

Path-following strategy in bifurcation problems of thin-walled members by positional Finite Element Method

Henrique B. Soares¹, Rodrigo R. Paccola¹, Humberto B. Coda¹

¹*Dept. of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo
Av. Trabalhador São Carlense, 400, 13566-590, São Carlos, SP, Brazil
henriquebsoares@usp.br, rpaccola@sc.usp.br, hbcoda@sc.usp.br*

Abstract. In the present study, a computational framework is developed to the determination of thin-walled profiles' equilibrium paths. These developments apply a geometric nonlinear formulation of the Finite Element Method (FEM) based on the Total Lagrangian description of equilibrium. Besides, the mesh is composed of positional shell finite element, in which the nodal degrees of freedom are positions, generalized vectors and linear rate of thickness variation. The material's behavior is represented by the Saint-Venant-Kirchhoff constitutive law. Moreover, the precisely obtaining of the fundamental equilibrium path is executed by the Arc-Length strategy coupled with the nonlinear solution technique based on the Newton-Raphson method. In this sense, the main purpose of the present study is to obtain the multiple equilibrium paths starting from the same bifurcation point. Therefore, a path-following approach is developed to induce the search for the requested path. The strategy consists of imposing a perturbation on the current configuration, which is related to the eigenvector of the required mode. This eigenvector is computed by means of a buckling analysis performed on the current configuration. The perturbation is imposed as an external force, being applied close to the bifurcation point and removed as soon as it enters the desired path. In this way, the equilibrium paths that present a bifurcation point can be completely determined without the consideration of imperfections on the initial configuration, as it is traditionally done. Finally, one example are compared against data available in literature, in which the accuracy, robustness and applicability of the proposed formulation are demonstrated.

Keywords: Instability Analysis, Bifurcation, Arc-Length Method, Geometrically Exact FEM, Positional FEM

1 Introdução

Os avanços tecnológicos da indústria do aço permitiram a utilização de perfis de parede fina para finalidade estrutural. No entanto, a espessura reduzida de tais perfis, em conjunto com sua aplicação para grandes vãos, os torna susceptíveis a fenômenos de instabilidade local e global. Adicionalmente, é inerente ao processo de fabricação desses elementos estruturais a presença de imperfeições geométricas, que devem ser adequadamente inseridas na análise mecânica. Nesse panorama, abordagens analíticas para o estudo de tais perfis tornam-se limitadas, dado o alto grau de complexidade para lidar com as especificidades do problema mecânico em discussão. Diante dessa problemática, os métodos numéricos são uma excelente ferramenta para promover a precisa representação mecânica das estruturas, especialmente em análises de estabilidade.

Dentre os métodos numéricos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente empregado para estudo do comportamento mecânico das estruturas. Diversos trabalhos aplicaram-no com sucesso para a determinação de cargas críticas e de comportamento pós-crítico de estruturas de parede fina, como Wagner e Wriggers [1], Shi [2], Fujii e Okazawa [3], Basaglia et al. [4] e Radau et al. [5]. Destaca-se aqui a aplicação recente da formulação posicional do MEF para análises de estabilidade a partir dos trabalhos de Soares et al. [6, 7]. Sua aplicação até então se limitou à obtenção de cargas críticas e de trajetórias de equilíbrio secundárias estáveis via método de Newton-Raphson.

O presente trabalho visa mitigar essa limitação, permitindo que trajetórias secundárias instáveis sejam precisamente determinadas. Nesse sentido, propõe-se o emprego da estratégia Arc-Length, que inclui o incremento de força como uma variável do problema, acoplada com análises de estabilidade ao longo da trajetória. Para a obtenção de trajetórias secundárias é determinada uma força de perturbação baseada no autovetor correspondente ao modo escolhido. Esta força é então aplicada na vizinhança do ponto de bifurcação, de forma a ultrapassá-lo.

Apresenta-se nas próximas seções a formulação numérica base, que inclui o MEF posicional e a estratégia de solução Arc-Length. Descreve-se em seguida a forma de obtenção da força de perturbação. Por fim, um exemplo numérico é apresentado, a partir do qual verifica-se a estratégia proposta.

