# PONTOS DE RETORNO EM EQUAÇÕES INTEGRAIS LINEARES DO TIPO VOLTERRA-STIELTJES EM DIMENSÃO INFINITA

L.Barbanti
(MAT-I.M.E-USP)

A existência de pontos de retorno num sistema evolutivo controlado, significa poder recuperar alguns estados do sistema, após um tempo finito. Há vários problemas interessantes neste campo. Entre outros: qual o tempo mínimo para se recuperar um estado (recuperável)?; qual a relação entre os estados recuperáveis e os estados atingíveis à partir da origem em tempo finito?; em que conjunto devemos procurar os possíveis estados que retornam?; - é possivel periodicizar soluções?... etc. etc. Autores focaram alguns destes problemas (v.[1][2] e [3]) mas de qualquer modo a teoria geral na literatura, ainda é incipiente.

Na secção 1 introduzimos alguns fatos básicos sobre as equações integrais lineares de Volterra-Stieltjes, na 2 abordamos o problema dos pontos de retorno em tempo livre, finito, e na secção 3 abordamos o problema dos pontos de retorno essenciais (a definição é dada na secção) em tempo fixado.

## 1 - Equações integrais lineares de Volterra-Stieltjes

A teoria destas equações em cujo âmbito nos movemos é devida em sua porção substancial a C.S.Hönig. Para maiores detalhes, então, ver [4] e [5] .

Dado $[0,w] \subset \mathbb{R}$ e X um espaço de Banach, definimos a semi-variação de $g : [o,w] \longrightarrow L(X)$:

$$SV[g] = \sup_{d \in D} \left\{ \sup \sum_{i=1}^{|d|} (g(t_i) - g(t_{i-1}))x_i \quad : x_i \in X, \|x_i\| \leq 1 \right\}$$

onde D é o conjunto de todas as partições,

$$d = \{o = t_1 < t_2 < \cdots \quad t_{|d|} = w\}$$

do intervalo $[o,w]$ .

Se $SV[g] < \infty$ dizemos que g é de semi-variação limitada e escrevemos $g \in SV([o,w], L(X))$. Observemos que SV é uma semi-norma.

Dizemos que $f: [o,w] \longrightarrow X$ é função regrada e escrevemos $f \in G([o,w], X)$ se f tem somente descontinuidades de primeira espécie.

Para $g \in SV([o,w], L(X))$ e $f \in G([o,w], X)$, existe a integral interior (ou do tipo Dushnik)

$$F_g(f) = \int_0^w \cdot dg(t) \cdot f(t) =$$

$$= \lim_{d \in D} \sum_{i=1}^{|d|} (g(t_i) - g(t_{i-1}))\, f(\dot{s}_i) \in X$$

onde $\dot{s}_i \in (t_{i-1}, t_i)$.

Dado $Q = \{[o,w] \times [o,w]\} \subset \mathbb{R}^2$, e denotando

$$U^t(s) = U_s(t) = U(t,s)$$

dizemos que $U \in G_0^\sigma . SV^u(Q, L(X))$, se satisfaz:

$(D^0)$ $\qquad U(t,s) = o \quad , \qquad s \geqslant t \qquad ;$

$(G^{\sigma})$ para todo $s \in [o,w]$ e todo $x \in X$, temos

$$U_s \cdot x \in G([o,w],X),$$

(onde $U_s \cdot x(t) = U(t,s)\,x$) e

$(SV^u)$ $$SV^u[U] = \sup_{o \leq t \leq w} SV[U^t] < \infty$$

Se ao invés de $(D^0)$, $U$ satisfaz

$(D^I)$ $\qquad U(t,s) = Id. \quad , \quad s \geqslant t$

então escrevemos $U \in G_I^{\sigma} \cdot SV^u(Q,L(X))$.

A equação integral linear do tipo Volterra-Stieltjes é:

$(K)$ $$x(t)-x(o) + \int_o^t \cdot d_s\, K(t,s)x(s) = u(t) - u(o) \qquad (o \leq t \leq w)$$

onde $K \in G_o^{\sigma} \cdot SV^u(Q,L(X))$ e as funções $x, u \in G([o,w],X)$.

Usaremos o têrmo <u>controle</u> para a função u, em (K). Em geral consideramos $u(t) \in \Gamma \subset X$ $(o \leq t \leq w)$, onde $\Gamma$ é um subconjunto não vazio de X.

