

# CARTOGRAFIA RACIONAL

por

FERNANDO FRAGA DE TOLEDO ARRUDA

Docente - Livre da E. P. U. S. P.

TESE DE CONCURSO para Professor Catedrático  
da Cadeira n.º 6, Topografia, Geodésia  
Elementar e Astronomia de Campo, da  
Escola Politécnica da Universidade de  
São Paulo. - Brasil

**À minha espôsa.**

## PREFACIO

"On ne doit pas oublier tout ce que la cartographie doit déjà aux mathématiques et ce serait une erreur de croire qu'elle pourra progresser et s'adapter à de nouveaux besoins sans le concours de cette science."

A. Gougenheim

Em /22/ p. 33.

"Non seulement l'analyse est indispensable à la géométrie mais on pourrait presque dire que la tâche la plus importante du géomètre est de trouver et de développer les méthodes analytiques les plus adaptées à la recherche géométrique."

E. Cartan

Em /17/ p. VII.

## BIBLIOGRAFIA

1. Annuaire, Bureau des Longitudes. Paris, 1 951.
2. Baeschlin, C.F. Lehrbuch Der Geodäsie. Zürich, 1 948.
3. Baule, B. Tratado de Matemáticas Superiores para Ingenieros y Fisicos. Barcelona, 1 949.
4. Blascke, W. Vorlesungen Über Differential Geometrie und Geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. New York, 1 945.
5. Blascke, W. Einführung in die Differential-geometrie. Berlin, 1 950.
6. Bianchi, L. Lezioni di Geometria Differenziale. Bologna, 1 927.
7. Boaga, G. Trattato di Geodesia e Topografia. Padova, 1 948.
8. Bomford, G. Geodesy. Oxford, 1 952.
9. Brand, L. Advanced Calculus. New York, 1 955.
10. Brand, L. Vector and Tensor Analysis. New York, 1 953.
11. Buhl, M. A. Nouveaux Éléments d'Analyse. Paris, 1 940.
12. Camargo, J.O.M. Cálculo Vectorial. São Paulo, 1 946.
13. Cartan, E. Les Systèmes Différentielles Extérieurs. Paris, 1 945 .
14. Cartan, E. Géométrie des Espaces de Riemann. Paris, 1 946.
15. Cicconetti, G. Trattato di Geodesia e Topografia. Milano, 1 938.
16. Darboux, G. Leçons sur la théorie générale Des Surfaces. Paris, 1 914 .
17. Delens, P.C. Géométries Différenteelles. Paris, 1 927.
18. Dini, U. Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra.  
- An. di Mat. - S. II - T. III - 1 869 - 1 870.
19. Dore, P. Geodesia e Topografia. Bologna, 1 949.
20. Dubuisson, D. Levés Topographiques. Paris, 1 954.
21. Fraga de Toledo Arruda, F. Geodésicas e Áreas.. São Paulo, 1 957.
22. Gougenheim, A. Emploi des Projections Conformes en Cartographie. Bulletin géodésique - N° 27 - Paris, 1 953.
23. Hugueney, de Mattos, A. Projeção Conforme de Gauss. Rio de Janeiro, 1 941.

24. James, G. and James, R.C. Mathematics Dictionary. New York, 1949 .
25. Lambert, W.D. Formulas and Tables for the Computation of Geodetic Positions on the International Ellipsoid. Sp. Pub. № 200 . Washington, 1935.
26. Levallois et Dupuy. Note sur le Calcul des Grandes Géodésiques. Paris, 1952.
27. Lichnerowicz, A. Éléments de Calcul Tensoriel. Paris, 1951.
28. Rune, G.A. Some Formulae Concerning the Transverse Mercator Projection. Bulletin géodésique - № 34 - Paris, 1954.
29. Segre, B. Forme Differenziali e loro Integrali. Roma, 1951.
30. Struik, D. J. Differential Geometry. U.S.A., 1950.
31. Tardi, P. Traite de Géodésie. Paris, 1951.
32. Thomas, P. D. Conformal Projections in Geodesy and Cartography. Sp. Pub. №. 251. Washington, 1952.
33. U T M, Adoção do Sistema U T M pelo Serviço Geográfico do Exército. Rio de Janeiro, 1956.
34. Vidal, Abascal, E. Geometria Diferencial. Madrid, 1956.
35. Werenkiold, W. Theory of Map Projections. Bulletin géodésique. №. 28 - Paris, 1953.
-