2 Formulação numérica

Utilizou-se neste trabalho uma formulação não-linear geométrica baseada na descrição Lagrangeana Total do equilíbrio. Foi empregado o elemento finito de casca posicional, que possui posições nodais, vetores generalizados e taxa de variação de espessura como graus de liberdade. Esse elemento finito foi primeiro apresentado por Coda e Paccola [8] e as funções de mapeamento que definem a cinemática do elemento são expressas como:

$$\zeta^0(\xi) = \varphi^k(\xi)\mathbf{x}^k + \frac{h_0}{2}\xi_3\varphi^k(\xi)\mathbf{n}^k \quad (1)$$

$$\zeta^1(\xi) = \varphi^k(\xi)\mathbf{y}^k + \frac{h_0}{2}[\xi_3 + \varphi^m(\xi)a^m\xi_3^2]\varphi^k(\xi)\mathbf{v}^k \quad (2)$$

nas quais h_0 é a espessura da casca, φ^k é a função de forma do nó k , $\mathbf{x}^k$ e $\mathbf{y}^k$ são as posições nas configurações inicial e atual, respectivamente, do nó k , $\mathbf{n}^k$ é o vetor normal do nó k na configuração inicial, $\mathbf{v}^k$ é o vetor generalizado do nó k na configuração atual e a^m é a taxa de variação da espessura do nó m . Esse esquema de mapeamento está apresentado na Fig. 1.

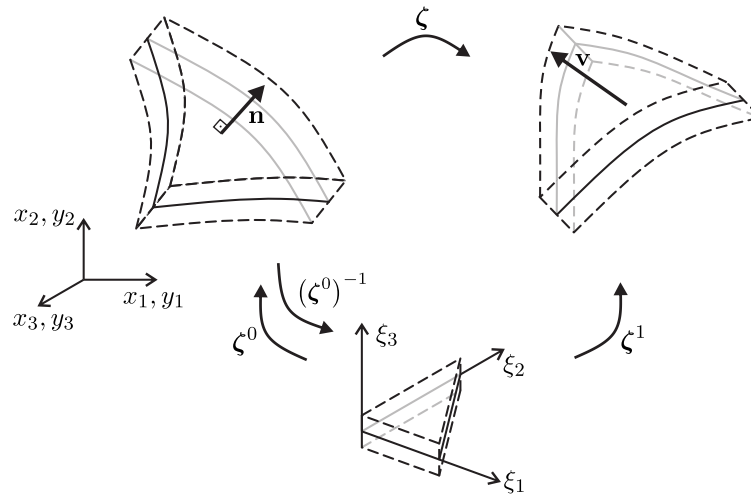


Figura 1. Mapeamentos das configurações inicial e atual a partir de um espaço paramétrico adimensional

Adotou-se para a representação do material a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, cuja expressão de energia específica é dada como:

$$u_e(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (3)$$

em que $\mathbf{E}$ é o tensor de deformações de Green-Lagrange e $\mathbf{C} = 2G[\mathbf{3} + \nu/(1 - 2\nu)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}]$ é o tensor constitutivo elástico, sendo G o módulo de elasticidade transversal, ν o coeficiente de Poisson, $\mathbf{3}$ o tensor identidade de 4ª ordem, $\mathbf{I}$ o tensor identidade de 2ª ordem e $\otimes$ denota produto tensorial.

As equações de equilíbrio são aqui obtidas a partir do princípio da estacionariedade da energia mecânica. Dessa forma, assumindo a existência de um potencial Π composto pelas parcelas de energia de deformação U e de energia potencial das forças externas P , isto é, $\Pi = U + P$, o equilíbrio é satisfeito quando a primeira variação do potencial Π é nula, ou seja:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta P = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} \right) \cdot \delta \mathbf{q} = 0 \quad (4)$$

em que $\mathbf{q}$ é o vetor de parâmetros nodais generalizados que inclui posição nodal $\mathbf{y}^k$, vetor generalizado $\mathbf{v}^k$ e taxa de variação de espessura a^k de cada nó k da discretização.

Considerando a arbitrariedade de $\delta \mathbf{q}$, a eq. (4) resulta em um sistema não-linear do tipo $\mathbf{f}^{\text{int}} - \mathbf{f}^{\text{ext}} = \mathbf{0}$, sendo:

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{q}} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} d\Omega_0 \quad (5a)$$

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = - \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}} \quad (5b)$$

em que $\mathbf{S} = \mathfrak{C} : \mathbf{E}$ é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e Ω_0 é o domínio do sólido na configuração inicial.

