ISSN 2177 - 9309 https://doi.org/10.51359/2177-9309.2023.259612

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana

Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

Uma avaliação do desempenho de licenciandos em Matemática na classificação de sequências numéricas a partir de suas representações gráficas

An evaluation of prospective Mathematics teachers' performance in classifying numerical sequences from its graphical representations

William Vieira
Doutor em Educação Matemática
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos – Guarulhos – Brasil
wvieira@ifsp.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5592-891X

Vera Helena Giusti de Souza
Doutora em Educação Matemática
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – São Paulo – Brasil
vhgiusti@ime.usp.br
https://orcid.org/0000-0003-0705-0839

Roberto Seidi Imafuku
Doutor em Educação Matemática
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos – Guarulhos – Brasil
roberto.imafuku@ifsp.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-4047-9533

Resumo

Neste artigo apresentamos uma análise das respostas dadas por um grupo de licenciandos em Matemática para uma questão que envolve a classificação de sequências numéricas representadas graficamente, ao final das disciplinas Sequências e Séries (6º semestre) e Introdução à Análise Real (8º semestre). Entrevistas semiestruturadas com docentes dessas disciplinas e a leitura de pesquisas na área orientaram a elaboração das questões propostas aos participantes. A interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais e o desenvolvimento de processos do Pensamento Matemático Avançado são as ideias teóricas que embasam nossas análises. Os dados revelam que os participantes, ao final da disciplina Introdução à Análise Real, continuam com dificuldades em reconhecer algumas características de sequências numéricas, tais como ser crescente (ou decrescente), limitada, monótona ou possuir limite, quando representadas graficamente, e em relacioná-las à convergência de sequências.

Palavras-chave: Interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais; Pensamento matemático avançado; Ensino de Cálculo; Ensino de Análise Real; Formação inicial de professores.

Abstract

In this article, we analyze the answers given by a group of undergraduate students in Mathematics to a question involving classification of graphically represented numerical sequences, at the end of disciplines Sequences and Series (6th semester) and Introduction to Real Analysis (8th semester). Semi-structured interviews with professors of these disciplines and reading of research done in this area guided the design of the proposed questions to the participants. The interaction of algorithmic, intuitive and formal aspects and the development of Advanced Mathematical Thinking processes are the theoretical ideas that support our analyses. The data reveal that participants, at the end of the Introduction to Real Analysis course, continue to have difficulties in recognizing some characteristics of numerical sequences, such as being increasing (or decreasing), limited, monotonous or having a limit, when represented graphically, and in relating them to the convergence of sequences.

Keywords: Algorithmic, intuitive and formal aspects interaction; Advanced mathematical thinking; Calculus Teaching; Real Analysis Teaching; Teachers initial training.

INTRODUÇÃO

Neste artigo, discutimos as respostas dadas por um grupo de estudantes de um curso de licenciatura em Matemática para uma questão que envolve a classificação de sequências numéricas, representadas graficamente, antes e após experiências de formação em disciplinas de Cálculo e Introdução à Análise Real. As discussões aqui apresentadas correspondem a um recorte da tese de doutorado do primeiro autor.

Nos últimos anos, diversos pesquisadores em Educação Matemática têm se debruçado sobre processos de ensino e de aprendizagem de Matemática no Ensino Superior. No caso de disciplinas como Cálculo e Análise Real, muitas investigações se concentram nas dificuldades de aprendizagem observadas junto a estudantes, bem como na apresentação de estratégias de ensino para que estas sejam superadas.

Dentre as principais dificuldades apresentadas no processo de aprendizagem dos conteúdos abordados na disciplina Análise Real, por exemplo, destacam-se a memorização e reprodução de conceitos e ideias (Gomes; Otero-Garcia; Silva; Baroni, 2015), além da prevalência de abordagens formalistas, que terminam por não capacitarem os futuros professores a ensinarem os diversos assuntos que são explorados nessa disciplina e que têm conexão com temas estudados na Educação Básica (Broetto; Santos-Wagner, 2019).

Outra linha explorada por pesquisas é a da articulação de disciplinas matemáticas envolvidas na formação inicial de professores e a atuação destes na Educação Básica. Dentre as questões apontadas nessas investigações, ganham destaque o descompasso entre os temas abordados na Matemática universitária e aqueles que deverão ser ensinados às crianças e aos jovens, além de propostas de ensino para mudar essa realidade (Wasserman; Weber; Villanueva; Mejia-Ramos, 2018; Esquincalha; Bairral, 2019; Broetto; Santos-Wagner, 2019).

Sobre o estudo dos conteúdos que são propostos na disciplina Análise Real, parece ser consenso entre matemáticos e educadores matemáticos a importância dessa disciplina na formação de professores de Matemática, que precisam conhecer a natureza do pensamento matemático, procedimentos e técnicas de demonstração e a forma como a Matemática se organiza (Moreira; Vianna, 2016). Além da ideia de que “(...) qualquer professor de matemática deve saber mais matemática do que aquela que vai ensinar” (Gomes *et al*., 2015, p. 19). Porém, essas perspectivas têm sido reiteradamente ponderadas com aquela que sustenta que “(...) o rigor continue sendo trabalhado, mas que também haja espaço para que os licenciandos entendam os porquês matemáticos de estarem estudando aqueles conteúdos e como isso pode se articular com a sua futura prática” (Esquincalha; Bairral, 2019).

Dentre os temas abordados em disciplinas como Cálculo Diferencial e Análise Real, destaca-se o estudo de sequências numéricas. No caso da formação de professores, a relevância desse estudo se justifica por ser um assunto presente em muitas etapas da Educação Básica. A Base Nacional Comum Curricular, por exemplo, aponta que ao longo do Ensino Fundamental os estudantes devem desenvolver habilidades de identificar, interpretar e traduzir regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, e de interpretar e transitar entre as diversas representações (Brasil, 2018a). No Ensino Médio, essas habilidades devem ser aprofundadas com o estudo de Progressões Aritméticas e Geométricas (Brasil, 2018b).

