

ESTABILIZAÇÃO E FEED-BACK EM EQUAÇÕES INTEGRAIS LINEARES DE VOLTERRA-STIELTJES DO TIPO (K)

L.Barbanti

IME-USP

I - INTRODUÇÃO

1. Ao estudar resultados para as Equações Integrais lineares de Volterra-Stieltjes do tipo (K), estamos estudando, na verdade, resultados para Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais Funcionais do tipo Neutro, Sistemas do tipo $\dot{x} = Ax + f(t)$ em espaços de Banach, equações com ação impulsiva, equações a diferença retardadas, em espaços de Banach e mais geralmente, equações do tipo $\alpha \dot{u}(t, x) + \beta u(t-r_1, x) = u_{xx}(t, x) + \gamma u_{xx}(t-r_2, x) + f(u(t-r_3, x) + h(t, x)$, entre outras (v. [1], [2] e [3]).

Neste artigo vamos estudar algumas conexões entre controlabilidade, estabilização e existência de operador feed-back para o sistema (K).

2.a - A equação (K) tem esta expressão:

$$(K) \quad x(t) - x(0) + \int_0^t d_s K(t, s) \cdot x(s) = f(t) - f(0)$$

$$(0 \leq t \leq T \leq \infty)$$

onde sendo X um espaço de Banach, $x, u \in G([0, T], X)$,
(o espaço das funções regradas-1.é. com descontinuidades
apenas de 1ª. espécie, com a norma do sup.) e $K \in G_0^{\sigma} \cdot SV^u$
(v. [1] para as definições)

b - Em [1] , Th.3.8., Hönig dá condição suficiente para
existência de um único operador-resolvente R , associado
ao núcleo K , de tal modo que toda solução de (K) pode ser
escrita como

$$(g) \quad x_f(t) = f(t) - R(t, 0) \cdot [f(0) - x(0)] - \int_0^t d_s R(t, s) \cdot f(s).$$

Observações 1º - Se em (K), tivermos $T = \infty$, conside-
ramos $G([0, \infty), X)$ como a classe das $f: [0, \infty) \rightarrow X$,
regradas em $[0, \infty)$ e com $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \in X$. Isto faz com
que os resultados da teoria em [1] se apliquem indistinta-
mente nos casos $T < \infty$ e $T = \infty$.

2º - Remetemos definitivamente o leitor
interessado nos vários aspectos da teoria básica de (K),
às obras de Hönig (v. Bibliografia em [1]).

3º - Quando estamos considerando controlabi-
lidade em (K) através de forcings $f = u \in \Omega$ enfatizamos
a questão, trocando a notação de (K) para $(K)'_u$. Neste
artigo consideraremos sempre $\Omega \subset G_0([0, T], X)$, que é o
conjunto das funções regradas, com $f(0) = 0$.

3. Dado $t_1 \gg 0$, definimos o conjunto de atingibilidade à partir da origem em tempo t_1 , através de Ω , segundo $(K)_u$ como:

$$W(t_1, K, \Omega) = \{x_u(t_1); u \in \Omega; x(0) = 0\}$$

Quando $t_1 = \infty$ definimos:

$$W(\infty, K, \Omega) = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} x_u(t); u \in \Omega; x(0) = 0 \right\}$$

II - ESTABILIZAÇÃO

1. Dado $z \in X$, dizemos que z é estabilizável através de Ω , segundo $(K)_u$ se existe $u \in \Omega$, tal que $x_u(0) = z$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} x_u(t) = 0$. Denotamos o conjunto de tais pontos z , por $\xi(K, \Omega)$.

2. Definindo o operador $R_\infty \in L(X)$, como $R_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t, 0)$, podemos enunciar os seguintes resultados imediatos ao se considerar a fórmula (9):

$$1^\circ \xi(K, \Omega) = R_\infty^{-1} (R_\infty(X) \cap W(\infty, K, \Omega)).$$

2? Suponhamos $R_\infty = I$ e

$$A = \{x \in X; \forall t > 0 (u(t) = -[K(t,0) + I]x \Rightarrow u \in \Omega)\}$$

Então $A \subset \xi(K, \Omega)$.

III - FEED-BACK E ESTABILIZAÇÃO

Dado K um núcleo admissível em (X) , seja $F : [0, T] \times [0, T] \longrightarrow L(X)$, tal que $K-F$ também é admissível e além disso satisfaça as condições do Th. 3.8 de [1], para existência de um resolvente único $\hat{R}$. Definindo $\hat{R}_\infty$ de modo análogo a R_∞ , podemos enunciar o seguinte teorema, que associa a estabilização de um sistema homogêneo com núcleo perturbado (por um operador feed-back) e a estabilização do sistema sem perturbação, controlado.

Teor. 1: Sejam K, Ω , F , $\hat{R}$ o resolvente associado ao núcleo $K-F$ e $\hat{R}_\infty$, como acima. Definido para cada $z \in X$,

$$u_z(t) = \int_0^t ds F(t,s) \cdot R(s,0)z,$$

seja $A = \{z \in \text{Ker } \hat{R}_\infty; u_z \in \Omega\}$.

Então, $A \subset \xi(K, \Omega)$

Dem.: Se $z \in \mathcal{E}(K-F, \{0\})$, então definindo $\hat{x}$ como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = \hat{R}_{\infty} \cdot z = 0$$

temos através de (5) que $\hat{x}$ satisfaz

$$\hat{x}(t) = z + \int_0^t .d_s K(t,s) \hat{x}(s) = \int_0^t .d_s F(t,s) . \hat{R}(s,0) z$$

Se $u_z \in \Omega$, então vemos que $z \in \mathcal{E}(K, \Omega)$

Como mais frequentemente na literatura, considerando o sistema parametrizado $(K)_{Bu}$,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t .d_s K(t,s) x(s) = Bu(t)$$

onde $u \in Y$, espaço de funções, e $B: Y \rightarrow G([0, \infty], X)$ é linear, podemos enunciar:

Teor. 2: Seja K e suponha que existe F tal que

$K + BF$ é núcleo admissível no sentido acima, com resolvente único $\hat{R}$. Se $\hat{R}_{\infty} = 0$, então existe Ω , tal que $\mathcal{E}(K, \Omega) = X$

Dem.: $\Omega = \{u_z; z \in X\}$ e B não depende de t .

Bibliografia

- [1] C.S.Hönig "Equations intégrales généralisées et applications" Publ. Mathém. d'Orsay, 1981-82.

- [2] L.Fichman "Equações do tipo Neutro vistas como equações integrais, e pontos hiperbólicos" Tese de Doutorado IME-USP, 1990 (no prelo)

- [3] L.Fichman "Equações a derivadas parciais, retardadas vistas como equações integrais" Pré-print dos "Seminários sobre Teoria da Integração e Equações Integrais, — IME-USP", set.1990.