É importante a definição da matriz hessiana $\mathbf{H}$ da energia mecânica Π , necessária para a realização de análises de estabilidade e para o processo de solução via Newton-Raphson/Arc-Length. Sua expressão é fornecida como:

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} : \mathfrak{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q} \otimes \partial \mathbf{q}} d\Omega_0 \quad (6)$$

Conforme já realizado nos trabalhos de Soares et al. [6, 7] para o elemento finito aqui empregado, a determinação de pontos críticos da trajetória de equilíbrio pode ser obtida a partir do seguinte problema de autovalor:

$$\left(\mathbf{H}^E + \mu \mathbf{H}^G \right) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (7)$$

em que μ fornece os fatores de cargas críticas e $\Delta \mathbf{q}$ fornece os modos de instabilidade. As parcelas $\mathbf{H}^E$ e $\mathbf{H}^G$ são fornecidas, respectivamente, por:

$$\mathbf{H}^E = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} : \mathfrak{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} d\Omega_0 \quad (8)$$

$$\mathbf{H}^G = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q} \otimes \partial \mathbf{q}} d\Omega_0 \quad (9)$$

3 Solução via estratégia Arc-Length

A estratégia Arc-Length já é bem conhecida na literatura, sendo pioneiros os trabalhos de Wempner [9], Riks [10] e Crisfield [11]. Nesta seção é descrita a aplicação dessa formulação no contexto da formulação posicional do MEF.

Inicialmente considera-se que a força externa é controlada por um fator λ . Assim, a equação de equilíbrio pode ser reescrita como:

$$\mathbf{f}^{\text{int}} - \lambda \mathbf{f}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (10)$$

Para um par $(\mathbf{q}, \lambda)$ de solução tentativa, em geral o equilíbrio não é satisfeito. Desse modo, define-se o resíduo no equilíbrio $\mathbf{g}$, expresso como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{q}) - \lambda \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (11)$$

Na estratégia Arc-Length, o fator λ também passa a ser incógnita do problema. Dessa forma, é exigida uma equação adicional para tornar o sistema definido. A equação adicional corresponde a um arco de circunferência dado pela seguinte expressão:

$$\Delta s^2 = \Delta \mathbf{q} \cdot \Delta \mathbf{q} + \psi^2 \Delta \lambda^2 \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (12)$$

A estratégia para a resolução deste problema consiste na realização de etapas de previsão e correção, descritas a seguir.

3.1 Estágio de previsão

Considera-se que para o primeiro passo da análise é fornecido o incremento de carga $\Delta \lambda_1$. Expandindo o resíduo dado pela eq. (11) em série de Taylor para $\mathbf{q}$ e λ centrada em $(\mathbf{q}_0, \lambda_0)$ e truncando em primeira ordem, obtém-se uma primeira correção para a solução tentativa:

$$\Delta \mathbf{q}_1 = \Delta \lambda_1 \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_0, \lambda_0) \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (13)$$

Com isso, a partir da eq. (12) obtém-se o valor do arco Δs_0 para a primeira iteração. Esse arco então se mantém fixo para as iterações seguintes do primeiro passo.

Na primeira iteração de um passo $k > 1$ é conhecido o arco Δs_k . Portanto, as correções $\Delta \lambda_k$ e $\Delta \mathbf{q}_k$ são obtidas a partir da série de Taylor, agora centrada em $(\mathbf{q}_{k-1}, \lambda_{k-1})$. Após algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\Delta \lambda_k = \pm \frac{\Delta s_k}{\sqrt{[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_{k-1}, \lambda_{k-1}) \mathbf{f}^{\text{ext}}] \cdot [\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_{k-1}, \lambda_{k-1}) \mathbf{f}^{\text{ext}}] + \psi^2 \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{f}^{\text{ext}}}} \quad (14)$$

$$\Delta \mathbf{q}_k = \Delta \lambda_k \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_{k-1}, \lambda_{k-1}) \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (15)$$

em que o sinal da eq. (14) é tal que se obtenha um avanço na trajetória de equilíbrio. Um critério para a determinação desse sinal é apresentado em Feng et al. [12] e expresso como:

$$\text{sign}(\Delta \lambda_k) = \text{sign} \left(\Delta \mathbf{q}_{k-1} \cdot \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_{k-1}, \lambda_{k-1}) \mathbf{f}^{\text{ext}} + \Delta \lambda_{k-1} \psi^2 \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{f}^{\text{ext}} \right) \quad (16)$$

Atualiza-se então os parâmetros nodais $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k-1} + \Delta \mathbf{q}_k$ e o fator de carga $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \Delta \lambda_k$ e procede-se ao estágio de correção.

