

# Influência do Fator de Relaxação na Convergência do Método de Newton-Raphson na Modelagem por Elementos Finitos

Bruno Amado Rodrigues Filho

*Instituto de Pesos e Medidas do Estado de São Paulo  
R. Santa Cruz - n. 1922 -04122-002 - São Paulo/SP Brasil*

Viviane Cristine Silva

*LMAG – PEA – EPUSP – Av. Prof. Luciano Gualberto,  
trav. 3 - n. 158 - 05508-900 - São Paulo/SP – Brasil*

**Resumo**—O presente trabalho tem como objetivo investigar a convergência do método de Newton-Raphson (NR) utilizado na resolução de sistemas não lineares gerados pela aplicação do método de elementos finitos em dispositivos eletromagnéticos que possuem características não lineares. Para acelerar a convergência do método de Newton-Raphson são utilizadas modelagens que visam obter um fator de relaxação ótimo. Entende-se como fator de relaxação ótimo o valor para o fator de relaxação minimizar o número de iterações necessárias para a convergência do método de Newton-Raphson. Assim, para a otimização do fator de relaxação são utilizados os métodos de busca linear e o método das aproximações quadráticas sucessivas, também conhecido como método de Brent.

**Palavras chave:** Elementos Finitos, Fator de Relaxação, Newton-Raphson, Métodos Numéricos.

## I. INTRODUÇÃO

A resolução de sistemas não lineares gerados pelo método dos elementos finitos aplicado à modelagem de dispositivos constituídos de materiais ferromagnéticos, envolve o método de Newton-Raphson (NR) ou o método das aproximações sucessivas, sendo o primeiro a melhor alternativa, devido à sua convergência quadrática próxima à solução. A demanda computacional do método é elevada, tendo em vista que a solução de um sistema linear é requerida em cada iteração. Nesse caso, muitas vezes faz-se necessária a utilização de um fator de relaxação, que ao ser aplicado ao método de NR possui a propriedade de acelerar a convergência do método.

Entretanto, um fator de relaxação inapropriado pode tornar a convergência do método de NR mais lenta. Desse modo, este trabalho apresenta duas técnicas para obtenção do valor ótimo para o fator de relaxação, de forma a acelerar o processo de convergência.

Os métodos de Brent, ou método das aproximações sucessivas, e o método de busca linear (*line search*) são dois exemplos de técnicas utilizadas para se obter o fator de relaxação que minimizam o resíduo gerado pela formulação do método de Newton-Raphson [3][4].

## II. APLICAÇÃO DO NEWTON-RAPHSON

A aplicação do método dos elementos finitos na Magnetostática bidimensional com a presença de materiais ferromagnéticos conduz a um sistema de equações não linear a ser resolvido [1]. A forma fraca da formulação de Galerkin em duas dimensões para a Magnetostática é dada a seguir:

$$\iint_{\Omega} (\nabla N_i)^T (v \nabla \tilde{A}) d\Omega^e = \iint_{\Gamma} N_i (v \nabla \tilde{A} \cdot \vec{n}) d\Gamma + \iint_{\Omega^e} N_i J d\Omega^e \quad (1),$$

sendo  $A$  o potencial vetor magnético,  $\Omega$  o domínio bidimensional,  $\Gamma$  a sua fronteira,  $J$  a densidade de corrente elétrica,  $v$  a relutividade magnética do meio e  $N_i$  funções de forma.

Partindo-se de (1), chega-se ao sistema de equações algébricas dado por (2), como segue:

$$SA = I \quad (2).$$

A formulação tradicional do método de Newton-Raphson baseia-se na obtenção do resíduo  $R$ , conforme (3):

$$R = SA - I \quad (3).$$

Expandindo-se (3) em série de Taylor e truncando-se os termos de ordem superior a dois, tem-se:

$$R(A_{k+1}) = R(A_k) + \frac{\partial R(A_k)}{\partial A} \Delta A_k \quad (4),$$

em que

$$P_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial A_j} = S_{ij} + \sum_{k=1}^3 S_{ik} \cdot \frac{\partial v}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial A_j} A_k \quad (5),$$

Em (5),  $P(A_k)$  representa a matriz jacobiana do sistema, que é função de  $\partial v / \partial B^2$  e do potencial vetor magnético.

