



CÁLCULO DIFERENCIAL

com funções polinomiais,
racionais e exponenciais:
modelagem e múltiplas
representações

*Leonardo Barrichello¹, Disney Douglas de Lima Oliveira²,
Bruno Dias Amaro³*

INFORMAÇÕES GERAIS DA DISCIPLINA

Semestre estimado de curso:

2º semestre

Carga horária prevista:

60 horas

Número de semanas previstas:

15 semanas

Duração das aulas:

4 horas semanais

¹ Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9219763853557280>

² Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0809035825922353>

³ Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5156880194736533>

O CPC no programa “Cálculo diferencial com funções polinomiais, racionais e exponenciais”

Bárbara Born

O último programa expandido de disciplina trabalha com um conteúdo mais tradicionalmente associado ao curso de Licenciatura em Matemática. Como o leitor poderá perceber, trata-se de um curso que apresenta uma carga mais intensa de conteúdos especializados, desempenhando papel estruturante no desenvolvimento do conhecimento especializado do conteúdo por parte dos estudantes.

Essa ênfase mais acentuada no conteúdo, todavia, não coloca o CPC em segundo plano. Como discutido no capítulo introdutório, um entendimento profundo dos saberes disciplinares é essencial para que o professor desenvolva sua capacidade de representar o conteúdo de maneira adequada. No caso específico desta disciplina, os autores do programa exploram em profundidade conhecimentos essenciais para o currículo da educação básica, articulando-os, ao longo do processo, com saberes matemáticos mais característicos do ensino superior.

Além do foco no conhecimento curricular — apontado pela literatura de CPC como um de seus elementos estruturantes —, o programa destaca dois aspectos centrais para a formação do futuro professor: a modelagem matemática e as múltiplas representações.

No caso da formação do futuro professor de matemática, o uso da modelagem é particularmente relevante porque oferece um repertório que estabelece uma ponte entre situações do mundo real e conceitos matemáticos. Em especial, auxilia os licenciandos a responderem a questionamentos comuns na escola, ao construir ferramentas que os ajudem a compreender a matemática como linguagem e instrumento para interpretar o mundo.

O curso também dedica atenção importante ao uso de diferentes representações para o trabalho com funções de uma variável. As múltiplas formas de representar um mesmo conteúdo são elementos estruturantes da formação docente e contribuem de modo decisivo para a elaboração de planos de aula efetivos, capazes de favorecer a compreensão dos estudantes da educação básica.

Do ponto de vista avaliativo, o programa sugere o uso de instrumentos mais presentes no contexto acadêmico. Ainda assim, é relevante observar como essas propostas articulam o conhecimento especializado do conteúdo ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Nos exemplos apresentados pelos autores, um mesmo problema matemático é explorado tanto para investigar a construção do conhecimento e a capacidade de aplicação dos licenciandos quanto para propor questões sobre como estudantes da educação básica lidariam com o problema.

Um ponto importante a ser destacado para aqueles que utilizem ou se inspirem nesse programa é que a maneira como a disciplina é conduzida é fundamental para o desenvolvimento do CPC dos licenciandos. Além do foco na modelagem matemática e na construção de um repertório sólido sobre representações, é essencial empregar estratégias variadas de ensino e oferecer múltiplas oportunidades para que os estudantes analisem a prática do docente da disciplina de modo metacognitivo, fortalecendo, assim, sua formação enquanto futuros professores.

Descrição da disciplina

A disciplina revisita algumas famílias de funções elementares vistas na educação básica, nomeadamente as funções polinomiais, racionais e exponenciais, aprofundando o entendimento de suas características essenciais. Para tanto, os conceitos de limite e derivada de funções de uma variável serão introduzidos e discutidos, ampliando o entendimento das características dessas funções e as possibilidades de aplicações em novos tipos de problemas. Ao longo do curso, os estudantes terão contato com a modelagem e farão uso de múltiplas representações de forma bastante intensa.