Dada a relevância do assunto sequências numéricas na formação inicial de professores de Matemática, diversas pesquisas têm apresentado propostas ou atividades para o ensino desse tema e de correlatos. Por exemplo, Batista (2017) apresenta resultados de pesquisa que envolveu a aplicação de atividades de ensino que usam a metodologia da investigação matemática sobre sequências numéricas e Geometria Fractal para licenciandos em Matemática. A autora destaca que as atividades permitiram aos participantes desenvolver os conceitos de sequência numérica e de convergência e divergência de sequências, além de ter possibilitado o trabalho com conceitos de área, perímetro, fractais e geometrias não euclidianas. Sustenta ainda que nos relatórios apresentados pelos participantes foi identificado o interesse destes em utilizarem a metodologia de investigação matemática e o conteúdo de fractais "(...) quando exercerem atividades no Ensino Médio, pois poderão empregar este conhecimento para desenvolver o conteúdo de progressões geométricas" (Batista, 2017, p. 61).

Marchetto (2017) apresenta e discute os resultados de um conjunto de atividades de ensino sobre sequências numéricas com o uso do software GeoGebra aplicadas para estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Essas atividades têm por objetivo que os estudantes estabeleçam conexões entre progressões aritméticas e funções afins e entre progressões geométricas e funções exponenciais, explorando diferentes tipos de registros de representação, como gráficos, tabelas e registros algébricos, disponíveis no GeoGebra. Segundo a pesquisadora, os dados da investigação revelaram que os participantes conseguiram estabelecer as conexões esperadas e atribuir significados aos temas estudados, condição que a pesquisadora atribui ao trabalho com os diferentes tipos de registros de representação.

Em pesquisa desenvolvida com licenciandos em Matemática, Bisognin, Bisognin e Leivas (2016) analisaram dificuldades encontradas pelos participantes ao resolverem uma questão sobre sequência numérica. As análises são baseadas nos Três Mundos da Matemática e envolveram a descrição e comentários das respostas fornecidas pelos licenciandos. Os resultados apontaram dificuldades conceituais e procedimentais dos participantes relacionadas ao conceito de limite de uma sequência. Os autores sustentam que "(...) parece que esses futuros professores estão ainda ancorados no mundo corporificado, apresentando alguns elementos do mundo simbólico, mas com dificuldades que precisam ser superadas antes de trabalhar com estudantes da educação básica" (Bisognin; Bisognin; Leivas, 2016, p. 374). Defendem, ainda, que futuros professores devam, ao longo de seus cursos, superar este estágio simbólico/procedimental e avançar para um nível de matemática formal. Nesse sentido, dão destaque à disciplina Análise Real na formação dos licenciandos e ponderam que futuros professores necessitam ter conhecimentos sobre demonstrações e justificativas na aprendizagem de Matemática, numa perspectiva que seja mais ampla do que o formalismo matemático.

Buscando colaborar com as discussões sobre os processos de ensino e de aprendizagem destes temas no ensino superior, neste trabalho apresentamos uma análise das respostas de licenciandos em Matemática sobre uma questão que envolve a classificação de sequências numéricas, representadas graficamente, antes e após experiências de formação em disciplinas que tratam deste tema. A questão analisada compôs um questionário diagnóstico aplicado para os participantes ao final das disciplinas Sequências e Séries (1º questionário, 6º semestre) e Introdução à Análise Real (2º questionário, 8º semestre). A interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais (Fischbein, 1994) e os processos de representação e de visualização relativos ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado são os referenciais teóricos que sustentam as análises das produções dos participantes.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Fischbein (1994) coloca em discussão a necessidade de se observar a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos em situações nas quais sujeitos realizam uma atividade matemática. Esses são, segundo ele, os três aspectos básicos a serem considerados quando tratamos a Matemática como uma atividade humana, que gostaríamos que nossos alunos aprendessem.

Destaca ainda que, ao considerar a interação desses três aspectos, olhamos a Matemática como um processo criativo e não como um corpo de conhecimentos estruturado e estabelecido, e defende que este olhar implica considerar essa ciência como uma atividade humana, que envolve momentos de iluminação, hesitação, aceitação e refutação. Para ele, tal perspectiva deve orientar nossas escolhas quando ensinamos Matemática, se desejamos que os estudantes sejam capazes de produzir afirmações matemáticas, elaborar provas e avaliar, formal e intuitivamente, a validade dessas produções (Fischbein, 1994).

No que segue, apresentamos e exemplificamos cada um dos aspectos colocados por Fischbein (1994).

O aspecto formal diz respeito aos axiomas, definições, teoremas, justificativas e demonstrações, que compõem o núcleo das ciências matemáticas e precisam ser considerados quando analisamos, observamos ou propomos situações de atividade Matemática. Fischbein (1994) defende que estes elementos devem ser aprendidos, avaliados, organizados e usados ativamente pelos aprendizes. Além disso, alerta que o pensamento proposicional e o uso de construções hipotético-dedutivas não são adquiridos espontaneamente e que somente um processo de ensino adequado pode dar a estes aspectos formais características verdadeiramente funcionais.

O aspecto algorítmico corresponde às técnicas e procedimentos de resolução. Esta componente também tem papel fundamental nos processos de entendimento e de criação em Matemática, uma vez que apenas o conhecimento das estruturas formais (axiomas, definições, teoremas) não é suficiente para conferir habilidade em resolver problemas. Essa habilidade, sustenta Fischbein (1994), deve ser sistematicamente usada para que seja adquirida. No entanto, defende que o ensino de matemática não pode e não deve ser reduzido a um conjunto de procedimentos e técnicas e que estes precisam ser acompanhados de justificativas, para que não se tornem estéreis frente a situações não convencionais e que “Esta profunda simbiose entre significado e habilidades é uma condição básica para o produtivo e eficiente raciocínio matemático” (Fischbein, 1994, p. 232).