O resíduo  $R$  é calculado de acordo com (6):

$$R_j = \sum_{k=1}^3 v S_{jk} A_k - I_i \quad (6),$$

sendo que:

$$A_{k+1} = A_k + \Delta A \quad (7).$$

Dessa forma, o método iterativo de Newton-Raphson consiste na determinação do  $k+1$ -ésimo elemento do vetor potencial magnético  $A$ .

O fato de relaxação consiste em um coeficiente  $\alpha$  a ser inserido em (7), de forma a melhorar a convergência do método, conforme (8).

$$A_{k+1} = A_k + \alpha \Delta A_k \quad (8)$$

Com esse fator, espera-se que o método possa convergir mais rapidamente, reduzindo-se assim o custo computacional. Serão apresentadas a seguir duas técnicas para a determinação desse fator: Métodos da busca linear e de Brent.

### III. MÉTODO DA BUSCA LINEAR

O objetivo é obter o fator de relaxação  $\alpha$  que seja o ótimo a cada iteração do método de Newton-Raphson.

Verifica-se que existe uma relação entre  $\alpha$  e a norma do resíduo  $R$  ao quadrado, dado por (3), de forma que o melhor valor de  $\alpha$  seria aquele que minimizaria a norma do resíduo [3]. Para tanto, faz-se necessário então ajustar uma função objetivo,  $W$ , a essa relação e determinar o seu mínimo.

A busca linear (*line search*) consiste em se ajustar uma reta à derivada da função objetivo,  $W$ . Dessa forma, em casos em que a relação entre norma do resíduo e fator de relaxação é quadrática, a obtenção do mínimo torna-se exata, e nos casos em que essa relação não é exatamente quadrática, este ajuste ainda assim obtém uma boa precisão [3]. Então, dada a aproximação:

$$\frac{\partial W^{(k+1)}}{\partial \alpha^k} = f(\alpha) = a\alpha + b \quad (9),$$

sendo  $a$  o coeficiente angular e  $b$  o coeficiente linear da reta  $f(\alpha)$ , o mínimo da função  $f(\alpha)$  é dado por:

$$\alpha_{\min} = -\frac{b}{a} \quad (10).$$

O cálculo da norma do resíduo em função de  $\alpha$ , cuja forma geral é dada por (2), se escreve para cada iteração como:

$$\|R\|_{(k+1)}^2 = (\|I\| - \alpha_k \|SA_k\|)^2 \quad (11).$$

A Figura 1 a seguir ilustra o Método de Busca Linear para a otimização do fator de relaxação. Nela verifica-se também a aproximação linear para a derivada da função objetivo,  $W$ , em que  $\alpha_{\text{aprox}}^k$  é a aproximação obtida para o mínimo de  $W$  e  $\alpha_{\text{opt}}^k$  é o valor ótimo para o mínimo.

Outra vantagem associada à aproximação linear se deve ao fato de, para se obter a reta referente à derivada de  $W$ , são necessários apenas dois pontos, o que torna o método eficiente do ponto de vista de tempo de processamento.

Na Figura 1 pode-se também visualizar a obtenção da derivada da função objetivo  $W$ , objeto da minimização.

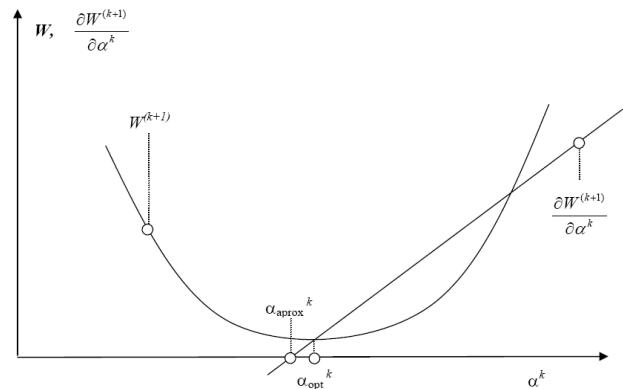


Figura 1. Ilustração do método de aproximação linear para uma função objetivo  $W$ .