Objetivos da disciplina

Durante esta disciplina, você construirá conhecimentos sobre o conceito de função de uma variável para além do que já é visto na educação básica, incluindo as ideias de limite e derivadas. Também desenvolverá habilidades matemáticas relacionadas à modelagem e ao uso de múltiplas representações. Esperamos que, ao final do módulo, você possa:

- modelar algebricamente problemas do mundo real, tendo a experiência significativa com o uso de modelagem matemática em sala de aula;
- utilizar múltiplas representações (algébrica, gráfica e numérica) no estudo de funções de uma variável, especialmente a partir do uso de *softwares* ou outros recursos de tecnologias digitais;
- compreender as características de famílias de funções elementares (polinomiais, exponenciais e logarítmicas), incluindo tanto aspectos que podem ser discutidos na educação básica quanto aspectos avançados envolvendo os conceitos de limites e derivadas;
- aplicar os conceitos de funções, limites e derivadas no entendimento de fenômenos diversos.



IMPORTANTE

A premissa central por trás da elaboração desta disciplina é que os conceitos típicos de uma disciplina de cálculo diferencial são introduzidos como ferramentas adicionais para aprofundar o entendimento das famílias de funções elementares que são tipicamente estudadas na educação básica.

Dessa forma, o ponto de partida de cada uma das unidades que serão apresentadas a seguir são funções discutidas na educação básica e o avanço dentro do módulo segue uma lógica de aprofundamento do entendimento das suas características em ciclos que, conseqüentemente, adensam o entendimento dessas novas ferramentas.

Por exemplo, a primeira unidade, que trata de funções polinomiais, tem início com a modelagem de fenômenos lineares e progressivamente, introduz as ideias de limites, a partir do comportamento destas funções e a ideia de derivada, a partir da identificação gráfica de máximos e mínimos de funções quadráticas e cúbicas. As demais unidades, com outras famílias de funções, seguem os mesmos princípios, adequados à realidade de cada família de funções.

Avaliação e notas

Esperamos que você assista a todas as aulas, participe ativamente e apresente todas as tarefas a tempo. Sugerimos a utilização de dois instrumentos concebidos especificamente para esta disciplina:

- Atividades curtas semanais dos conteúdos abordados naquela semana.
- Provas, por unidade, que utilizem o mesmo contexto para modelagem matemática que possa ser discutida tanto em termos de conceitos da educação básica, bem como a conteúdos programáticos relacionados com o ensino superior.

Cada tarefa e/ou prova inclui instruções e critérios de avaliação. O critério (sugerido) é que a nota de cada Unidade seja composta por 20% da nota relacionada às atividades curtas semanais e 80% das provas. Nesse cenário, haverá 03 avaliações por Unidade de forma que, a critério do professor, essas avaliações podem ser ponderadas entre si à forma que o docente julgue procedente.

Se o seu desempenho não atingir o padrão esperado, havendo a disponibilidade de monitor, você será solicitado a revisar e apresentar novamente algumas (a critério do docente) das atividades avaliativas. Você deve procurar toda a ajuda que puder junto a seus pares, docente e (se houver) tutores e mentores.

Atividades avaliativas

Prazos de entrega

Atividades	Atividades curtas baseadas em conteúdos discutidos em sala de aula, a serem entregues na semana subsequente à aula dada.	Semanalmente
Prova 1	Prova baseada nos conteúdos abordados da primeira Unidade (Aulas 01 a 14)	Aula 15
Prova 2	Prova baseada nos conteúdos abordados da segunda Unidade (Aulas 16 a 29)	Aula 30

IMPORTANTE

A seguir, trazemos a justificativa para cada um dos instrumentos sugeridos acima:

- **atividades curtas semanais:** como a disciplina abrange uma quantidade significativa de tópicos propostos, essas atividades promovem um estudo contínuo dos conteúdos a fim de aprimorar o seu desenvolvimento ao longo do curso.
- **provas:** este instrumento vem para que o estudante demonstre domínio de tópicos que são relacionados à educação básica, mas que são necessários para o desenvolvimento de disciplinas futuras no decorrer do curso superior. Como o conteúdo da disciplina foi desenhado para manter proximidade com o currículo da Educação Básica, isso abre portas para que aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem também sejam explorados nas provas.