## ÍNDICE

### 1. PFAFFIANOS

	p
§ 11. Produto exterior . . . . .	1
§ 12. Diferencial exterior . . . . .	3
§ 13. Derivadas em relação a um par de pfaffianos. . . . .	6
§ 14. Fórmula de <u>Stokes</u> generalizada . . . . .	8

### 2. GEOMETRIA DIFERENCIAL MODERNA

§ 21. Equações de estrutura . . . . .	9
§ 22. Equações fundamentais da geometria . . . . .	15
§ 23. Cintas e linhas . . . . .	21
§ 24. Torção geodésica. Curvatura normal. Curvatura geodésica . . . . .	32
§ 25. Complemento ao estudo das linhas . . . . .	38
§ 26. Curvaturas principais . . . . .	46
§ 27. Transporte paralelo de <u>Levi-Civita</u> . . . . .	53
§ 28. Geometria diferencial clássica . . . . .	55
§ 29. Rêde de <u>Tschebyschoff</u> . . . . .	61

### 3. GEODESICAS

§ 31. Equação geral . . . . .	62
§ 32. Teorema integral de Gauss-Bonnet. . . . .	67
§ 33. Parâmetros diferenciais . . . . .	69
§ 34. Parâmetros isotermos . . . . .	73
§ 35. Geodésicas de revolução . . . . .	81
§ 36. O elipsóide internacional . . . . .	89

### 4. CARTOGRAFIA RACIONAL

§ 41. Generalidades . . . . .	93
§ 42. Categorias de representação . . . . .	96
§ 43. Representação isométrica . . . . .	97
§ 44. Teoria da deformação . . . . .	105

§ 45. Representação geral de revolução . . . . .	115
§ 46. Representação conforme . . . . .	125
§ 47. Representação equivalente. . . . .	127

## 5. SISTEMA UTM

§ 51. Generalidades . . . . .	128
§ 52. Especificações do Sistema UTM . . . . .	131
§ 53. Equações da carta . . . . .	133
§ 54. Teoria das correções . . . . .	143
§ 55. Convergência plana. . . . .	151
§ 56. Módulo de deformação linear. . . . .	156
§ 57. Redução angular . . . . .	161
§ 58. O melhor sistema conforme para determinada região . . . . .	164
§ 59. Exemplos de aplicação . . . . .	174
<b>SUMULA . . . . .</b>	<b>185</b>

\*\*\*\*\*

## 1. P F A F F I A N O S

### §11. PRODUTO EXTERIOR

A expressão

$$w = f_1 du^1 + f_2 du^2 + \dots, \quad (1)$$

que, na convenção somatória de Einstein A. (1875 - 1955), se escreve

$$w = f_r du^r, \quad (2)$$

é uma forma diferencial do primeiro grau, ou forma linear de Pfaff, J.F. (1765-1825), ou, simplesmente, pfaffiano.

As  $f_r$  são funções das variações independentes  $u^r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ).

Podemos considerar o pf. como uma função linear e homogênea das diferenciais  $du^r$ .

Tomemos o par de pf. binômios :

$$\left. \begin{array}{l} w^1 = p du + q dv \\ w^2 = r du + s dv. \end{array} \right\} \quad (3)$$

A soma de pf. goza das mesmas propriedades formais da soma ordinária.

O produto exterior (x, leia : "exterior") do par de pf. (3) é, por definição, a forma exterior do segundo grau

$$w^1 \times w^2 = (ps - qr)(du \times dv), \quad (4)$$

ou

ou

$$w^1 \ x \ w^2 = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \ (du \ x \ dv). \quad (5)$$

As duas propriedades singulares de u'a multiplicação exterior de Grassmann, H.G. (1 809 - 1 877), são aqui verificadas:

$$\begin{aligned} w \ x \ w &= 0 \\ w^1 \ x \ w^2 &= - w^2 \ x \ w^1. \end{aligned} \quad (6)$$

Em particular:

$$du \ x \ du = 0, \ du \ x \ dv = - dv \ x \ du. \quad (7)$$

Por um abuso de linguagem cômodo consideraremos uma função escalar

$$f = f(P) = f(u, v), \quad (8)$$

de um número qualquer de variáveis, como um pf. de grau zero.