### IV. MÉTODO DE BRENT

O Método de Aproximações Quadráticas Sucessivas, ou Método de Brent, tem a mesma premissa do Método da Busca Linear, porém proporciona melhores resultados quando a dependência  $\alpha \times \|R^2\|$  não é quadrática [4]. Este método utiliza o algoritmo de Brent de forma a se obter o mínimo da função  $\alpha \times \|R^2\|$ . Dessa forma, evita-se o cálculo de derivadas, o que diminui o tempo de processamento.

O princípio do método consiste em se calcular três pontos da curva  $\Gamma$ , tal que  $\Gamma = \alpha \times \|R^2\|$ . Tem-se assim um conjunto  $\{(a_1, \|R^2\|_1), (a_2, \|R^2\|_2), (a_3, \|R^2\|_3)\}$  e ajusta-se um polinômio quadrático do tipo  $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$  a estes pontos, sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes reais de ajuste do polinômio  $f(\alpha)$ . Determina-se então o mínimo dessa parábola  $(a_4, \|R^2\|_4)$ . O passo seguinte consiste em comparar, dentre os quatro conjuntos de pontos obtidos, o maior resíduo e descartá-lo. Tem-se novamente um conjunto de três pontos e em seguida é ajustada uma nova parábola. Esse processo iterativo se estende até se obter a norma do resíduo ao quadrado igual a zero ou menor do que uma tolerância previamente estipulada.

A Figura 2 mostra o processo de aproximações por parábolas até o mínimo da função  $\Gamma$  ser obtido.

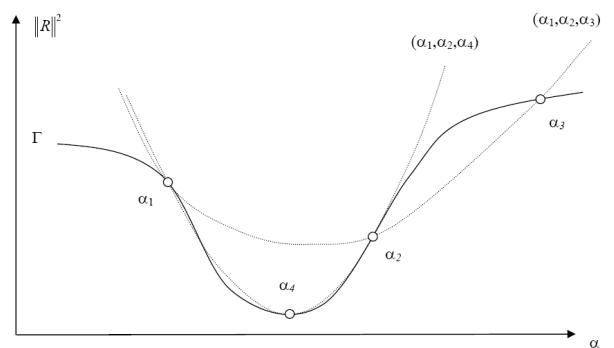


Figura 2. Processo de minimização por ajustes de funções quadráticas sucessivas.

## V APLICAÇÃO

O dispositivo utilizado como caso teste para aplicação dos métodos apresentados consiste em um motor de relutância chaveado [5]. Foi realizada uma simulação magnetostática do mesmo, com intuito de se analisar o desempenho numérico das técnicas apresentadas.

Os parâmetros geométricos e dimensionais do motor, bem como o modelo geométrico para simulação são mostrados na Figura 3. Os valores dos respectivos parâmetros são dados na Tabela 1.

A malha de elementos finitos gerada pode ser visualizada na Figura 4.

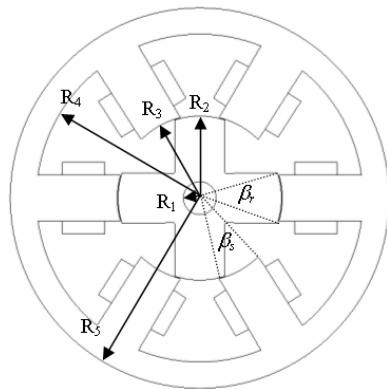


Figura 3. Parâmetros geométricos do motor de relutância chaveado.

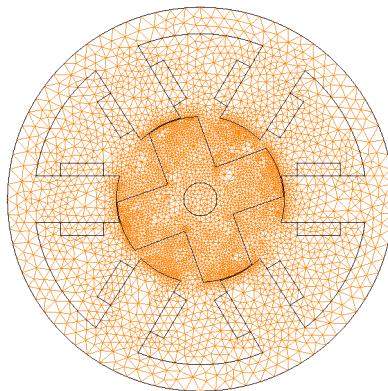


Figura 4. Malha de elementos finitos do problema (9920 elementos triangulares de primeira ordem e 5001 nós).

TABELA I - DADOS DIMENSIONAIS DO MOTOR DE RELUTÂNCIA CHAVEADO

$R_1 = 5\text{mm}$	$\beta_r = 360$
$R_2 = 25\text{mm}$	$\beta_s = 320$
$R_3 = 25,25\text{mm}$	Espiras = 150
$R_4 = 50\text{mm}$	Entreferro = 0,25mm
$R_5 = 58\text{mm}$	Comprimento do pacote = 50mm

Foi imposta condição de contorno de Dirichlet ( $A = 0$ ), no perímetro externo do estator ( $R_5$ ) e uma densidade de corrente de  $6,0 \text{ A.e/mm}^2$  foi imposta à bobina. O rotor e o estator são constituídos de aço S45C [3].