O aspecto intuitivo diz respeito a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva. Este aspecto exerce um papel coercitivo no raciocínio, definindo caminhos e estratégias para a resolução de problemas. Por vezes, isso pode se tornar um facilitador do processo de conhecimento, se estiver de acordo com verdades logicamente justificáveis. Em outros casos, pode configurar um caminho para contradições, como aceitar, por exemplo, que “multiplicar sempre aumenta”, baseado em experiências multiplicativas no conjunto dos números naturais ou “resolver uma inequação como uma equação”, estendendo uma técnica para domínios nos quais esta não é válida. Tais situações podem ser consideradas como autoevidentes para alguns sujeitos, mas se ancoram em conhecimentos mal estruturados e são um caminho para confusões e erros.

Fischbein *et al.* (1981) destacam que o conceito de intuição não está claramente definido, tendo diferentes autores apresentado várias possibilidades de interpretação para este termo; entretanto, Fischbein (1994) defende que, apesar dessa multiplicidade de interpretações, a imediatez do conhecimento intuitivo parece ser comumente aceita. Seguindo estes autores, reiteramos que apresentar uma solução ou interpretação intuitiva para um problema significa lançar mão de um conhecimento sem que seja necessário estar consciente ou conhecedor de uma justificativa detalhada ou formal para a estratégia adotada.

Sobre a interação entre aspectos intuitivos e formais, Fischbein (1994) defende ainda que nossa capacidade de processar informações não é controlada somente pelas estruturas lógicas, mas também por uma grande quantidade de modelos intuitivos que agem de maneira implícita, colocando restrições e definindo caminhos para o raciocínio.

Acreditamos, seguindo Fischbein (1994), que o entendimento das relações estabelecidas entre aspectos algorítmicos, intuitivos e formais é fundamental para encontrarmos melhores estratégias para o ensino de conceitos e ideias matemáticas, e que este entendimento pode favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático.

A fim de reforçar que estes aspectos desempenham um papel importante no pensamento matemático e que essas considerações psicológicas não são meras especulações, Fischbein (1994) apresenta a abordagem que os matemáticos Courant e Robbins (1978) dão ao conceito de convergência de sequências numéricas. Inicialmente, esses autores apresentam a definição formal: A sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, tem limite a quando n tende ao infinito se, para todo número positivo ε, não importa quão pequeno, podemos encontrar um inteiro positivo N (dependendo de ε), tal que $|a - a_n| < \varepsilon$ para todo $n > N$ (Courant; Robbins, 1978, p. 291). Então, fazem a análise das relações e dificuldades de natureza cognitiva que se apresentam nesta definição.

Segundo os autores, há uma dificuldade psicológica definitiva em compreender essa definição de limite. A intuição sugere uma ideia 'dinâmica' do limite como o resultado do processo de 'movimento': Seguimos pela linha de inteiros $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ e observamos o comportamento da sequência a_n. Sentimos que a aproximação $a_n \to a$ deveria ser observável. Mas esta atitude 'natural' não é capaz de esclarecer a formulação matemática (Courant; Robbins, 1978, p. 291).

Este comentário coloca o conflito existente entre aspectos intuitivos da convergência de sequências e o formalismo da definição. Se acrescentarmos um exemplo, este choque entre o intuitivo e o formal torna-se ainda mais evidente.

Consideremos, então, a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$. Não há grandes dificuldades em aceitar que os termos tornam-se cada vez mais próximos do número 0 à medida que n aumenta muito ($n \to \infty$) (Fischbein, 1994). Para isso, bastaria lançar mão de um aspecto algorítmico bastante comum no trabalho com sequências e substituir, no termo geral $a_n = \frac{1}{n}$, por exemplo, $n = 100$, $n = 1.000$ e $n = 1.000.000$ e já seria possível intuir que 0 é o limite da sequência e que ela, assim, é convergente.

Agora, para contrapor a perspectiva intuitiva, vamos demonstrar este resultado usando a definição. Considere $\varepsilon > 0$. Então, da definição, vem que

$$\left|0 - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon \overset{n>0}{\iff} \frac{1}{n} < \varepsilon \overset{n,\varepsilon>0}{\iff} n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo $N > \frac{1}{\varepsilon}$, tal que $\left|0 - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, para todo $n > N$.

Analisando essa demonstração, pode-se notar que não passamos diretamente da análise intuitiva para a definição formal. Elas são, de fato, bastante díspares. Fischbein (1994) aponta que há, na definição formal, uma inversão na ordem do raciocínio, contradizendo a ideia que surge naturalmente a partir de nosso conhecimento intuitivo.

Quando do uso da definição, tomamos um número positivo ε, "não importa quão pequeno" para, em seguida, determinar um número N, que depende desse ε; então, deve-se provar que o número $\left|0 - \frac{1}{n}\right|$ é menor do que o ε inicialmente dado.

Entretanto, segundo Fischbein (1994), quando pensamos nos termos da sequência, o que notamos primeiramente é que os termos $\frac{1}{n}$ vão se tornando cada vez mais próximos de 0, à medida que n assume valores cada vez maiores, que é o contrário do que a definição pode nos levar a desenvolver. De fato, quando pensamos na definição, partimos do quão pequena deve ser a distância entre o termo geral da sequência e o valor do limite (o valor de ε), para então encontrarmos um valor para N; por outro lado, ao analisarmos o comportamento dos termos $\frac{1}{n}$, o foco está em observar intuitivamente que para n cada vez maior, o módulo da diferença se torna tão pequeno quanto se queira. Ocorre ainda que, pela definição de limite, é preciso provar que $\frac{1}{n}$ fica menor do que ε, a partir de um certo N e não importa o que acontece com os termos da sequência para valores de n

menores que N.

Fischbein (1994), apoiado nessa análise, destaca que a definição de limite de sequências é totalmente contraintuitiva tornando-se, assim, de difícil compreensão.