3.2 Estágio de correção

Para o estágio de correção fixa-se o arco Δs_k utilizado no estágio de previsão. É realizada novamente a expansão em série de Taylor, agora centrada em $(\mathbf{q}_k, \lambda_k)$. Após diversas manipulações algébricas e eliminando-se os termos de ordem superior em $\delta \mathbf{q}_k$ e $\delta \lambda_k$, chega-se às seguintes expressões para as novas correções $\delta \lambda_k$ e $\delta \mathbf{q}_k$:

$$\delta \lambda_k = \frac{\Delta \mathbf{q}_k \cdot [\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_k, \lambda_k) \mathbf{g}(\mathbf{q}_k, \lambda_k)]}{\Delta \mathbf{q}_k \cdot [\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_k, \lambda_k) \mathbf{f}^{\text{ext}}] + \psi^2 \Delta \lambda_k \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{f}^{\text{ext}}} \quad (17)$$

$$\delta \mathbf{q}_k = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}_k, \lambda_k) [\delta \lambda_k \mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}_k, \lambda_k)] \quad (18)$$

Atualiza-se por fim as correções $\Delta \mathbf{q}_k = \Delta \mathbf{q}_k + \delta \mathbf{q}_k$ e $\Delta \lambda_k = \Delta \lambda_k + \delta \lambda_k$, os parâmetros nodais $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k + \delta \mathbf{q}_k$ e o fator de carga $\lambda_k = \lambda_k + \delta \lambda_k$ e repete-se o estágio de correção até que as correções $\delta \mathbf{q}_k$ e $\delta \lambda_k$ se tornem suficientemente pequenas.

4 Estratégia para obtenção de trajetórias secundárias

A estratégia aqui utilizada para determinar trajetórias secundárias a partir de um ponto de bifurcação é baseada na solução do problema de autovalor da eq. (7). O autovetor $\Delta \mathbf{q}$ correspondente ao modo de instabilidade desejado pode ser utilizado como perturbação no processo de solução. Neste trabalho, essa perturbação é inserida na forma de uma força externa denominada força de perturbação, determinada como:

$$\mathbf{f}^{\text{per}} = \int_{\Omega_0} \left(\mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} \right) \bigg|_{\mathbf{q}^{\text{per}}} d\Omega_0 - \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{q}_p) \quad (19)$$

em que $\mathbf{q}_p$ é o vetor de parâmetros nodais ao final do passo p escolhido para a imposição da perturbação e $\mathbf{q}^{\text{per}}$ é expresso como:

$$\mathbf{q}^{\text{per}} = \mathbf{q}_p + \alpha \frac{\Delta \mathbf{q}}{\|\Delta \mathbf{q}\|} \quad (20)$$

em que α é um escalar que ajusta a intensidade da perturbação aplicada.

Esta força de perturbação é determinada e inserida no processo de solução, adicionalmente à força externa $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ já atuante, nas proximidades do ponto de bifurcação e retirada assim que se adentra na trajetória secundária correspondente. Em Soares et al. [6] os autores utilizaram esta mesma força de perturbação, aplicando-a sobre a configuração inicial e determinando a trajetória de equilíbrio por meio do método de Newton-Raphson.

5 Exemplo numérico: seção canal

Este exemplo foi proposto por Garcea [13] e consiste numa viga biapoiada de seção canal submetida a compressão em suas extremidades, conforme Fig. 2. O material empregado possui as seguintes propriedades: $E = 2.1 \cdot 10^6$, $\nu = 0.3$. As condições de contorno são: $w(0, y, 0) = w(\ell, y, 0) = v(0, 0, 0) = v(\ell, 0, 0) = u(\ell/2, 0, 0) = 0$, sendo u , v e w os deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente. O carregamento é dado por $p_x = 1.0$ e o fator λ controla sua intensidade.