## VI RESULTADOS

Para a resolução do sistema linear de equações utilizou-se o ICCG (*Incomplete Cholesky Conjugated Gradient*) sendo o critério de parada dado por  $\|\Delta A^2\|/\|A^2\| < 10^{-6}$ .

Para o método de Newton-Raphson a convergência é considerada alcançada quando a condição  $\|\Delta A^2\|/\|A^2\| < 10^{-5}$  for satisfeita.

Assim, para cada técnica utilizada de forma a obter-se o fator de relaxação obteve-se valores distintos no número de iteração para o método de NR.

A Tabela II a seguir apresenta os resultados dos desempenhos do Método de N-R em cada um dos métodos de busca apresentados.

TABELA II - COMPARAÇÃO ENTRE OS DESEMPENHOS DOS MÉTODOS DE BRENT, BUSCA LINEAR E SEM RELAXAÇÃO

Método de Relaxação	Número de iterações	Tempo de processamento (s)
Nenhum	143	793
Busca Linear	48	359
Brent	62	431

Pela Tabela II observa-se a vantagem de se adotar algum método de relaxação, notando que o custo computacional dos mesmos para as minimizações é desprezível face ao ganho que proporcionam.

Assim como a diferença entre o número de iterações necessárias para o critério de convergência ser alcançado, o valor obtido pelo fator de relaxação para os métodos de busca linear e método de Brent são distintos.

Os valores obtidos para o fator de relaxação para cada iteração do método de Newton-Raphson podem ser visualizados na Fig. 5.

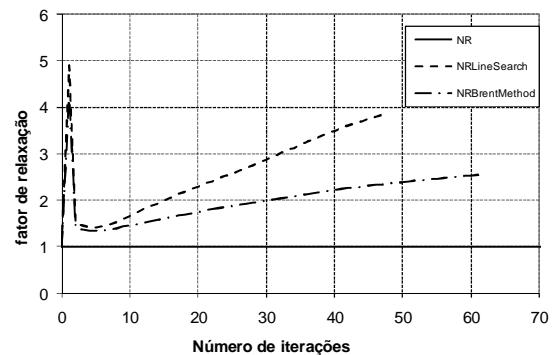


Figura 5. Valor do fator de relaxação em cada um dos métodos de relaxação.

Nota-se na Fig. 5 que, tanto no método de Brent como no da Busca Linear, o valor de  $\alpha$  sofre uma grande oscilação nas iterações iniciais, devido aos altos valores de  $A$ , obtidos com o método de Newton-Raphson.

A Fig. 6 apresenta a evolução do método de Newton-Raphson em sua variante tradicional e utilizando os métodos de otimização do fator de relaxação.

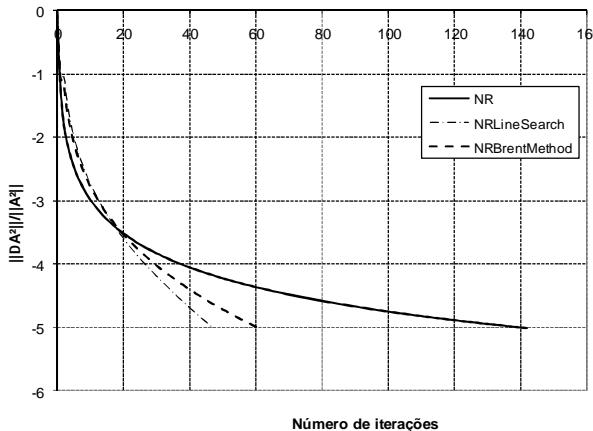


Figura 6. Valor Evolução das iterações do método de Newton-Raphson e suas variantes em função da convergência.

Tendo em vista que os métodos utilizados para a obtenção do fator de relaxação se baseiam na minimização de  $\|R^2\|$  em função de  $\alpha$ , a Fig. 7 apresenta a relação entre  $\|R^2\|$  e  $\alpha$  para a iteração número 17 do método de NR, utilizando-se busca linear.