Da (5) decorre imediatamente a distributividade à esquerda e à direita e a associatividade da lei de composição (5). A (5) mostra ainda que a equação

$$w^1 \ x \ w^2 = 0 \quad (9)$$

significa a dependência linear dos dois pfaffianos.

O produto exterior é invariante numa transformação admissível de coordenadas.

Consideremos a transformação admissível :

$$x = x(u, v), \ y = y(u, v); \ u = u(x, y), \ v = v(x, y), \quad (10)$$

de onde :

$$dx = \frac{x}{u} du + \frac{x}{v} dv, \quad dy = \frac{y}{u} du + \frac{y}{v} dv \quad (11)$$

$$du = \frac{u}{x} dx + \frac{u}{y} dy, \quad dv = \frac{v}{x} dx + \frac{v}{y} dy,$$

com os jacobianos :

$$J_x = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad J_y = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}. \quad (12)$$

Com o produto exterior nas (11) obtemos :

$$dx \wedge dy = J_x (du \wedge dv), \quad du \wedge dv = J_y (dx \wedge dy). \quad (13)$$

Isto posto, sejam os pfaffianos :

$$w^r = \frac{p}{r} du + \frac{q}{r} dv, \quad \tilde{w}^r = \frac{a}{r} dx + \frac{b}{r} dy \quad (14)$$

$$(r = 1, 2).$$

Com as (11) obtemos:

$$\frac{p}{r} = \frac{a}{r} \frac{x}{u} + \frac{b}{r} \frac{y}{u}, \quad \frac{q}{r} = \frac{a}{r} \frac{x}{v} + \frac{b}{r} \frac{y}{v} \quad (15)$$

Finalmente, aplicando o produto de determinantes, resulta

$$\begin{aligned} w^1 \wedge w^2 &= (p_{12} q_{21} - p_{21} q_{12})(du \wedge dv) = (a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12}) J_x (du \wedge dv) \\ &= (a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12})(dx \wedge dy) = \tilde{w}^1 \wedge \tilde{w}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

### § 12. DIFERENCIAL EXTERIOR.

Introduzida por Cartan, E. (1 869 - 1 951), a diferencial exterior

do pf. binômio

$$w = p \, du + q \, dv \quad (1)$$

é, por definição, a forma diferencial

$$dw = dp \times du + dq \times dv, \quad (2)$$

i. é.,

$$dw = \left( \frac{q}{u} - \frac{p}{v} \right) (du \times dv). \quad (3)$$

Se a forma é de grau zero, i.e., a (11,8), a sua diferencial exterior será, por definição, a sua diferencial ordinária df.

Propriedades:

(i) distributividade em relação à soma.

$$d(w^1 + w^2) = dw^1 + dw^2. \quad (4)$$

(ii) A diferencial exterior da diferencial ordinária de uma função escalar é nula, i.e.,

$$d(df) = 0. \quad (5)$$

De fato, segue da (3).

$$d(df) = d\left(\frac{f}{u} du + \frac{f}{v} dv\right) = \left(\frac{f}{vu} - \frac{f}{uv}\right) (du \times dv) = 0,$$

pois que  $\frac{f}{uv} = \frac{f}{vu}$ , uma vez que supomos sempre as nossas funções tantas vezes continuamente diferenciáveis quantas necessário.

(iii)

$$\text{se } dw = 0, \text{ então } w = df, \quad (6)$$

i.e., o pf. é uma diferencial exata.

De fato, segue da (3) que  $\frac{p}{v} = \frac{q}{u}$ .

(iv)

$$d(w^{\frac{1}{v}} x w^{\frac{2}{u}}) = dw^{\frac{1}{v}} x w^{\frac{2}{u}} - w^{\frac{1}{v}} x dw^{\frac{2}{u}}. \quad (7)$$

Vamos proceder à verificação para dois pf. monômios :

$$w^{\frac{1}{v}} = p \, du, \quad w^{\frac{2}{u}} = s \, dv. \quad (8)$$

Teremos

$$\begin{aligned} d(w^{\frac{1}{v}} x w^{\frac{2}{u}}) &= d[ps(du x dv)] = (sdp + pds)x(du x dv) \\ &= s(dp x du x dv) + p(ds x du x dv). \end{aligned}$$

O primeiro termo do último membro nada mais é do que  $dw^{\frac{1}{v}} x w^{\frac{2}{u}}$ , enquanto que o segundo, com a transposição dos pf. ds e du, fica multiplicado por -1 e dá precisamente  $-w^{\frac{1}{v}} x dw^{\frac{2}{u}}$ .