Denotamos estes fatos por $u \in G_{\Gamma}([o,x],X)$ e o sistema (K) por $(K)_{\Gamma}$. Fazendo $x(o) = x$, então:

$(K)_{\Gamma}$ $$x(t)-x + \int_o^t \cdot d_s\, K(t,s)x(s) = u(t) - u(o) \qquad (u \in G_{\Gamma}).$$

Sob certas condições, (v.Th. 3.4 de [4]), que consideramos satisfeitas aqui, a única solução regrada $x(t)$ de (K), (para cada $u(t)$) é dada por um resolvente $R \in G_I^\sigma SV^u(Q, L(X))$ associado a K, segundo a expressão:

$$(S) \quad x_u(t) = u(t) - R(t,o)[u(o)-x] - \int_o^t \cdot d_s R(t,s).u(s).$$

O resolvente R satisfaz, para todo $x \in X$, a fórmula:

$$(R^*) \quad R(t,s)x - x + \int_o^t \cdot d_\sigma K(t,\sigma).R(\sigma,s)\, x = 0 \quad (t,s \in [o,w])$$

## 2 - Pontos de retôrno

Dado o sistema $(K)_\Gamma$ e $t \in (o,w]$ dizemos que $x \in X$ é um <u>ponto de retôrno</u> em tempo $t$ e denotamos o conjunto de tais pontos por $\mathcal{R}(t,K,\Gamma)$, se existe $u \in G_\Gamma([o,w],X)$ tal que

$$x_u(o) = x = x_u(t)$$

E' imediato o fato:

<u>PROP. 1</u> Dado (K), para todo $T \in (o,w]$, $\mathcal{R}(T,K,X) = X$.

Para todo $x \in X$, o controle $u(t) = K(t,o)x$, gera a solução constante $x_u(t) = x$.

Dado $(K)_\Gamma$ e definindo o <u>conjunto dos pontos atingíveis</u> em tempo $T \in (o,w]$, à partir da origem como

$$A(T,K,\Gamma) = \{x_u(T);\ u \in G_\Gamma([o,w],X);\ x_u(o) = o\},$$

temos, através da fórmula ($\rho$) da secção anterior, $\mathcal{R}(T,K,\Gamma)$ relacionado com $A(T,K,\Gamma)$:

PROP. 2 $[I-R(T,0)]\, \mathcal{R}(T,K,\Gamma) = A(T,K,\Gamma) \qquad (T \in (0,w])$,

onde $R$ é o resolvente associado a $K$.

Dado $\Gamma_0 \subset X$, tal que $\Gamma_0 + \Gamma_0 \subset \Gamma_0$, é imediata também a

PROP. 3 ([6], Prop. 2.1 e Prop. 2.2). Dado $T \in (0,w]$ se valem:

(i) $A(T,K,\Gamma) = X$ e

(ii) $x \in \mathcal{R}(T,K,\Gamma)$ (ou então $K(t,0)x \in \Gamma$, para todo $t \in [0,T]$),

então $\forall y \in X$, $\exists u \in G_\Gamma([0,T],X)$ tal que $x_u(0) = x$ e $x_u(T) = y$.

Devido à Prop. 2 acima e ao fato que $R(T,0) \in L(X)$, temos

PROP. 4 (i) Se $A(T,K,\Gamma)$ é convexo, aberto, fechado então $\mathcal{R}(T,K,\Gamma)$ é convexo, aberto, fechado, respectivamente,

(ii) Se $x \in R(T,K,\Gamma)$ então

$x + Ker(I-R(T,0)) \subset \mathcal{R}(T,K,\Gamma)$

Seja $\mathcal{R}(K,\Gamma) = \bigcup_{t \in (0,w]} R(t,K,\Gamma)$

Se $x \in \mathcal{R}(K,\Gamma)$ podemos definir

$$\tau(x) = \inf\{t \in (0,w] : x \in \mathcal{R}(t,K,\Gamma)\} \in [0,w].$$

O conjunto $\mathcal{R}(K,\Gamma) \neq \emptyset$ se o conjunto

$$\mathcal{R}_c(K,\Gamma) = \{x : K(t,o)x \in \Gamma \ , \ t \in [o,w]\}$$

for não vazio, pois $\mathcal{R}_c(K,\Gamma) \subset \mathcal{R}(K,\Gamma)$

É possível provar também que

<u>PROP. 5</u> $\mathcal{R}(K,\Gamma) \neq \emptyset \longrightarrow \mathcal{R}_c(K, \overline{co\Gamma}) \neq \emptyset$

onde $\overline{co\Gamma}$ é o fecho da envoltoria convexa de $\Gamma$.