Tais sugestões vem ao encontro de dois aspectos que são centrais na consecução dos objetivos da disciplina. Primeiramente, é preciso ter em mente que todas as atividades dessa disciplina foram desenhadas como evidências da apropriação das habilidades e conteúdos trabalhados em cada aula. São esses elementos que você deve buscar na hora de analisar os trabalhos dos estudantes participantes e suas aulas devem contribuir para que eles construam habilidades necessárias para fazê-los.

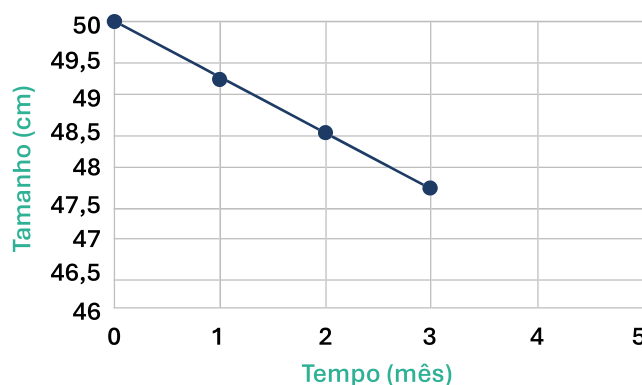
O segundo aspecto diz respeito às devolutivas que você dará aos estudantes. Havendo disponibilidade de apoio pedagógico, seriam especialmente recomendáveis devolutivas individuais e com profundidade para as atividades curtas semanais, uma vez que elas podem contribuir para o processo de aprendizagem e ter papel verdadeiramente formativo. No caso de não haver apoio ao docente, podem ser usadas estratégias alternativas, como uso de questões objetivas realizadas em ambientes online (Ambientes Virtuais de Aprendizagem) que facilitem a entrega e correção das atividades propostas.

Em relação ao critério de notas, sugerimos que a nota de cada Unidade seja composta por 20% da nota relacionada às atividades curtas semanais e 80% das provas.

Atividade 1 - Atividade curta semanal

Este é um exemplo de atividade curta semanal que combina, em uma mesma questão, aspectos matemáticos do currículo da educação básica (itens a e b) com aspectos que podem ser aprofundados com auxílio de matemática avançada (item d) e aspectos do conhecimento pedagógico de conteúdo (item c).

Questão: No espaço, a falta de gravidade faz com que o organismo produza mais cálcio e, como o mineral não é usado, o corpo o expele, fazendo com que os ossos diminuam de tamanho. Um dos ossos que mais sofrem essa redução é o fêmur. O gráfico apresenta a evolução linear do tamanho desse osso, ao longo de três meses, em um astronauta que, antes de ir para o espaço, tinha um fêmur de 50 cm.



DUARTE, M. *O guia dos curiosos*. São Paulo: Panda Books, 2015 (adaptado)

Supondo que esse comportamento se mantenha para mais tempo no espaço, obtenha a função que relaciona o tempo (**t**) no espaço (em meses) com o tamanho (**f**) do fêmur (em **cm**) para esse astronauta.

A partir da função obtida no item anterior, determine qual será o tamanho do fêmur após 6 meses no espaço.

Discuta a pertinência desse modelo para fazer previsões sobre o tamanho do fêmur após períodos muito longos de permanência no espaço.

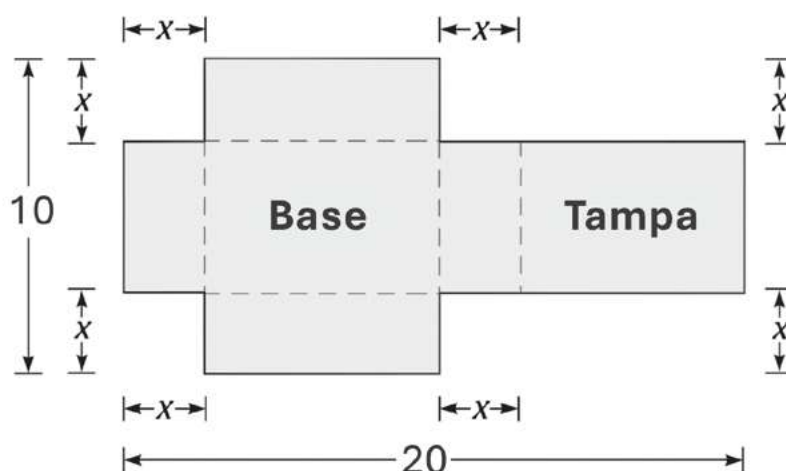
Embora essa questão esteja formulada em termos de funções, é possível resolver sem utilizar de forma direta esse conceito. Resolva a questão do item b utilizando uma estratégia que não dependa da obtenção explícita da função que relaciona **t** e **f**.