(v) Quando um dos pf. é de grau zero a (7) se escreve:

$$d(wf) = dw \cdot f - (wx df), \quad d(fw) = df x w + f \cdot dw. \quad (9)$$

(vi)

$$d(dw) = 0. \quad (10)$$

É o importante teorema de Poincaré, H. (1854 - 1912) - Volterra, V. (1860 - 1940).

Façamos a verificação no caso de um pf. monômio.

$$\begin{aligned} d(dw) &= d[d(p \, du)] = d(dp x du) = d(dp) x du - dp x d(du) = 0, \\ \text{como consequência da (5).} \end{aligned}$$

(vii) A diferencial exterior é um invariante n'uma transformação admissível de coordenadas.

Consideremos os pfaffianos:

$$w = p \, du + q \, dv, \quad \tilde{w} = a \, dx + b \, dy, \quad (11)$$

com a transformação admissível das (11, 10).

Resultam:

$$p = \underset{u}{ax} + \underset{u}{by} \quad \text{e} \quad q = \underset{v}{ax} + \underset{v}{by}. \quad (12)$$

Se efetuarmos o cálculo das derivadas parciais:

$$\underset{u}{q} = \underset{x}{q} \underset{u}{x} + \underset{u}{q} \underset{y}{y}, \quad \underset{v}{p} = \underset{x}{p} \underset{v}{x} + \underset{v}{p} \underset{y}{y} \quad (13)$$

obtemos por subtração

$$\underset{u}{q} - \underset{v}{p} = \underset{x}{(b - a)} \underset{y}{J} \quad (14)$$

A diferenciação de  $w$ , com as (11, 13), nos dá

$$\begin{aligned} dw &= \underset{u}{(q - p)} (du \times dv) = \underset{x}{(b - a)} \underset{y}{J} (du \times dv) \\ &= \underset{x}{(b - a)} (dx \times dy) = d\tilde{w}. \end{aligned} \quad (15)$$

### § 13. DERIVADAS EM RELAÇÃO A UM PAR DE PFAFFIANOS.

Dado o par de pf. (11,3), linearmente independente, i.e.

$$w^1 \times w^2 \neq 0, \quad (1)$$

vamos exprimir a diferencial da função escalar (11,8) como combinação linear desse pf., i.e.

$$df = f du + f dv = f w^1 + f w^2. \quad (2)$$

Das (11, 3) e (2) seguem:

$$f_u = pf_1 + rf_2, \quad f_v = qf_1 + sf_2, \quad (3)$$

de onde:

$$f_1 = \frac{sf_u - rf_v}{ps - qr}, \quad f_2 = \frac{qf_u + pf_v}{ps - qr} \quad (4)$$

As  $f_1$ ,  $f_2$  são as derivadas de f em relação ao par de pf. dado.

São válidas as regras ordinárias:

$$(f + f')_1 = f_1 + f'_1, \quad (ff')_1 = f_1 f' + ff'_1, \quad (5)$$

contudo, em geral, não é válida a regra da permutabilidade na derivada mista.

De fato, sejam as diferenciais:

$$df_r = f_{r1} w^1 + f_{r2} w^2, \quad (r = 1,2). \quad (6)$$

A diferenciação exterior do último membro da (2), com aplicação da segunda das (12, 9), após transposição de membro, permite escrever:

$$-df_1 w^1 - df_2 w^2 = f_1 dw^1 + f_2 dw^2$$

ou ainda

$$(f_{12} - f_{21})(w^1 w^2) = f_1 dw^1 + f_2 dw^2 \neq 0 \quad (7)$$

logo  $f_{12} \neq f_{21}$ .

Contudo, será  $f_{12} = f_{21}$  quando, de acordo com (12, 6),  $w^1$  e  $w^2$  são diferenciais totais exatas.