Se $x \in \mathcal{R}(K,\Gamma)$, visto ser óbvio que nem sempre $x \in \mathcal{R}(\zeta(x), K, \Gamma)$, perguntamos em que condições é possível garantir este fato. Usando argumentos de Fattorini em [2] , temos

<u>PROP. 6</u> Se $\Gamma$ é limitado e $X$ é reflexivo e separável então para todo $x \in \mathcal{R}(K,\Gamma)$ com $\zeta(x) \neq o$ , vale

$$x \in R(\zeta(x), K, \Gamma)$$

Devido ao fato de definirmos soluções de (K) em $[o,w]$ com $w < \infty$ e dos argumentos de densidade em [7] , consideramos em outro artigo (em preparação) em 1º lugar o conjunto dos pontos $x_u(o) = x \in X$, tais que depois de um tempo t, $x_u(t)$ é tão próximo de $x$ quanto se queira e em 2º o conjunto dos estados iniciais $x_u(o)$ tão próximos de $x$ quanto se queira, e $= x$ para algum $t \in (o,w]$ , e suas relações com $\overline{\mathcal{R}(t,K,\Gamma)}$ e $\overline{\mathcal{R}(K,\Gamma)}$.

A próxima secção trata com estes tipos de argumento.

## 3 - Pontos de retorno essenciais em tempo fixado

Seja $x \in X$. Dado $(K)_\Gamma$, dizemos que $x$ é um ponto de retorno essencial, em tempo $T \in (o,w]$ se existe $u \in G_\Gamma([o,T],X)$ tal que $x_u(o+) = x_u(T-) = x$

Nesta secção consideramos $T \in (o,w]$ fixado, e os valores $u(o)$, $u(T)$, $x_u(o)$, $x_u(T)$ imateriais, porisso assumindo-os nulos.

No que segue usaremos a estrutura adjunta associada a $(K)$, desenvolvida em [8] .

A condição $x_u(T-) = x_u(o+)$ pode ser vista como um vinculo linear:

$$(F_\alpha) \qquad \int_o^T \cdot d\alpha(t)x(t) = F_\alpha[x] = x(T-)-x(o+) = o.$$

Pelo teorema de representação em [4], Th.1.11

temos
$$\alpha(t) = \begin{cases} o & \text{se } t = o \\ I_d & \text{se } o < t < T \\ o & \text{se } t = T \end{cases}$$

Seja o operador

$$x \in X \longmapsto Jx = \int_o^T \cdot d\alpha(t).R(t,o)x =$$

$$= [R(o\dot{+},o) - R(T\dot{-},o)]\, x$$

onde dado $U \in G^\sigma_\zeta \cdot SV^u(Q,L(X))$ ($\zeta = o$, ou $I$), estão bem definidos (v. [4] , 2.9 ) os operadores:

$$U(a\dot{+},b) = \lim_{\varepsilon \to o^+} U(a+\varepsilon,b) \quad \text{e}$$

$$U(c\dot{-},d) = \lim_{\varepsilon \to o^-} U(c+\varepsilon,d) \qquad (a,b,c,d \in [o,T]).$$

Nesta secção vamos assumir que JX é fechado em X. (o que é sempre verificado se, por exemplo, X é de dimensão finita).

A equação adjunta associada ao problema (K) + ($F_\alpha$) (v. [8], p.115) é:

$$(K_\alpha^*)_o \quad y(s) + \int_s^T \cdot K(\zeta,s)^* dy(\zeta) - \int_o^T \cdot K(\zeta,o)^* dy(\zeta) = \alpha(s)^* \psi ,$$

$$(\psi \in X^* \quad e \quad o \leq s \leq T),$$

com $y \in \{z \in BV([o,T], L(X));\ \ z(o) = z(T) = o\}$.

Pelo Th.4.1, ainda de [8], temos que sendo JX fechado em X, são equivalentes:

(i) $u \in G([o,T],X)$ gera a solução $x_u$ com

$F_\alpha[x_u] = o$ (i.é; com $x_u(o+) = x_u(T-)$)

(ii) Para todo y, solução de $(K_\alpha^*)_o$ vale

$$\int_o^T \cdot d_s y(s).u(s) = o$$

Depois disso, podemos começar a estabelecar alguns resultados.

