

LOCALIZAÇÃO DE GRUPOS EM CATEGORIAS ALÉM DA DOS NILPOTENTES

Augusto Reynol Filho

Iniciamos apresentando alguns resultados gerais a respeito de grupos P -locais, fatorização de ações e cohomologia de grupos. Na secção 2 nós exibimos construções explícitas para a P -localização, em G , de um produto semi-direto de um grupo abeliano finito A por um grupo qualquer X .

Finalmente, na secção 3 apresentamos a construção do funtor P -localização na categoria dos grupos que são extensões de um nilpotente por um abeliano finito.

Nossa notação é a mesma que a utilizada em [Re]. Lá também podem ser encontradas provas detalhadas de todas as afirmações aqui apresentadas. Indicamos [H.M.R.] para os leitores que estejam particularmente interessados na teoria de P -localização de grupos e espaços nilpotentes.

A referência básica para o desenvolvimento de funtor P -localização em G é [Ri.].

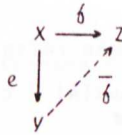
§ 1. Resultados Gerais

Ao longo das 3 secções P significa uma família de números primos, G a categoria de todos os grupos, η a categoria dos grupos nilpotentes e C a categoria dos grupos que são extensões de grupos nilpotentes por grupos abelianos finitos. Da mesma forma P' designa o complementar de P e P^X o conjunto multiplicativo gerado por P .

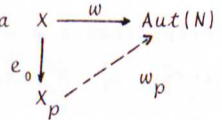
(1.1) Definição: Um grupo G é P -local $\Leftrightarrow \{g \in G \mid g^{p^n} \in G \text{ é uma bijeção, } \forall n \in P^{X}\}$.

(1.2) Definição: Seja $\mathcal{D}$ uma categoria de grupos. Um homomorfismo $X \xrightarrow{e} Y$, em $\mathcal{D}$, P -localiza X em $\mathcal{D} \Leftrightarrow \forall Z \in |\mathcal{D}| \text{ e } \forall f \in \text{Hom}(X, Z), \exists! \bar{f} \in \text{Hom}(Y, Z)$.

tq. $\bar{\delta}_0 e = \delta$.



(1.3) Proposição: Seja $X \xrightarrow{w} \text{Aut}(N)$ uma ação, onde X e N são grupos com $\text{Aut}(N)$ finito. Então $\exists$ ação w_p tornando o diagrama



comutativo $\iff w(X)$ é um P -sub-grupo de torção de $\text{Aut}(N)$ (isto é, $|w(X)| \in P^X$).

Nas condições acima temos $w_p(X_p) = w(X)$.

É importante notar que a proposição (1.3) é verdadeira quando e_0 significa a P -localização de X tanto em G quanto em η .

Consideremos agora uma seqüência exata de grupos $A \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow X$, onde A é abeliano, e w a ação de X em A associada.

Seja $\Theta_n(x) = 1_A + w(x) + \dots + w(x^{n-1}) \in \text{End}(A)$, para cada $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

(1.4) Proposição: Fixemos as afirmações:

- (i) G é P -local;
- (ii) X é P -local;
- (iii) $\Theta_n(x) \in \text{Aut}(A)$
- $\forall x \in X, \forall n \in P'^X$.

Nestas condições, se duas dentre (i), (ii), (iii) são verdadeiras, então a terceira também é.

(1.5) Corolário: Sob as condições acima se A é finito então G é P -local $\iff A$ e X são P -locais.

(1.6) Observação: Consideremos uma seqüência exata de grupos que cinda $N \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow X$. Seja w a ação de X em N determinada por σ e $\Theta_n(x): N \rightarrow N$ dada por $\Theta_n(x) = 1_N + w(x) + \dots + w(x^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$.

Então existem proposições análogas a (1.4) e (1.5) para esta situação. Vide [Re].

O próximo teorema é válido para categoria η .

(1.7) Teorema: O diagrama $X \xrightarrow{w} \text{Aut}(A)$ é comutativo, X é um grupo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{w} & \text{Aut}(A) \\ e_0 \downarrow & \nearrow w_p & \\ X_P & & \end{array}$$

nilpotente e A é abeliano e P -local.