### § 13. FÓRMULA DE STOKES GENERALIZADA

O Cálculo Exterior realiza a síntese da teoria das transformações integrais com a seguinte fórmula fundamental

$$\boxed{\int d\omega = \int \omega} \quad (1)$$

denominada fórmula de Stokes, G.C. (1 819 - 1 903), generalizada.

A primeira integral é estendida a uma variedade riemanniana a  $(m + 1)$  dimensões e a segunda à fronteira a  $m$  dimensões dessa variedade. É essencial que se tenha convencionado uma orientação coerente. As fórmulas clássicas de Stokes (ordinária), de Ostrogradsky, M.V. e de Cauchy, A.L. (1 789 - 1 857) - Green, G. (1 793 - 1 841) resultam como casos particulares.

Como exemplo, as  $(12,1)$  e  $(12,3)$ , levadas na (1), dão imediatamente

$$\int_{\Sigma} (q_u - p_v) (du \times dv) = \int_C (p du + q dv), \quad (2)$$

que é a expressão do teorema de Green para o plano. Ele se aplica ainda sobre uma superfície desde que por todo ponto  $P(u, v)$  da região considerada passem exatamente uma linha  $u$  ( $v = \text{const.}$ ) e uma linha  $v$  ( $u = \text{const.}$ ) da rede  $R_0$  de linhas que cobre a referida região.

Para um estudo completo do Cálculo Exterior v./13/, /27/, /29/.

## 2. GEOMETRIA DIFERENCIAL MODERNA

## § 21. EQUAÇÕES DE ESTRUTURA

Consideremos as três coordenadas cartesianas retangulares  $x^r = x^r(u, v)$  com  $r = 1, 2, 3$  funções de duas novas variáveis  $u$  e  $v$ , arbitrárias.

O ponto  $P = P(x^1, x^2, x^3)$  do espaço ordinário, ou se quizermos, o vector-radar  $P = 0$ , com  $0$  ponto fixo, será função das novas variáveis e escreveremos

$$P = P(u, v). \quad (1)$$

Ao variar  $u$  e  $v$  esse ponto descreverá uma variedade bidimensional ou superfície  $\Sigma$ , sobre a qual as linhas coordenadas  $u$  ( $v = \text{const.}$ ) e  $v$  ( $u = \text{const.}$ ) formam uma rede de linhas  $R_0$ .

A (1) é a representação analítica da superfície.

Para estudar  $\Sigma$ , ou melhor, um elemento de superfície  $\Sigma_r$ , uma vez que a maioria de nossas conclusões é puramente local e não global, ligamos ao  $P$  de  $\Sigma$  um triedro trirretângulo  $P, A_r (r = 1, 2, 3)$ .

Imaginemos que  $P$  sofre um deslocamento infinitesimal indo para  $P(u + du, v + dv)$ .

A posição  $P + dP, A_r + dA_r$  ficará determinada, em relação à posição  $P, A_r$ , se conhecermos as componentes relativas, referidas aos vectores unitários  $A_r$ , dos quatro vectores infinitésimos  $dP$  e  $dA_r$ , i.e.:

$$dP = w^r A_r$$

$$dA_r = w^s_r A_s$$

(2)

Resultam:

$$w_r^r = dP \cdot A_r$$

$$w_r^s = dA_r \cdot A_s$$

(3)

Por outro lado

$$dP = P_u du + P_v dv$$

(4)

As doze componentes  $w$  são formas lineares e homogêneas em relação ao vector  $dP$ , logo em relação às diferenciais  $du$  e  $dv$ . Esses pf., contudo, não são todos independentes.

De fato, consideremos a seguinte equação em delta simples de Kronecker, L. (1823 - 1891)

$$A_r \cdot A_s = \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r \neq s \end{cases} \quad (5)$$

A diferenciação, com a segunda das (3), dá

$$w_r^s + w_s^r = 0 \quad (6)$$

Escreveremos indiferentemente:

$$w_r^s = w_{rs} = w_t = -w_s^r, \quad (7)$$

onde  $rst$  representa uma dentre as três permutações circulares 123, 231, 312.

Agora, ficamos reduzidos a seis pf. ou a dois vectores infinitási-

mos,  $dP$  e

$$dW = v_r A_r . \quad (8)$$

Resumindo, sob forma explícita, teremos:

base fixa	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$P = 0$	$x^1$	$x^2$	$x^3$

(9)

base móvel	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$dP$	$w^1$	$w^2$	$w^3$
$dW$	$w_1$	$w_2$	$w_3$

(10)

(11)

(12)

(13)

(14)

$dA_1$	0	$+ w_3$	$- w_2$
$dA_2$	$- w_3$	0	$+ w_1$
$dA_3$	$+ w_2$	$- w_1$	0.