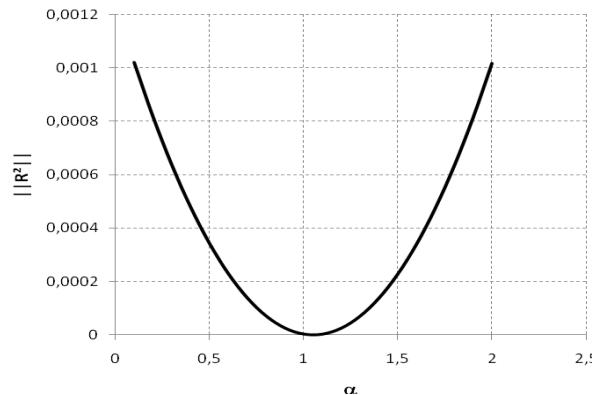


Figura 7. Relação entre o fator de relaxação e  $\|R^2\|$  para a iteração 17 do método de NR utilizando busca linear.

As linhas de campo obtidas para o motor de relutância chaveado simulado em regime magnetostático podem ser visualizadas na Fig. 8.

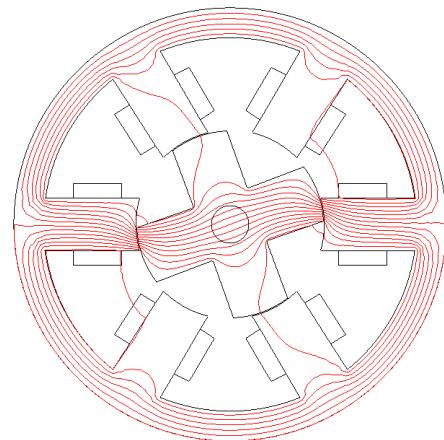


Figura 8. Relação entre o fator de relaxação e  $\|R^2\|$  para a iteração 17 do método de NR utilizando busca linear.

## VII CONCLUSÃO

De forma a se obter a otimização do fator de relaxação para o método de Newton-Raphson, visando a aceleração do método, ou seja, atingir o critério de parada em um menor número de iterações e menor tempo, foram apresentadas duas técnicas: o Método de Brent, ou de aproximações quadráticas sucessivas, e o Método da Busca Linear. Ambos os métodos têm como base a relação entre o fator de relaxação e a norma quadrática do resíduo  $R$  do método de NR.

Verificou-se que com a utilização de um desses métodos o número de iterações do método de NR reduz-se significativamente, sobretudo no caso do Método da Busca Linear. Ainda que esses métodos impliquem um custo relativo ao processo de minimização do resíduo a cada iteração, os ganhos totais em tempo de processamento devido à redução drástica no número de iterações compensam aquele custo adicional.

## REFERENCIAS

- [1] J. P. A. Bastos, N. Sadowski, *Electromagnetic Modeling by Finite Element Method*, New York. Marcel Dekker AG, 2003, pp. 256-262.
- [2] C. Neagone, F. Ossart, "Analysis of convergence in non-linear magnetostatic finite element problems", *IEEE Trans. On Magnetic*, vol 30, pp. 2865-2868 no. 5, september 1994.
- [3] K. Fujiwara, Y. Okamoto, A. Kameari, "The Newton-Raphson method accelerated by using a line search – Comparison between energy functional and residual minimization", *IEEE Trans. J. Magn.*, vol 41, no 5, p. 1724-1727, May 2005.
- [4] C. S. Koh, J. S. Ryu, K. Fujiwara, "Convergence Acceleration of the Newton-Raphson method using successive quadratic function approximation of residual", *IEEE Trans.J. Magn.*, vol 42, no 4, p. 611-614, April2006.
- [5] N. M. Abe, *Acoplamento Circuito Elétrico – elementos finitos em regime transitório utilizando a metodologia de Dommel*. 1997, p. 76 Tese (doutorado) – Escola Politécnica. Universidade de São Paulo. São Paulo 1997.
- [6] B. A. Rodrigues Filho, *Estudo da convergência no método de elementos finitos aplicado a dispositivos eletromagnéticos não lineares*. 2007, Dissertação (mestrado) – Escola Politécnica. Universidade de São Paulo. São Paulo 2007.