Então, $e_0^*: H_{w_p}^n(X_P; A) \xrightarrow{\cong} H_w^n(X; A)$.

Seja agora $X \curvearrowright \text{Aut}(A)$ uma ação onde A é um p -grupo abeliano finito ($p \in P$). Suponhamos que

$|w(X)| = q_1^{\alpha_1} \dots q_\ell^{\alpha_\ell} q_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}} \dots q_t^{\alpha_t}$ onde $P_1 = \{q_1, \dots, q_\ell\} \subset P'$ e $\{q_{\ell+1}, \dots, q_t\} \subset P$.

Definamos $H = \langle x \in X: o(w(x)) \in P_1^X \rangle$ (sub-grupo gerado) e ponhamos $H \hookrightarrow X \curvearrowright \text{Aut}(A)$; $w_H = w|_H$. É fácil ver que $\Gamma_{w_H}^j$ é um w -sub-módulo de A , donde podemos considerar a ação induzida (por w) $X \curvearrowright \text{Aut}(A/\Gamma)$. Aqui Γ representa A se $\Gamma_w^2 = A$ ou Γ_w^ℓ se $\Gamma_w^{\ell+1} = \Gamma_w^\ell$ e $\Gamma_w^{\ell-1} \not\supseteq \Gamma_w^\ell$.

(1.8) Proposição: $\exists!$ ação $w_p: X_P \rightarrow \text{Aut}(A/\Gamma)$, com $w_p(X_P) = \overline{w}(X)$, que torna comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\overline{w}} & \text{Aut}(A/\Gamma) \\ e_0 \downarrow & \nearrow w_p & \\ X_P & & \end{array}$$

(Aqui $X \xrightarrow{e_0} X_P$ representa a P -localização de X em G ou η).

§ 2. P -localização de Produtos Semi-Diretos em G

(2.1) Proposição: Seja $N \xrightarrow{u} G \xrightarrow{e} X$ uma seqüência exata de grupos onde N é um p -grupo. Desta forma, se $e_0: X \rightarrow X_P$ P -localiza X (em G) e $p \in P'$, então $e_0 \circ e$ P -localiza G .

A seguir consideremos uma ação $X \curvearrowright \text{Aut}(A)$ onde A é um p -grupo abeliano finito e suponhamos que $p \in P$.

Suponhamos também $|w(X)| = q_1^{\alpha_1} \dots q_t^{\alpha_t}$ e $P \supset \{q_1, \dots, q_t\}$. Então pela prop. (1.3) $\exists$ um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{w} & \text{Aut}(A) \\ e_0 \downarrow & \nearrow w_P & \\ X_P & & \end{array}$$

Sejam $G_P = A \downarrow_{w_P} X_P$ e $e: G \rightarrow G_P$ dada por $e(a, x) = (a, e_0(x))$

(2.2) Teorema: Nas condições acima P -localiza G (em G).

Para completar o estudo quando A é um p -grupo finito abeliano, ($p \in P$), suponhamos agora $|w(X)| = q_1^{\alpha_1} \dots q_\ell^{\alpha_\ell} q_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}} \dots q_t^{\alpha_t}$ e $P_1 = \{q_1, \dots, q_\ell\} \subset P'$ e $\{q_{\ell+1}, \dots, q_t\} \subset P$. ($1 \leq \ell \leq t$).

Seja $\Gamma = \Gamma(H)$ como definido após o teorema (1.7) e consideremos o diagrama comutativo $X \xrightarrow{\bar{w}} \text{Aut}(A/\Gamma)$ obtido na proposição (1.8).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{w}} & \text{Aut}(A/\Gamma) \\ e \downarrow & \nearrow w_P & \\ X_P & & \end{array}$$

Fixemos $G = A \downarrow_w X$ $G_P = A/\Gamma \downarrow_{w_P} X_P$ e $e: (a, x) \in G \rightarrow (a + \Gamma, e_0(x)) \in G_P$.

(2.3) Teorema: Nas condições acima P -localiza G .