As discussões envolvidas nos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas envolvem o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado. Tall (1991) coloca em discussão aspectos psicológicos relativos a este desenvolvimento e suas influências na produção, no ensino e na aprendizagem de Matemática. E defende que qualquer teoria sobre a psicologia da aprendizagem matemática deve considerar também concepções de matemáticos maduros e não somente o desenvolvimento conceitual de estudantes, uma vez que a Matemática é um elemento cultural e existem aspectos que dependem do contexto no qual estão inseridos.

Dreyfus (1991) entende o Pensamento Matemático Avançado (PMA) como uma inter-relação de processos cognitivos como representação, visualização, classificação, justificação, generalização, síntese e abstração. Para Tall (1991), muitos desses processos aparecem nos anos iniciais de ensino, até mesmo o de justificação; entretanto, o processo de abstração, caracterizado principalmente pelo estabelecimento de definições formais e pelo uso da lógica de deduções a partir dessas definições, é desenvolvido apenas no Ensino Superior, muitas vezes com detrimento dos demais processos do PMA.

Tall (1991) aponta ainda que a transição entre os níveis de pensamento elementar e avançado é marcada pela mudança "(...) do descrever para o definir, do convencer para o provar de uma maneira lógica com base nessas definições. (...) É a transição da coerência da matemática elementar para a consequência da matemática avançada" (Tall, 1991, p.20). Esse processo de transição requer uma reconstrução cognitiva, que é enfrentada pelos estudantes durante os primeiros anos do ensino universitário.

Para Tall (1991), a apresentação do conhecimento matemático nas disciplinas universitárias não cumpre o papel de dar ao estudante todo o poder do pensamento avançado, com toda a multiplicidade de processos e de abordagens; e a lógica de apresentação frequentemente não está adequada ao nível de desenvolvimento cognitivo dos aprendizes, o que acarreta obstáculos cognitivos, fruto do conflito entre o conhecimento estruturado e o trazido pelos alunos. Em oposição a esta perspectiva, defende que o conhecimento matemático seja abordado a partir de estratégias que privilegiem a estrutura do conhecimento e o processo de pensamento dos estudantes, para que estes adquiram *insights* dos métodos e processos da Matemática avançada e atinjam os mais altos níveis do pensamento matemático.

Entendemos que a promoção da interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais de conceitos e ideias matemáticas (Fischbein, 1994) se configura como um caminho para viabilizar a posição defendida por Tall (1991).

A partir dessas ideias, relacionadas ao desenvolvimento do pensamento matemático, passamos a apresentar alguns dos processos do Pensamento Matemático Avançado e que são a base para nossas análises.

O processo de representação desempenha papel central no desenvolvimento do pensamento matemático e deve ser considerado em todas as suas possibilidades, quando ensinamos um novo conceito. Uma das representações possíveis para todo conceito matemático é o símbolo associado ou atribuído a ele. Essas representações simbólicas são indispensáveis no desenvolvimento e no ensino de Matemática; entretanto, trazem consigo um lado perigoso, que pode ter impactos bastante nocivos no processo de aprendizagem de novos conceitos.

Segundo Dreyfus (1991), os símbolos estão associados a signos (sinais) e a significados e tornam explícito o significado do conhecimento implícito que um indivíduo tem sobre um dado conceito; contudo, para que um novo símbolo seja funcional e possa ser utilizado, é preciso que alguns significados associados ao conceito em questão sejam desenvolvidos antes que o símbolo seja estabelecido, sob pena do estudante trabalhar com um símbolo sem ter apreendido o desejado significado para ele. Este autor reitera que esse processo de articulação dos vários significados de uma noção, antes do estabelecimento do simbolismo associado a ela, é frequentemente negligenciado no ensino de Matemática.

Outro significado das representações, que desempenham um papel ainda mais decisivo no pensamento e no processo de aprendizagem de Matemática, é o conceito de representação mental. Ao discutir um conceito, procedimento ou noção matemática, cada um de nós relaciona a ideia em questão a algo que nos vem à mente, essa é a representação mental que temos de tal conceito. Embora possamos esperar de matemáticos profissionais definições equivalentes sobre, por exemplo, o conceito de função, as representações mentais de cada um deles podem ser completamente díspares, dependendo das áreas de interesse ou dos trabalhos que desenvolvem. Essa característica é ainda mais marcante e decisiva quando do processo de aprendizagem de Matemática, na relação entre professores e alunos (Dreyfus, 1991).

Ainda considerando o caso das funções, um estudante pode, por exemplo, ter uma representação mental associada à elaboração de tabelas de valores ou ainda um esboço do gráfico, enquanto o professor que ensina integrais indefinidas pode pensar em um objeto a ser transformado. Essa discrepância entre o que é trazido pelo aluno e o que é esperado pelo professor pode conduzir a situações nas quais a relação de aprendizagem seja prejudicada e o estudante terá dificuldades em entender o que diz o professor e o professor dificuldades de fazer com que o aluno entenda sobre o que ele fala (Dreyfus, 1991).

A visualização é um dos processos pelo qual as representações mentais podem passar a existir. Dreyfus (1991) aponta que a geração de representações mentais depende dos sistemas de representação, de produções externas, concretas, que podem ser percebidas pelo sujeito. No caso das sequências numéricas, objeto de interesse de nossa investigação, gráficos, fórmulas algébricas, tabelas e representações numéricas materializam o conceito de sequência, pois são produções externas dessa ideia.

Esse autor sustenta, ainda, que as representações mentais são criadas com base em sistemas de representação "concreta" e aponta ainda que um sujeito pode criar, para certo conceito, uma única e simples representação, mas destaca que, para ter sucesso em Matemática, é necessário ter muitas representações mentais de um conceito e que estas estejam relacionadas a vários aspectos desse conceito. Representações que articulem poucos elementos de um conceito não conferem a flexibilidade necessária à resolução de problemas e podem ter impacto negativo no processo criativo do sujeito.