Discorra sobre quais conhecimentos matemáticos foram mobilizados na resolução do item anterior e aponte em qual nível de ensino essa abordagem já poderia ser discutida com estudantes da educação básica.

Atividade 2 - Prova

Este é um exemplo de duas questões que poderiam compor a prova da Unidade 1. A primeira questão é mais focada no conteúdo matemático, mas tem início com perguntas compatíveis com o currículo da educação básica. Já a segunda, foca em aspectos mais relacionados ao conhecimento pedagógico de conteúdo.

Questão 1: Deseja-se construir caixas com tampa a partir de uma folha de papelão medindo 20 cm por 10 cm. Para construir a caixa, dois quadrados e dois retângulos são removidos dos cantos da folha de papelão, como indicado na figura a seguir.



Determine o volume da caixa resultante quando $x=1$, $x=2$, $x=3$ e $x=4$ e indique o valor que resultou no maior volume.

Marque os pontos em um eixo cartesiano dado e indique, a partir desses valores, em qual intervalo pode estar um valor de x que resulte em um volume maior do que o obtido no item a. Justifique sua resposta.

Obtenha uma função que relacione volume da caixa resultante com a medida de x .

Determine, a partir das restrições do problema, o domínio dessa função e o menor valor que ela assume nesse intervalo.

Utilize derivadas para determinar os pontos críticos dessa função.

Utilize as características do gráfico sugerido pelos pontos do item b para justificar se o(s) ponto(s) crítico(s) encontrado(s) é (são) de máximo, mínimo ou inflexão.

Determine o maior volume que se pode obter pelo processo descrito na questão.

Questão 2: Na questão anterior, utilizamos derivadas para obter as coordenadas exatas do ponto de máximo do problema, porém, essa ferramenta não é discutida no ensino médio. De todo modo, essa mesma atividade poderia ser realizada neste nível de ensino a partir de duas estratégias:

1. Esboçar o gráfico da função a partir de alguns valores específicos e inferir, a partir dele, qual é o ponto de máximo
2. Construir o gráfico da função com auxílio de um *software* e obter o ponto de máximo da função.

Qual dessas estratégias você utilizaria caso desejasse realizar uma atividade baseada na questão anterior no ensino médio? Aponte as vantagens da sua escolha.

Referências bibliográficas

ÁVILA, Geraldo; ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de. **Cálculo**: ilustrado, prático e descomplicado. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

GOMES, Francisco Magalhães. **Pré-Cálculo**: operações, equações, funções e sequências. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A matemática do Ensino Médio**: volume 1. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção do Professor de Matemática).

NASSER, Lilian; BIAZUTTI, Angela Cássia. **Transição do Ensino Médio para o Superior**: pré-cálculo com resolução de problemas e GeoGebra. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2013. E-book. Disponível em: https://www.im.ufrj.br/images/documentos/prec_lculo_final.pdf. Acesso em: 26 nov. 2025.

NRICH. **Secondary Level Pure Resources**. Cambridge: University of Cambridge, [s.d.]. Disponível em: <https://nrich.maths.org/level-pure-resources>. Acesso em: 26 nov. 2025.

STEWART, James; CLEGG, Daniel K.; WATSON, Saleem. **Cálculo**: volume 1. Tradução de Ez2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2021.

UM LIVRO ABERTO. **Funções**. Rio de Janeiro: IMPA, [s.d.]. Disponível em: <https://umlivroaberto.impa.br/producao/funcoes/>. Acesso em: 26 nov. 2025.

UNDERGROUND MATHEMATICS. **Home**. Cambridge: University of Cambridge, [s.d.]. Disponível em: <https://undergroundmathematics.org/>. Acesso em: 26 nov. 2025.