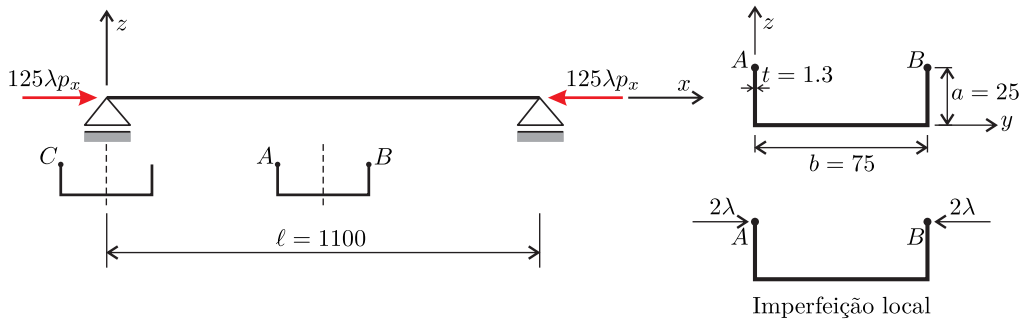


Figura 2. Esquema estático e dimensões de interesse

Utilizou-se como discretização uma malha estruturada com 5275 nós e 1120 elementos triangulares com aproximação cúbica. Garcea [13] ainda considera a presença de imperfeições na forma de um par de forças concentradas atuando na seção central da peça. Por brevidade, será comparado aqui apenas o caso de imperfeição local (Fig. 2).

Nesse contexto, apresentam-se na Fig. 3 as trajetórias de equilíbrio obtidas neste trabalho (MEF Posicional) e as apresentadas por Garcea [13] (Nastran, Mixed e Frozen). As formulações Mixed e Frozen se baseiam na expansão de modos de instabilidade para a obtenção das trajetórias, o que explica o distanciamento dessas com relação às demais trajetórias.

Destaca-se aqui a trajetória de equilíbrio obtida sem a imposição da imperfeição local. A trajetória para além do ponto de bifurcação foi obtida inserindo-se a força de perturbação (eq. (19)) nas proximidades do ponto de bifurcação e retirada após alguns passos. Observa-se que as trajetórias obtidas considerando a imperfeição local se situam sempre abaixo da trajetória obtida sem a imperfeição. Exceção ocorre no caso do gráfico de v_B/v_A , em que a diferença entre as trajetórias é nítida, justamente por se tratar dos pontos onde a imperfeição local é aplicada, sendo, portanto, maior seu efeito.