Dado $o \in \Gamma \subset X$ e denotando $G_\Gamma([o,T],X)$ por $G_\Gamma$ podemos definir

$$\Pi_\Gamma = \{u \in G_\Gamma \ ;\ \int_o^T \cdot d_s y(s).u(s) = o,\ \forall\ y \text{ sol. de } (K_\alpha^*)_o\}$$

$$\mathcal{P}_\Gamma = \{u \in \Pi_\Gamma \ ;\ u(o+) = u(T-)\}$$

Dada a sequência $u_{(n)}$

$$u_{(o)} = u \in G_\Gamma \qquad u_{(n+1)}(t) = \int_o^t \cdot d_s K(t,s).u(s) , \qquad o \leq t \leq T, n=0,1,2 \ldots$$

vale:

<u>PROP. 7</u> Se $u \in \mathcal{P}_\Gamma$ então $u_{(n)} \in \Pi_X$, $(n= o,1,2,\ldots)$.

<u>Dem.</u> Se $y$ é solução de $(K^*_\alpha)_o$ e $u \in \mathcal{P}_\Gamma$, vamos demonstrar que

$$(*) \qquad \int_o^T \cdot d_s y(s).u(s) = - \int_o^T \cdot d_s y(s).u_{(1)}(s).$$

Usando a expressão de $(K^*_\alpha)_o$ acima, e notando que o 3º fator da igualdade é independente de s, temos

$$\int_o^T \cdot d_s y(s).u(s) = - \int_o^T \cdot d_s \left( \int_s^T \cdot K(\zeta, s)^* dy(\zeta)\right).u(s) +$$

$$+ \Psi\left(\int_o^T d\alpha(\sigma)u(\sigma)\right) \qquad (\Psi \in X \text{ e } o \leqslant s \leqslant T)$$

Assim

$$\int_o^T \cdot d_s y(s).u(s) = - \int_o^T \cdot d_s \int_s^T \cdot d_\sigma\, y(\sigma).K(\sigma, s)\, u(s) + \Psi(u(T-)-u(o+)).$$

Usando a formula de Dirichlet ( [4] Th. 2.6) temos o resultado $(*)$.

Deste modo provamos a Prop.

Um corolario imediato devido à igualdade $(*)$ acima é :

<u>COROLARIO</u> Se $K(t,s)\gamma = o$ para todo $t,s \in [o,T]$ e $\gamma \in \Gamma$, então $G_\Gamma = \Pi_X$ e portanto todo $u \in G_\Gamma$ força uma solução $x_u$ com

$F_\alpha[x_u] = o$ em $(K)_\Gamma$.

Dada, por exemplo, a equação (uma E.D.O, na realidade) em $R^2$

$$x(t)-x(o) + \int_o^t \cdot d_s \begin{pmatrix} o & s \\ o & o \end{pmatrix}.x(s) = u(t) - u(o) \qquad (o \leqslant t \leqslant T)$$

com $u \in G_\Gamma$, onde $\Gamma = \left\{\binom{r}{o};\ \ r \in \mathbb{R}\right\}$. Estamos então nas condições do corolário.

<u>PROP. 8</u> Dado $u$ $G_\Gamma$ então

$$x_u(o+) = R(\dot{o+}, o)\, u(o+).$$

e

$$x_{(n)}(o+) = K(\dot{o+}, o)\, u_{(n-1)}(o+),$$

<u>Dem</u>. Pela fórmula ($\rho$ )

$$x_u(o+) = u(o+) - \int_0^{o+} \cdot\, d_s R(\dot{o+}, s) u(s)\ .$$

Por 2.9 de [4] temos então

$$x_u(o+) = u(o+) - [I_d - R(\dot{o+}, o)]\ u(o+).$$

Pela definição de $u_{(n)}$ e por 2.9 em [4], temos imediatamente, a segunda igualdade.

Definindo o <u>conjunto das condições iniciais essenciais</u> de $(K)_\Gamma$ como sendo

$$\mathfrak{I}_\Gamma = \{\ x_u(o+);\ \ u \in G_\Gamma\}$$

podemos afirmar

<u>PROP. 9</u> O conjunto $\mathfrak{I}_\Gamma$ está em relação biunivoca com $\overline{\Gamma}$ (o fêcho de $\Gamma$ em $X$).