UNIDADE 1

Funções polinomiais

A partir do estudo das funções polinomiais, iniciando com as funções afim e quadrática, o objetivo desta unidade é aprofundar o entendimento das características dessas funções e, ao longo do processo, introduzir e aplicar as ferramentas de limite e derivada dessa classe de funções. Também faz parte dos objetivos introduzir, via definição intuitiva, conceitos como continuidade e assíntotas. Ao final, introduzimos as funções racionais por oferecerem um contexto especialmente rico para discutir domínio, imagem, assíntotas e permitir novas aplicações. Ao longo de toda a unidade, discussões sobre modelagem e uso de múltiplas representações devem ser feitas para que o repertório dos estudantes se expanda, apoiando sua futura atuação na educação básica.

A tabela abaixo é uma sugestão de organização para as aulas dessa unidade com indicação dos tópicos matemáticos centrais e aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem de matemática que podem ser discutidos ao longo dos encontros.

Aula 1

Função afim e por partes: modelagem, gráficos e conexões entre elementos da representação algébrica e gráfica

Aula 2

Função afim e por partes: ideias iniciais de limite e continuidade

Aula 3

Funções quadráticas: modelagem, gráficos e conexões entre elementos da representação algébrica e gráfica

Aula 4

Funções quadráticas: modelagem e otimização

Aula 5

Funções cúbicas: otimização de volumes, gráficos e uso de ferramentas digitais para articulação entre diferentes representações

Aula 6	Aula 11
Funções cúbicas: interpretação visual de derivadas; uso de ferramentas digitais para visualização e conexão entre os conceitos de retas secantes e tangentes	Função racional: modelagem explorando a relação entre diferentes áreas da matemática através de problemas de otimização com objetos geométricos
Aula 7	Aula 12
A derivada como uma reta tangente ao gráfico em funções afim, quadrática e cúbica; uso de ferramentas digitais para visualização	Função racional: retomada de conceitos fundamentais de funções, como domínio, limite e gráficos; foco na compreensão conceitual e erros comuns na educação básica
Aula 8	Aula 13
Relação das derivadas com velocidade e aceleração	Função racional: assíntotas
Aula 9	Aula 14
Técnicas de derivação para funções polinomiais	Modelagem como abordagem de ensino; problemas de otimização
Aula 10	Aula 15
Técnicas de derivação para funções polinomiais	Prova 1

UNIDADE 2

Exponenciais e logarítmicas; aplicações das derivadas

Na segunda unidade, expandimos as ferramentas e conceitos de cálculo diferencial que foram introduzidas na unidade anterior para o universo das funções exponenciais e logarítmicas. O intuito é aprofundar o conhecimento sobre as características dessas funções e, em um segundo momento, permitir a aplicação desses conhecimentos na modelagem de novos fenômenos. Ao final dessa unidade, são introduzidas algumas técnicas de derivação que podem ser usadas para outras classes de funções. Não faz parte dos objetivos deste curso a prática exaustiva dessas técnicas, pois o curso dá maior ênfase ao entendimento profundo das funções elementares. Entretanto, as técnicas foram incluídas por constituírem ferramenta que pode ser usado em outras disciplinas e, por isso, é importante que os estudantes estejam familiarizados com elas.

A tabela abaixo é uma sugestão de organização para as aulas dessa unidade com indicação dos tópicos matemáticos centrais e aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem de matemática que podem ser discutidos ao longo dos encontros.

Aula 1

Equações e inequações exponenciais; potenciais erros de estudantes da educação básica ao aplicar as ferramentas conhecidas na resolução dessa nova família de equações

Aula 2

Logaritmos na resolução de equações exponenciais; aspectos históricos sobre a origem do conceito de logaritmo

Aula 3

Logaritmos na resolução de equações exponenciais

Aula 4

Função exponencial:
modelagem e gráficos

Aula 5

Função exponencial: modelagem e gráficos; práticas interdisciplinares via problemas que envolvem relações exponenciais