Para Dreyfus (1991), essa é uma característica observável em muitos estudantes, que se manifesta na dificuldade em resolver problemas que trazem pequenas mudanças nas estruturas ou enunciados, possível reflexo da incapacidade de estabelecer articulações entre diversas representações de um conceito. Segundo ele, o conceito de função é um exemplo típico dessa situação, pois é comum que estudantes do Ensino Médio pensem nessa ideia somente em termos de fórmulas algébricas, mesmo quando são capazes de dar uma definição em termos de relações entre conjuntos. Destaca que os processos de visualização e de representação exercem papel importante no desenvolvimento de abstrações, uma vez que as imagens visuais podem apresentar características globais e enfatizar aspectos estruturais dos conceitos, fatores que são de grande ajuda na construção de abstrações. E aponta, ainda, que representações e abstrações são processos complementares, pois um conceito muitas vezes é abstraído a partir de várias representações e uma representação está sempre associada a propriedades de um conceito abstrato; dessa forma, o uso de várias representações, trabalhadas conjuntamente, pode favorecer a abstração das relações e propriedades de um conceito.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A elaboração dos instrumentos de coleta de dados ocorreu em três etapas. Na primeira delas, entrevistamos sete docentes que ministram as disciplinas Sequências e Séries e Introdução à Análise Real para cursos de Licenciatura em Matemática. Todos trabalham em instituições públicas de ensino do Estado de São Paulo, possuem mais de 10 anos de atuação docente e já ensinaram sequências numéricas no Ensino Superior. Um deles possui Mestrado em Matemática, quatro possuem Doutorado em Educação Matemática, um Doutorado em Matemática e outro Doutorado em Computação Matemática.

Das análises das entrevistas com os docentes, foram identificadas 16 principais dificuldades de estudantes, relativas ao estudo de sequências. Essas dificuldades orientaram a elaboração de dois questionários diagnósticos que foram aplicados para um mesmo grupo de licenciandos em Matemática: um ao final da disciplina Sequências e Séries, no 6º semestre (segunda etapa da pesquisa) e o outro ao final da disciplina Introdução à Análise Real, no 8º semestre (terceira etapa da pesquisa). Esses questionários abordam questões como representação de sequências numéricas, uso e elaboração de leis algébricas e ideias de limite e convergência de sequências, entre outros (Vieira, 2016).

Neste artigo, discutimos as respostas dadas pelos participantes para a questão que aborda a identificação de propriedades de sequências a partir de suas representações gráficas. Essa questão procura investigar as seguintes dificuldades apontadas pelos docentes entrevistados: (dificuldade 1) Não atentar para características de sequências numéricas - ser crescente, decrescente, limitada - no estudo da convergência e (dificuldade 2) Dificuldade em relacionar a ideia de convergência com o limite de uma sequência.

Os questionários foram respondidos individualmente, sem nenhum tipo de consulta a materiais externos e sem intervenção do pesquisador. No primeiro questionário, foram convidados 17 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da instituição escolhida e que haviam cursado os ensinos Fundamental e Médio em escolas públicas. O segundo questionário foi aplicado ao final da disciplina Introdução à Análise Real (8º semestre) e participaram 15 alunos que haviam respondido ao primeiro questionário. A partir da análise das respostas dadas por escrito, o estudante, identificado como Camilo neste texto, foi selecionado para a realização de entrevistas semiestruturadas (Boni; Quaresma, 2005), nas quais foram discutidas as respostas dadas por ele nos questionários.

As respostas dos participantes, para cada uma das questões, foram analisadas com base na Análise de Erros (Cury, 2007), procedimento metodológico que propõe uma análise de conteúdo para identificar classes de erros recorrentes nas resoluções dos problemas propostos, seguida de quadros com os percentuais de cada tipo de erro identificado.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No que segue, apresentamos a questão aplicada, sua análise didática e discutimos as respostas dadas pelos participantes da pesquisa.

Questão Os gráficos a seguir representam sequências numéricas. Admitindo que os comportamentos indicados nos gráficos persistam, classifique essas sequências em convergente, divergente, crescente, decrescente, limitada, sem limite, limite infinito, possui limite, constante, monótona. Em cada caso, apresente todas as classificações possíveis. Coloque suas respostas logo abaixo de cada gráfico. (Os gráficos, as classificações esperadas e os percentuais de acerto no primeiro e no segundo questionários são apresentados no Quadro 1).

Nesta questão, damos destaque ao processo de visualização e entendemos que as respostas dos participantes fornecerão elementos para avaliar se estes inter-relacionam aspectos intuitivos e formais na classificação das sequências representadas nos gráficos. Além disso, a comparação entre as respostas dadas para as questões nos dois momentos nos permite observar se dificuldades em não atentar para características de sequências numéricas (dificuldade 1) e em relacionar a ideia de convergência com o limite de uma sequência (dificuldade 2) foram ou não superadas pelos participantes ao final de sua formação no curso de Licenciatura em Matemática. Os gráficos foram retirados de Oehrtman, Swinyard, Martin (2014).

No Quadro 1, apresentamos as classificações esperadas para cada gráfico da questão proposta e os percentuais de estudantes que acertaram cada uma das opções corretas. Por exemplo, no gráfico A, 47% dos estudantes assinalou corretamente o termo 'convergente' na questão no Primeiro Questionário (1º Q) e 33% indicou essa opção no Segundo Questionário (2º Q). Isso significa que, respectivamente, 53% e 67% dos participantes não registraram essa classificação para o gráfico A, no Primeiro e Segundo Questionários.