Para finalizar consideremos uma ação $X \xrightarrow{w} \text{Aut}(A)$ onde A é um grupo abeliano finito e suponhamos $|A| = p_1^{\beta_1} \dots p_t^{\beta_t}$. Então $A \cong \bigoplus_{i=1}^t A_i$ e $\text{Aut}(A) \cong \prod_{i=1}^t \text{Aut}(A_i)$, onde A_i é a componente p_i -primária de A , de sorte que ficam unicamente determinadas $w_1, \dots, w_t$ (por w), onde $w_i: X \rightarrow \text{Aut}(A_i)$; $i=1, \dots, t$.

Consideremos $G = A \downarrow_w X$; $G_i = A_i \downarrow_{w_i} X$; $G \xrightarrow{\epsilon} X$ e $G_i \xrightarrow{\epsilon_i} X$ as projeções canônicas.

Também, seja $(G_i)_P \xrightarrow{(\epsilon_i)_P} X_P$ a P -localização de ϵ_i e fixemos $\bar{G} \xrightarrow{\bar{\epsilon}} X_P$ o pull-back das flechas ϵ_i , $i=1, \dots, t$.

É claro que $\exists! \bar{\epsilon}: G \rightarrow \bar{G}$ (devido à definição do pull-back) tq. $\bar{\pi}_{i0} \circ e = e_{i0} \pi_i$, $\forall i$, onde π_i , $\bar{\pi}_i$ são as projeções canônicas respecti-

vamente de G em G_i e de $\bar{G}$ em $(G_i)_p$.

(2.4) Teorema: Nas condições acima $\bar{e}: G \rightarrow \bar{G}$ P -localiza G .

§ 3. O Funtor P -localização em C

Nesta secção $X \xrightarrow{e} X_p$ representa a P -localização de X em η .

(3.1) Proposição: Seja $A \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{e} X$ uma seqüência exata de grupos onde A é abeliano finito e X nilpotente. Seja $X \xrightarrow{w} \text{Aut}(A)$ a ação associada e suponhamos que $\Gamma_w^2 = A$.

Sejam também $\beta \in \text{Hom}(G, K)$ e $\tilde{B} \xrightarrow{\nu} K \xrightarrow{\kappa} Y$ exata, onde B é abeliano finito e Y nilpotente. Então $\exists \alpha \in \text{Hom}(A, B)$ e $\gamma \in \text{Hom}(X, Y)$ que produzem comutatividade no diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\mu} & C & \xrightarrow{e} & X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ B & \xrightarrow{\nu} & K & \xrightarrow{\kappa} & Y \end{array}$$

(3.2) Proposição: $\forall G \in |C|$, $\exists! u = u(G) \triangleleft G$, u abeliano finito com G/u nilpotente tq. $\Gamma_w^2 = u$, onde w é a ação associada à extensão $u \hookrightarrow G \rightarrow G/u$.

(3.3) $G \in |C_p| \rightarrow u$ p -grupo abeliano finito (Aqui C_p representa a sub-categoria plena de C formada pelos grupos que são extensões de grupos nilpotentes por p -grupos abelianos finitos).

(3.4) G nilpotente $\implies u = u(G) = \{1\}$.

(3.5) Corolário: $G \in |C_p| \cap |C_q|$, $p \neq q \implies G \in |\eta|$.

Passamos agora a definir $G_p \in |C|$ para cada $G \in C$.

Dado $G \in |C|$ fixemos $u = u(G)$ definido por (3.2), $G/u \xrightarrow{e} (G/u)_p$ P -localização (em η) de G/u e $w: G/u \rightarrow \text{Aut}(u)$ dada por $w(gu)u = gug^{-1}$.

Consideremos 4 casos:

Seja p um primo e suponhamos inicialmente que $G \in |C_p|$.

