inteiro positivo pertence a exatamente um dos conjuntos A ou B .

SOLUÇÃO

a) Seja n um número inteiro positivo.

Se $\left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor = k$, então $\frac{n}{\sqrt{2}} = k + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$; como