Quadro 1: Classificações esperadas e percentuais de acertos das questões

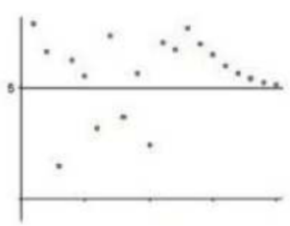


Gráfico A

Classificações	1º Q	2º Q
Convergente	47%	33%
Possui limite	41%	33%
Limitada	6%	25%

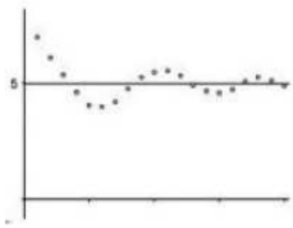


Gráfico B

Classificações	1º Q	2º Q
Convergente	71%	92%
Possui limite	65%	42%
Limitada	18%	50%

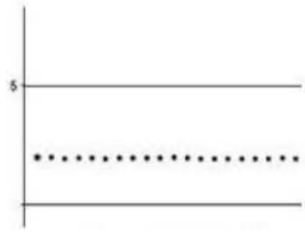


Gráfico C

Classificações	1º Q	2º Q
Convergente	53%	42%
Possui limite	53%	42%
Limitada	24%	17%
Constante	82%	83%
Monótona	24%	8%

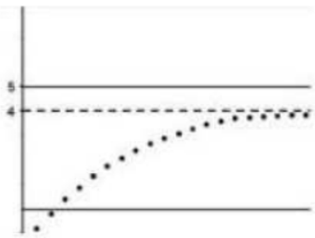


Gráfico D

Classificações	1º Q	2º Q
Convergente	82%	83%

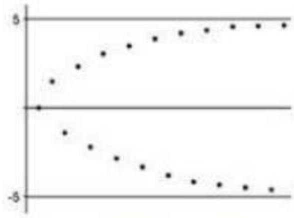


Gráfico E

Classificações	1º Q	2º Q
Divergente	47%	42%

Possui limite	65%	50%
Limitada	47%	58%
Crescente	82%	58%
Monótona	47%	33%

Sem limite	53%	58%
Limitada	41%	58%

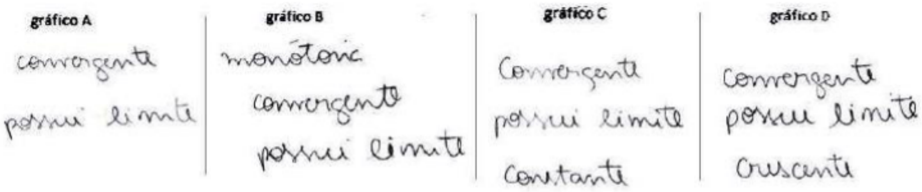
A partir da análise das respostas dos participantes e das estatísticas indicadas no Quadro 1, identificamos as classes de erros destacadas no Quadro 2. Para facilitar a comparação entre as respostas dadas nos dois questionários, utilizamos as mesmas classes de erros identificadas no Primeiro Questionário. Os critérios adotados nas classificações das respostas, em cada tipo de erro, é o mesmo para as duas questões.

Quadro 2: Classes de erros identificadas nas resoluções das questões

Descrição do erro	**1º Q**	**2º Q**
A_6 - Não relacionar convergência e sequência limitada	41%	67%
B_6 - Não relacionar sequência constante e convergência	53%	50%
C_6 - Aplicar parcialmente ou de maneira equivocada o conceito de sequência monótona	76%	100%
D_6 - Não relacionar convergência com possuir limite	35%	58%
E_6 - Aplicar parcialmente ou de maneira equivocada o conceito de sequência limitada	53%	75%
F_6 - Não relacionar possuir limite com sequência limitada	53%	33%

O erro tipo A_6 é associado aos estudantes que, tendo indicado uma sequência como ‘convergente’, não a indicaram como ‘limitada’ em pelo menos dois gráficos; essa situação ocorre nos gráficos A, B, C e D. As respostas de Bia (Fig. 1) e Debora (Fig. 2) são exemplos de situações consideradas neste tipo de erro, pois Bia deixou de indicar o conceito ‘limitada’ em quatro gráficos e Debora, em dois. Entendemos que a aplicação parcial da classificação ‘convergente’ e ‘limitada’, como no caso da resposta de Debora, é tão relevante quanto nenhuma classificação, como no caso de Bia, pois indica incoerência por parte daquela estudante e mostra que a relação entre estes conceitos não está totalmente clara para ela.

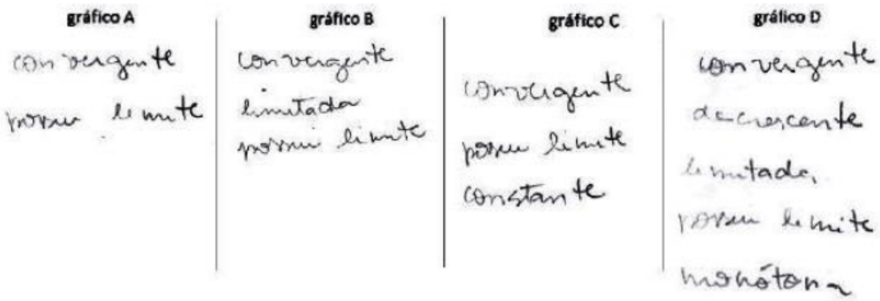
Figura 1 - Resposta de Bia no Segundo Questionário –gráficos A, B, C, D



Fonte: Vieira (2016)

Os dados apresentados no Quadro 2 indicam que houve um desempenho pior dos participantes do Segundo Questionário em classificar a relação ‘convergente’ e ‘limitada’.

Figura 2 – Resposta de Debora no Segundo Questionário – gráficos A, B, C, D

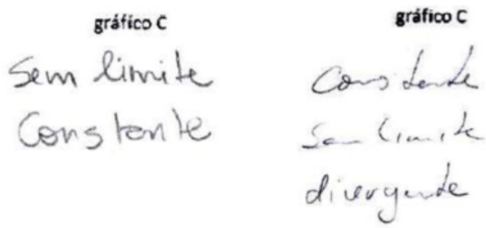


Fonte: Vieira, 2016.

No Quadro 1, observamos que houve uma piora na identificação do conceito ‘convergente’ nos gráficos A e C, resultado que ajuda a explicar o aumento no percentual do erro tipo A_6.

O erro tipo B_6 diz respeito à sequência constante representada no gráfico C. Neste caso, foram considerados os participantes que não indicaram a sequência como ‘convergente’, quando a consideraram ‘constante’, como é o caso de Renata e Ugo (Figura 3).

Figura 3 - Respostas de Renata e Ugo no Segundo Questionário – gráfico C



Fonte: Vieira, 2016.