(I) $p \in P'$. Temos $e = e_0 \circ e$; $G \xrightarrow{e} G/u \xrightarrow{e_0} (G/u)_p$

Temos pois,

$$\begin{array}{ccccc} \xi: U & \xrightarrow{\mu} & G & \xrightarrow{\epsilon} & G/U \\ \downarrow & & \downarrow e & & \downarrow e_0 \\ \xi_p: (0) & \longrightarrow & (G/U)_p & \cong & (G/U)_p \end{array}$$

II) $p \in P$. Suponhamos $|w(G/U)| = q_1^{\alpha_1} \dots q_\ell^{\alpha_\ell} \dots q_t^{\alpha_t}$

II) a) $P \supset \{q_1, \dots, q_t\}$

Então, $w(G/U)$ é um P -sub-grupo de torção de $\text{Aut}(U)$, de modo que $\exists!$ ação $(G/U)_p \xrightarrow{w_p} \text{Aut}(U)$ tq. $w_p \circ e_0 = w$. (prop. (1.3)).

Também, $H_{w_p}^2((G/U)_p; U) \xrightarrow{e_0^*} H_w^2(G/U, U)$ pelo teorema (1.7).

Seja ξ_p tal que $e_0^* \xi_p = \xi$. Assim que,

$$\begin{array}{ccccc} \xi: U & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/U \\ \parallel & & \downarrow e & & \downarrow e_0 \\ \xi_p: U & \longrightarrow & G_p & \longrightarrow & (G/U)_p \end{array}$$

II) b) $\exists \ell, 1 \leq \ell \leq t$ tq. $P_1 = \{q_1, \dots, q_\ell\} \subset P'$ e $\{q_{\ell+1}, \dots, q_t\} \subset P$.

Seja $H = \langle x \in G/U : o(w(x)) \in P_1^x \rangle$; $\Gamma = \Gamma(H)$;

$\bar{w}: G/U \rightarrow \text{Aut}(U/\Gamma)$ como definidos logo após o teorema (1.7). A posição (1.8) nos autoriza a afirmar que $\exists!$ ação w_p tornando o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} G/U & \xrightarrow{\bar{w}} & \text{Aut}(U/\Gamma) \\ \downarrow e_0 & \nearrow w_p & \\ (G/U)_p & & \end{array}$$

Considerando a projeção $U \xrightarrow{\pi} U/\Gamma$ nós temos que $\exists!$ ξ_p tal que $e_0^* \xi_p = \pi_* \xi$ onde $H_w^2(G/U; U) \xrightarrow{\pi_*} H_{\bar{w}}^2(G/U; U/\Gamma) \xleftarrow{e_0^*} H_{w_p}^2((G/U)_p; U/\Gamma)$.

Obtemos pois o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \xi: U & \xrightarrow{\mu} & G & \xrightarrow{\epsilon} & G/U \\ \downarrow \pi & & \downarrow e & & \downarrow e_0 \\ \xi_p: U/\Gamma & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G_p & \xrightarrow{\epsilon_p} & (G/U)_p \end{array}$$

Neste ponto é importante salientar que temos definido
 $G \in \bigcup_p |C_p|$ $G_p \in |C|$ e esta definição é boa devido a (3.5) e (3.4).

Em particular esta construção estende aquela feita em [H.M.R.].

III) $G \in |C| \setminus \bigcup_p |C_p|$.

Então U não é p -grupo $\forall p$. Entretanto $U = \bigoplus_{i=1}^t U_i$, U_i = componente p_i -primária de U .

Também $G/U \xrightarrow{w} \text{Aut}(U) \cong \prod_{i=1}^t \text{Aut}(U_i)$ e $w = (w_1, \dots, w_t)$.

Temos, $H_w^2(G/U; U) \xrightarrow{(\pi_{1*}, \dots, \pi_{t*})} \bigoplus_{i=1}^t H_{w_i}^2(G/U; U_i)$ onde $\pi_i: U \rightarrow U_i$ é a projeção usual.