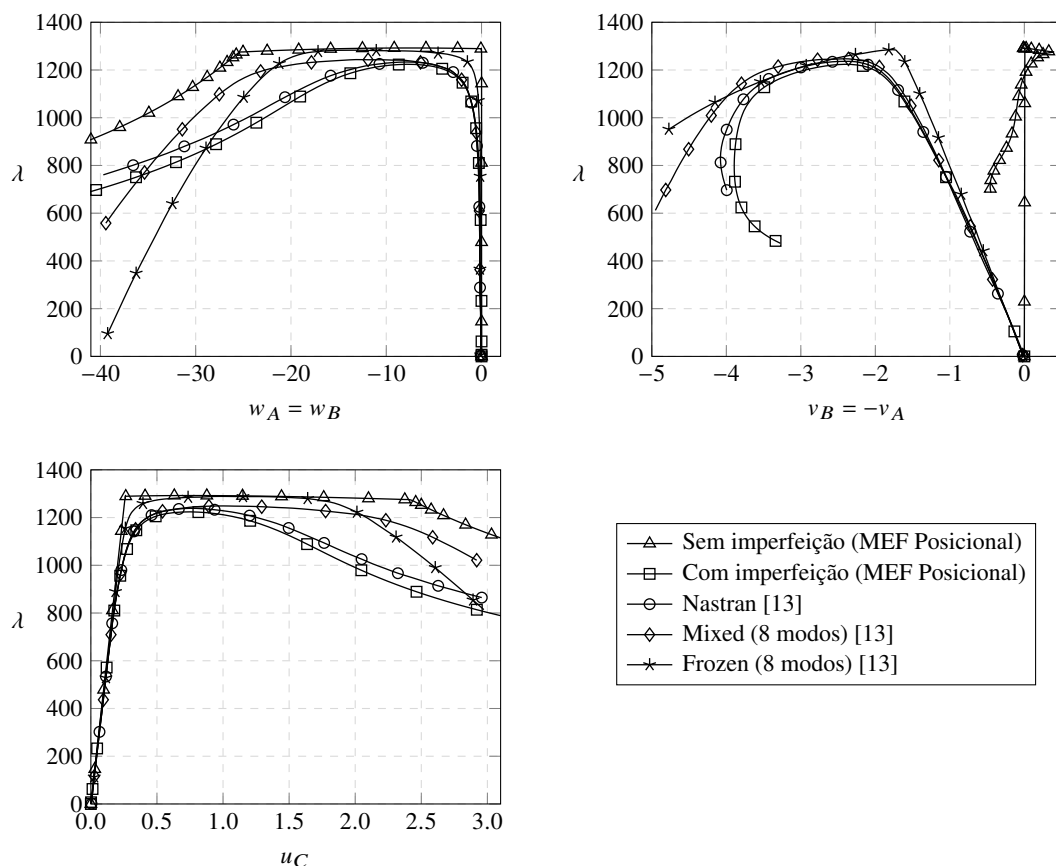


Figura 3. Trajetórias de equilíbrio dos pontos A, B e C da viga em seção canal

As trajetórias de equilíbrio obtidas neste trabalho considerando a presença de imperfeição local apresentam boa concordância com as apresentadas por Garcea [13]. Como no presente trabalho é empregada uma formulação não-linear geometricamente exata, as formulações que se baseiam na expansão de modos (Mixed e Frozen) produzem resultados mais distantes. Já os resultados obtidos via Nastran, que utiliza a formulação tradicional de elementos finitos baseados em deslocamentos e giros, são os que mais se aproximam dos obtidos no presente trabalho.

6 Conclusões

Neste trabalho é apresentada uma estratégia para a determinação de uma força de perturbação adequada para induzir o processo de solução a determinar trajetórias de equilíbrio secundárias. Essa força é determinada com base no autovetor obtido a partir de uma análise de estabilidade sobre a configuração atual da estrutura. Dessa forma, a força de perturbação, quando aplicada, gera deslocamentos correspondentes ao modo desejado, permitindo que a trajetória secundária correspondente seja obtida. Como vantagem dessa formulação, cita-se a possibilidade de determinação de trajetórias de equilíbrio secundárias para estruturas ideais, sem a necessidade de se inserir imperfeições sobre a configuração inicial, como usualmente é realizado. Ainda assim, é necessário atentar quanto ao aspecto de convergência do processo de solução, visto que é inserida uma força adicional ao sistema durante a análise. Portanto, o desenvolvimento de uma estratégia para a inserção desta força sem que se tenha prejuízo na taxa de convergência se faz necessário, até mesmo porque a matriz do sistema já é quase singular nas proximidades do ponto de bifurcação. Por fim, cita-se o exemplo numérico apresentado, no qual foi possível validar a implementação da estratégia Arc-Length com a presença de imperfeição local e demonstrar a utilização da força de perturbação para se determinar trajetórias secundárias quando não há presença de imperfeições.

Agradecimentos. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e com suporte principal do processo nº 2018/19288-8, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Wagner, W. & Wriggers, P., 1988. A simple method for the calculation of postcritical branches. *Engineering Computations*, vol. 5, n. 2, pp. 103–109.
- [2] Shi, J., 1996. Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by the finite element method. *Computers & Structures*, vol. 58, n. 1, pp. 203–220.
- [3] Fujii, F. & Okazawa, S., 1997. Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 123, n. 3, pp. 179–189.
- [4] Basaglia, C., Camotim, D., & Silvestre, N., 2013. Post-buckling analysis of thin-walled steel frames using generalised beam theory (GBT). *Thin-Walled Structures*, vol. 62, pp. 229–242.
- [5] Radau, L., Gerzen, N., & Barthold, F.-J., 2017. Sensitivity of Structural Response in Context of Linear and Non-Linear Buckling Analysis with Solid Shell Finite Elements. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 55, n. 6, pp. 2259–2283.
- [6] Soares, H. B., Paccola, R. R., & Coda, H. B., 2019a. Unconstrained Vector Positional Shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. *Thin-Walled Structures*, vol. 136, pp. 246–257.
- [7] Soares, H. B., Paccola, R. R., & Coda, H. B., 2019b. Computational tool for buckling analysis via Positional Finite Element Method. In *XL CILAMCE Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Natal-RN, Brasil.
- [8] Coda, H. B. & Paccola, R. R., 2007. An Alternative Positional FEM Formulation for Geometrically Non-linear Analysis of Shells: Curved Triangular Isoparametric Elements. *Computational Mechanics*, vol. 40, n. 1, pp. 185–200.
- [9] Wempner, G. A., 1971. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, n. 11, pp. 1581–1599.
- [10] Rijs, E., 1972. The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, n. 4, pp. 1060–1065.
- [11] Crisfield, M. A., 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computers & Structures*, vol. 13, n. 1, pp. 55–62.
- [12] Feng, Y., Perić, D., & Owen, D., 1996. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. *Computers & Structures*, vol. 58, n. 3, pp. 479–485.
- [13] Garcea, G., 2001. Mixed formulation in Koiter analysis of thin-walled beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n. 26, pp. 3369–3399.