Observe que estes estudantes classificam a sequência do gráfico C também como ‘sem limite’, condição que indica dificuldades mais profundas do que simplesmente não tê-la considerado ‘convergente’. Neste caso, o desempenho geral dos participantes se manteve praticamente o mesmo nos dois questionários, mas os índices em torno de 50% deste tipo de erro indicam uma relação bastante conflituosa entre os conceitos de convergência e sequência constante.

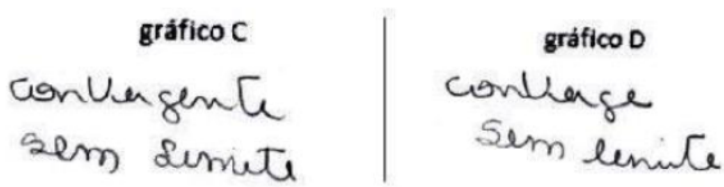
No Segundo Questionário, nenhum dos participantes classificou, simultaneamente, as sequências dos gráficos C e D como ‘monótonas’, por isso houve 100% do erro tipo C_6; 4 estudantes (33%) indicaram o gráfico D e um estudante (8%), o gráfico C como sequências monótonas. No que diz respeito a esse conceito, a anotação do estudante Ugo (Fig. 4) na folha de respostas parece ser uma boa explicação para os resultados e as dificuldades dos participantes em identificar sequências monótonas. De fato, as dificuldades dos participantes com este conceito ficaram evidentes no Primeiro Questionário e os dados do Segundo confirmam que, para estes participantes, a definição de sequência monótona não está clara, situação que caracteriza o erro tipo C_6.

Figura 4 - Resposta de Ugo no Segundo Questionário

Fonte: Vieira, 2016.

O erro tipo D_6 concentra os estudantes que, tendo classificado uma sequência como ‘convergente’, não marcaram o conceito ‘possui limite’; estes dois conceitos estão relacionados nos gráficos A, B, C e D e foram considerados nesta classe de erro participantes que deixaram de aplicar ambos os conceitos para pelo menos dois gráficos. A resposta de Ilana (Fig. 5) é um exemplo da situação considerada nesse tipo de erro.

Figura 5 - Resposta de Ilana no Segundo Questionário – gráficos C e D



Fonte: Vieira, 2016.

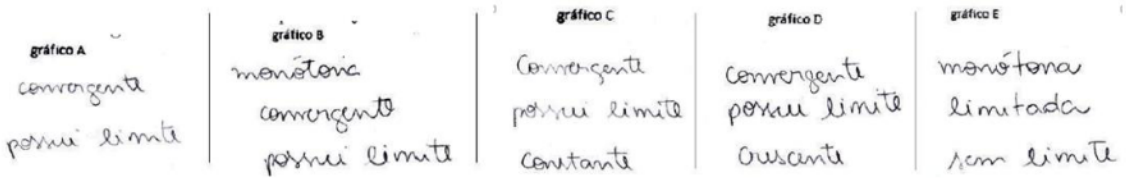
Observe que, em sua resposta, Ilana revela que suas incompreensões são mais profundas do que o fato de não relacionar convergência à existência do limite, uma vez que associa os conceitos ‘convergente’ e ‘sem limite’. Neste caso, nos parece evidente que a estudante não apreendeu a ideia de convergência.

Os participantes do Segundo Questionário tiveram um desempenho pior na relação observada no erro tipo D_6, indicada pelo índice de 58%, maior que os 35% verificados no Primeiro Questionário (Quadro 2). Esse desempenho ruim no Segundo Questionário também se observa nas estatísticas do Quadro 1, no qual podemos verificar que o conceito ‘possui limite’ foi menos apontado pelos estudantes no Segundo Questionário nos gráficos A, B, C e D, que são aqueles em que a sequência possui limite.

O erro tipo E_6 agrupa os participantes que não aplicaram o conceito de sequência limitada ou o fizeram parcialmente. Como todos os gráficos da questão proposta mereciam essa classificação, consideramos neste erro os participantes que não utilizaram o termo ‘limitada’ ou o usaram em apenas um ou dois gráficos.

A resposta de Bia (Fig. 6) exemplifica a situação considerada no erro tipo E_6, pois aplicou o conceito ‘limitada’ apenas no gráfico E.

Figura 6 - Resposta de Bia no Segundo Questionário – gráficos A, B, C, D e E



Fonte: Vieira, 2016.

Embora os índices destacados no Quadro 1 apontem um melhor desempenho dos participantes do Segundo Questionário no emprego do termo ‘limitada’, o percentual de 75% associado ao erro tipo E_6, destacado no Quadro 2, contradiz essa análise e indica um desempenho pior no uso desse conceito por parte dos estudantes no Segundo Questionário.

Entendemos que essa aparente contradição pode ser explicada pelo fato do uso isolado, em um ou dois gráficos, da ideia de sequência limitada não garantir que o participante tenha entendimento dessa definição. Por exemplo, o estudante Camilo utilizou corretamente este conceito na classificação dos gráficos A e B no Segundo

Questionário; porém, na entrevista, ao ser questionado porque não classificou o gráfico C como ‘limitada’, justificou que

> Toda vez que eu penso em limitado eu penso em valores. Eu penso por exemplo no valor (...) pro qual a minha sequência ela vai convergir e eu penso por exemplo em valores superiores e inferiores, mas que em determinado momento dessa sequência esses valores, tanto os superiores quanto os inferiores eles vão se aproximar desse meu limite. Nesse caso (gráfico C) eu não tenho nem valores superiores ao meu limite nem valores inferiores, eu tenho justamente o meu limite.

Esse comentário indica que o participante não conhece o conceito em questão, embora o tenha empregado corretamente em algumas classificações.

Estudantes que não aplicaram o conceito de sequência limitada nas situações em que classificaram a sequência com o termo ‘possuir limite’ estão agrupados no erro tipo F_6. Novamente, as respostas de Bia (Fig. 6) são exemplos de respostas consideradas nesse tipo de erro, pois ela não utiliza o termo ‘limitada’ nas ocasiões em que classifica a sequência com o termo ‘possuir limite’.