Aula 6	Aula 11
A derivada de função exponencial vista como limite	Regra do produto e quociente
Aula 7	Aula 12
Técnicas de derivação de função exponencial	Regra da cadeia; potencialidades de uso de <i>softwares</i> para obtenção de derivadas mais complexas
Aula 8	Aula 13
Técnicas de derivação de função logarítmica	Resolução de problemas aplicados; conexões entre essa metodologia e a modelagem matemática
Aula 9	Aula 14
Funções não elementares (produto, quociente e composta): gráficos; potencialidades de uso de <i>softwares</i> para plotar gráfico de funções na educação básica	Resolução de problemas aplicados
Aula 10	Aula 15
Funções não elementares (produto, quociente e composta): otimização	Prova 2

Descrição geral de um conjunto de aulas

Aulas 5, 6 e 7

CONTEÚDOS DO BLOCO DE AULAS

- Modelagem de um problema aplicado
- Funções cúbicas
- Gráfico
- Valores máximos e mínimos
- Domínio

OBJETIVOS DA DISCIPLINA ABORDADOS NO BLOCO DE AULAS

- Discutir as características das funções cúbicas
- Introduzir o conceito de derivada a partir de um problema de otimização
- Aplicar o conceito de derivada para uma função específica
- Aplicar modelagem para resolver um problema aplicado
- Utilizar múltiplas representações na resolução de um problema

Descrição geral do bloco de aulas

1. O bloco de aulas tem início com a apresentação do problema de otimização do volume de uma caixa de papel sem tampa construída a partir de uma folha tamanho A4. Em um primeiro momento, segue-se uma abordagem compatível com o ensino médio, em que os estudantes constroem fisicamente as caixas, medem as suas dimensões, calculam o volume e identificam o maior valor obtido. Essa abordagem é descrita no repositório de recursos educacionais multimídia da Unicamp (M3 Matemática Multimídia, [s.d]);
2. Em um segundo momento, a investigação migra para o ambiente digital e sugere-se que os estudantes explorem a construção com o auxílio de algum *software* de geometria dinâmica, possibilitando a análise de mais valores de x , gráfico da função específica do problema e da função em sentido mais geral. Nesse momento, identificam-se propriedades visuais do ponto de máximo dessa função particular, permitindo que na próxima aula isso seja algebrizado. Uma sugestão de construção dinâmica que pode ser usada nessa aula está disponível na seção de recursos da plataforma GeoGebra (Douglas, [s.d.]);

3. Na última parte, apresenta-se o conceito de derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico, entendida como uma secante quando a variação em x se torna cada vez menor. Com isso, aplica-se o conceito de tangente à função específica do problema usando a notação de limite para calcular sua derivada. Ao igualar esse resultado a zero, obtêm-se valores que são analisados levando em conta o gráfico discutido na aula anterior.

SUGESTÕES PARA A AULA

Note que esse bloco de aulas segue a proposta de iniciar um conteúdo com uma atividade que seja compatível com a educação básica e, como consequência de uma discussão cada vez mais profunda, atinge conceitos e ferramentas típicos do ensino superior.

O problema escolhido é formulado como uma questão de modelagem e é resolvido pelo uso de múltiplas representações. Esses dois aspectos devem ser discutidos e salientados ao longo da sequência de aulas para que os futuros professores estejam cientes das suas características e potencialidades.

Outro aspecto relevante se refere a como o conceito de derivada é tratado: com menos ênfase na prática de aplicação de técnicas de derivação e mais ênfase na motivação para criação do conceito e no seu significado conceitual. Isso se alinha à nossa visão de que tecnologias devem ser incorporadas de forma mais orgânica ao trabalho matemático. Como atualmente é muito simples ter acesso a **softwares** que são capazes de aplicar técnicas de derivação, esse aspecto pode ser menos enfatizado em um curso para futuros professores da educação básica.

Também queremos salientar a grande variedade de representações que podem ser usadas ao longo desse bloco de aulas: construções físicas, tabelas de dados, plano cartesiano, construções digitais e representações algébricas. Todas elas aparecem naturalmente integradas à forma como o problema está sendo discutido ao longo do bloco de aula, permitindo, inclusive, a conexão entre elas.

REFERÊNCIAS

DOUGLAS, Disney. **Otimização: caixa com tampa**. [S. l.]: GeoGebra, [s.d.]. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/f6tc2gmu>. Acesso em: 27 nov. 2025.

M3 MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. **Caixa de papel**. Campinas: UNICAMP, [s.d.]. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367>. Acesso em: 27 nov. 2025.