Seja $\xi_i = \pi_{i*} \xi$ e consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \xi \in H_w^2(G/U; U) & \xrightarrow{(\pi_{1*}, \dots, \pi_{t*})} & (\xi_i)_i \in \bigoplus_{i=1}^t H_{w_i}^2(G/U; U_i) \\ \downarrow \rho_* & \cong & \downarrow \bigoplus_{i=1}^t \rho_{i*} \\ \xi_p \in H_{w_p}^2((G/U)_p; \bar{U}) & \xrightarrow{(\bar{\pi}_{1*}, \dots, \bar{\pi}_{t*})} & ((\xi_i)_p)_i \in \bigoplus_{i=1}^t H_{(w_i)_p}^2((G/U)_p; \bar{U}_i) \end{array}$$

onde $\xi_i: U_i \xrightarrow{\mu_i} G_i \xrightarrow{\epsilon_i} G/U$ é definido por (I) ou II)a) ou II)b).

$$\begin{array}{ccccc} U_i & \xrightarrow{\mu_i} & G_i & \xrightarrow{\epsilon_i} & G/U \\ \rho_i \downarrow & & \downarrow e_i & & \downarrow e_0 \\ (\xi_i)_p: \bar{U}_i & \longrightarrow & (G_i)_p & \longrightarrow & (G/U)_p \end{array}$$

Também $\bar{U} = \bigoplus_{i=1}^t \bar{U}_i$ e $\exists! \xi_p$ tal que $(\bar{\pi}_{1*}, \dots, \bar{\pi}_{t*}) \xi_p = ((\xi_i)_p)_i$.

A respeito da aplicação $e: G \rightarrow G_p$ definida em qualquer um dos 4 casos acima temos:

(3.6) Proposição: G P -local $\Rightarrow$ é isomorfismo.

(3.7) Proposição: $G \xrightarrow{e} G_p \xrightarrow[\beta]{\delta} K$; K P -local. Então $\delta e = g e + \delta = g$

(3.8) Dado um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} U(G)=U & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/U \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ & & & & \dots \end{array}$$

Não é difícil mostrar que $\exists \bar{\alpha} \in \text{Hom}(\bar{U}, \bar{V})$ que torna comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & V \\ \rho_U \downarrow & & \downarrow \rho_V \\ \bar{U} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{V} \end{array}$$

Mais ainda, $\bar{\alpha}$ é na realidade morfismo de módulos.

(3.9) Teorema: $G, K \in |\mathcal{C}|$; $\exists! \beta_P \in \text{Hom}(G_P, K_P)$ produzindo comutatividade no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} \xi: U & \xrightarrow{\mu} & G & \xrightarrow{\epsilon} & G/U & \xrightarrow{e_0} & (G/U)_P \\ & \searrow \rho_U & \downarrow \beta & \searrow e & \downarrow \gamma & \searrow \epsilon_P & \downarrow \gamma_P \\ & \xi_P: \bar{U} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G_P & \xrightarrow{\epsilon_P} & (G/U)_P & \\ & \downarrow \alpha & \downarrow \bar{\alpha} & \downarrow \alpha & \downarrow \alpha & \downarrow \alpha & \downarrow \alpha \\ \xi: \bar{V} & \xrightarrow{\nu} & K & \xrightarrow{\alpha} & K/V & \xrightarrow{e_0} & (K/V)_P \\ & \searrow \rho_V & \downarrow \bar{\alpha} & \searrow e & \downarrow \alpha & \searrow \epsilon_P & \downarrow \gamma_P \\ & \xi_P: \bar{V} & \xrightarrow{\bar{\nu}} & K_P & \xrightarrow{K_P} & (K/V)_P & \end{array}$$

(3.10) O teorema (3.9) nos mostra que $G \leadsto G_P$ é um funtor e $\underline{e}$ é uma transformação natural.

(3.11) Corolário: $G \xrightarrow{e} G_P$ definida em (I); II)a); II)b) e III) P -localiza G em $\mathcal{C}$.

Referências:

- [H.M.R.] - Hilton P., Mislin G., Roitberg J. - "Localization of Nilpotent Groups and Spaces", Notas de Matemática, North Holland Mathematics Studies 15 (1975).
- [Re] - Reynol FQ, Augusto - "Sobre o Grau de Nilpotência das Ações de um Espaço Nilpotente e Localização de Certas Classes de Grupos" - Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística da USP (1987).
- [Ri] - Ribenboim, P. - "Torsion et Localization de Groupes Arbitraires", Sem. d'Algebre Paul Dubreil, Paris, 1977. Lectures Notes in Mathematics n°740, 444-456, Springer-Verlag, New York, 1978.