Apesar dos índices destacados no Quadro 2 indicarem uma redução no percentual desse tipo de erro, de 53% no Primeiro Questionário para 33% no Segundo, essa leitura deve ser ponderada com o desempenho dos participantes do Segundo Questionário no uso da expressão ‘possuir limite’, que foi pior do que no Primeiro Questionário. De fato, os percentuais de acerto para o termo ‘possuir limite’ teve redução em todos os quatro gráficos da questão, conforme destacado no Quadro 1.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De maneira geral, o desempenho dos participantes nas classificações dos gráficos do Segundo Questionário foi pior do que no Primeiro Questionário, conforme indicam os índices destacados nos Quadros 1 e 2. Estes dados quantitativos e a análise de erros que realizamos são evidências de que os participantes continuam com dificuldades em reconhecer características importantes de sequências numéricas, como ser crescente, limitada, monótona ou possuir limite, se são representadas graficamente, e em relacioná-las ao estudo da convergência.

A ausência de aspectos formais relacionados ao uso de definições e conceitos parece ser a grande responsável pelos erros cometidos pelos participantes, situação que impede a interação com aspectos intuitivos presentes na interpretação das representações gráficas e não possibilitam, por exemplo, o estabelecimento das inter-relações esperadas (algorítmicas, intuitivas e formais). Sob essa perspectiva, nossos participantes também parecem não ter atingido, no que diz respeito ao estudo de sequências, um estágio formal de Matemática, resultados que estão em consonância com os apresentados por Bisognin, Bisognin e Leivas (2017), além de corroborar dificuldades apontadas por pesquisadores como Gomes et. al. (2015) e Broetto e Santos-Wagner (2019).

Um dos impactos mais imediatos desse problema diz respeito ao desenvolvimento de processos do Pensamento Matemático Avançado, como visualização e mudança entre representações, que poderiam ser favorecidos a partir da interação entre aspectos algorítmicos, intuitivos e formais dos conceitos e ideias colocados em jogo na interpretação gráfica de sequências e no aprofundamento da análise das propriedades salientadas em cada um desses gráficos.

No caso da formação de professores de Matemática, acreditamos que estratégias como as colocadas por Batista (2017), que propõe o estudo da Geometria Fractal na introdução do conteúdo de sequências numéricas, podem se constituir em alternativas que possam minimizar os problemas observados para nossos participantes e para futuros professores que, munidos de arcabouços teórico-metodológicos tenham recursos que lhes permitam desenvolver práticas de ensino diferenciadas e atrativas como, por exemplo, a colocada por Marchetto (2017), que aplicou atividades de ensino sobre sequências numéricas com o uso do GeoGebra para estudantes do Ensino Médio.

Por fim, entendemos que a interação entre aspectos algorítmicos e intuitivos relacionados ao cálculo de limite de sequências e processos de mudanças entre representações algébrica e gráfica e de visualização podem ser alternativas que favoreçam uma ressignificação dos conceitos e ideias (aspectos formais) relacionados ao estudo de sequências numéricas e que também contribuiriam para uma formação mais ampla e articulada de futuros professores de Matemática da Educação Básica.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos avaliadores pelas sugestões e contribuições ao texto.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2018a.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Ensino Médio. Brasília: MEC, 2018b.

BATISTA, Bárbara Regina da Silveira. **Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciandos em Matemática**. Dissertação de Mestrado. Centro Universitário Franciscano, 2017. Recuperado de http://www.tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/595

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde; LEIVAS, José Carlos Pinto. Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de Licenciandos em Matemática. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.24, n.3, set./dez. 2016. DOI: http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648090

BONI, Valdete; QUARESMA, Sílvia Jurema. Aprendendo a entrevistar: como fazer entrevistas em Ciências Sociais. **Revista Eletrônica dos Pós-Graduandos em Sociologia Política da UFSC**, 2, n. 1 (3), janeiro-julho 2005. P. 68-80.

BROETTO, Geraldo Claudio; SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos. O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 33, n. 64, p. 728-747, ago. 2019. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a14

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods.** Oxford: Oxford University Press, 1978.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In TALL, D. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 25-41.

ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição; BAIRRAL, Marcelo Almeida. Refletindo sobre Análise Real com professores da Educação Básica em um curso a distância. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v.9 n.3 set/dez, 2019.

FISCHBEIN, Efraim; TIROSH, Dina; MELAMED, Uri. Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? In GOOS, M. (Org.). **Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1981. p. 491–512.

FISCHBEIN, Efraim. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In BIEHLER, R. et al. (Org.) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.** Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. p. 328-375.

GOMES, Danilo Olímpio; OTERO-GARCIA, Sílvio César; SILVA, Luciano Duarte da; BARONI, Rosa Lúcia Sverzu. Quatro ou Mais Pontos de Vista sobre o Ensino de Análise Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1242-1267, dez. 2015. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a22

MARCHETTO, Raquel. **O uso do software GeoGebra no estudo de progressões aritméticas e geométricas, e sua relação com funções afins e exponenciais.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; VIANNA, Carlos Roberto. Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, ago. 2016. p. 515 – 534. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a11

OEHRTMAN, Michael; SWINYARD, Craig; MARTIN, Jason. Problems and solutions in students' reinvention of a definition for sequence convergence. **The Journal of Mathematical Behavior**, 33, p. 131-148. 2014. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.006

TALL, David. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In TALL, D. (Org.), **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 3-21.

VIEIRA, William. **Do cálculo à análise real: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://repositorio.pgsscogna.com.br//handle/123456789/21826

WASSERMAN, Nicholas; WEBER, Keith; VILLANUEVA, Matthew; MEJIA-RAMOS, Juan Pablo. Mathematics teachers' views about the limited utility of real analysis: A transport model hypothesis, **The Journal of Mathematical Behavior**, 50, 2018, Pages 74-89. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.004

Submetido em 19/09/2023.

Aprovado em 06/11/2023.