<u>Dem</u>: Usando a formula ($R^*$) da secção 1, vemos que

$$R(\dot{o+}, o)x = x - \int_0^{o+} \cdot\, d_s K(\dot{o+}, s).\ R(s, o)x = \qquad (x \in X)$$

$$= x + K(\dot{o+}, o).(R(\dot{o+}, o)x).$$

A Prop. 8, conclui a demonstração.

E imediata a seguinte caracterização dos elementos de $\Pi_\Gamma \bullet \mathcal{G}_\Gamma$ (usando novamente ( [4] ,2.9)).

PROP. 10 (i ) $u \in \Pi_\Gamma$, (i.é., força uma solução $x_u$ com $x_u(o+) = x_u(T-)$),

se e só se

$$R(o\dot{+},o)u(o+) = u(T-) - \int_o^T \cdot d_s R(T\dot{-},s)u(s)$$

(ii) $u \in \mathcal{G}_\Gamma$ se e so se

$$[I - R(o+,o)]\, u(o+) = - \int_o^T \cdot d_s R(T\dot{-},s)u(s).$$

Dado o subconjunto de $\mathcal{J}_\Gamma$,

$$\mathcal{R}_\Gamma = \{ x \in X;\ \exists\ u \in G_\Gamma\ , x_u(o+) = x = x_u(T-)\}$$

então temos o

COROLARIO (i ) $\mathcal{R}_\Gamma = \mathcal{H}(\Pi_\Gamma)$ onde $\mathcal{H}u = u(T-) - \int_o^T \cdot d_s R(T\dot{-},s)u(s)$

(ii) Se $x \in \mathcal{R}_\Gamma$ e $x = x_u(o+)$ entao $x = x_{u+v}(o+)$,

para todo $v \in \operatorname{Ker} \mathcal{H}$.

Finalizando este artigo podemos propor:

PROP. 11 Suponhamos que existe $\bar{\gamma} \neq o$ com $\bar{\gamma} \in R(o\dot{+},o)\,\bar{\Gamma} \cap \bar{\Gamma}$, e que existe $u \in \mathcal{G}_\Gamma$ com $u(o+) = \bar{\gamma} \bullet u_{(1)} \in G_\Gamma$

Entao $\mathcal{R}_\Gamma$ tem ao menos 2 pontos.

<u>Dem</u>: Vamos mostrar que $u(o+)$ e $u_{(1)}(o+)$ são diferentes.

Suponhamos o contrario. Então

$$(I - K(\dot{o+},o))\ u(o+) = o$$

Como por hipotese $u(o+) = R(\dot{o+},o)\bar{\xi}$ onde $\xi \in \bar{\Gamma}$, então

$$[I - K(\dot{o+},o)]\ R(\dot{o+},o)\bar{\xi} = \bar{\xi} = o$$

e assim $\bar{\gamma} = o$.

Portanto $x_u(o+) = R(\dot{o+},o)u(o+) \neq R(\dot{o+},o)(K(\dot{o+},o)u(o+) = x_{u_{(1)}}(o+)$

pela Prop. 9 acima.

## Referências


[1] R.Conti - Return sets os linear control processes - J.Optim. Theory Appls. 41(1983) 37-54.

[2] H.O.Fattorini - The time optimal control problem in Banach spaces - Appl. Math.& Optim. 1 (1974) 163-188.

[3] H.Kobayashi - E.Shimemura - Note on a property of linear control systems - Inter.J.Control 23, 6 (1981) 1.171-1.176.

[4] C.S.Hönig - Equations intégrales generalisées et applications - Pub.Math.d'Orsay 83-01 (1983).

[5] C.S.Hönig - Volterra-Stieltjes integral equations - Math. Studies 16, North-Holland Pubs.Co., Amsterdam, (1975).

[6] L.Barbanti-Equações integrais de Volterra-Stieltjes e controle (em Hungaro).Tese para Candidatura à Ac.Hungara de Ciencias.Magyar Tudomainos Akademia (1988). Budapest.

[7] L.Barbanti-Approximate controllability of linear integral Volterra-Stieltjes equations.Equadiff-87,Xanthy(Grecia)-Marcel-Dekker Pubs.(1988) -no prelo.

[8] C.S.Hönig-The adjoint equation of a linear Volterra-Stieltjes integral equation with a linear constraint,LNM-957, Springer(1982) 110-125.