Consideremos um campo vectorial de vector

$$v = v^r A_r \quad (15)$$

e calculemos a variação geométrica elementar desse vector no deslocamento infinitesimal em estudo.

A diferenciação da (15), com a segunda das (2) e a troca de nome dos índices, nos dá

$$dV = \frac{r}{r} dA + \frac{r}{r} v dA = \frac{r}{r} dA + \frac{s}{s} \frac{r}{r} v w A = \frac{r}{s} \frac{s}{r} v w A . \quad (16)$$

As componentes desse vector infinitesimal serão as quantidades

$$Dv = \frac{r}{sr} dv + \frac{r}{sr} s v w . \quad (17)$$

E a diferencial absoluta de  $v^r$  e por abuso de linguagem diz-se ainda que  $dV$  é a diferencial absoluta do vector campo. No caso de campo vectorial uniforme, i.e., quando o vector (15) é o mesmo em todos os pontos será

$$\frac{r}{sr} dv + \frac{r}{sr} s v w = 0 . \quad (18)$$

Esta é, portanto, a condição de um transporte paralelo de um vector. No caso de ser o vector (15) fixo no triedro móvel, i.e.,  $v^r = \text{const.}$ , a (16) será

$$dV = \frac{s}{sr} \frac{r}{r} v w A , \quad (19)$$

ou, sob forma explícita de determinante simbólico

$$dV = \begin{vmatrix} A & A & A \\ 1 & 2 & 3 \\ w & w & w \\ 1 & 2 & 3 \\ v & v & v \end{vmatrix} . \quad (20)$$

Então

$$dV = dW \times V, \quad (21)$$

e o deslocamento infinitesimal do ponto  $V$ , em relação ao ponto fixo  $0$ , será

$$d_o V = dP + dW \times V . \quad (22)$$

Com (21) podemos escrever as seguintes fórmulas de Poisson, S. D.

(1 781 - 1 840).

$$\frac{dA}{r} = \frac{dw}{r} \times A. \quad (23)$$

Para uma interpretação geométrico - cinemática dos pf. suponhamos  $w^1 \neq 0$  e todos os outros nulos: o deslocamento de  $V$  é a translação para lela a  $A_1$  e de grandeza  $w^1$ , se  $w^2 = w^3 = 0$  e todos os outros nulos: o deslocamento de  $V$  é a menos de um infinitéssimo de ordem superior, a rotação de eixo  $A_3$  e ângulo  $w_3$ .

Os seis pf. -  $w$  satisfazem certas relações que dominam a teoria dos movimentos a dois parâmetros. Elas resultam da diferenciação exterior das fórmulas (21, 2) e da imposição da nulidade dessas diferenciais a fim de satisfazer à condição de integrabilidade expressa pelo teorema de Poincaré-Volterra, visto no § 12.

Aplicando a primeira das (12, 9) obtemos:

$$\frac{dw}{r} \cdot A - \left( \frac{w}{r} \times \frac{dA}{r} \right) = 0, \quad \frac{dw}{s} \cdot A - \left( \frac{w}{s} \times \frac{dA}{s} \right) = 0, \quad (24)$$

ou ainda, com a segunda de (21, 2) e a troca de nome dos índices :

$$\frac{dw}{r} - \left( \frac{w}{r} \times \frac{w}{s} \right) = 0, \quad \frac{dw}{r} - \left( \frac{w}{r} \times \frac{w}{t} \right) = 0, \quad (25)$$

ou

$\frac{dw}{r} = \frac{w}{r} \times \frac{w}{s}$	$\frac{dw}{r} = \frac{w}{r} \times \frac{w}{t}$
---	---

$$, \quad (26)$$

que são as equações de estrutura do triedro móvel.

Imagine, agora, uma superfície  $\Sigma$  de vector - radar (21,1), sendo o ponto  $P$  origem do triedro móvel e tal que o vector unitário  $A_3$  permane-

neça sempre normal à superfície.

O vector infinitésimo (21,4) individualiza, então, uma direção superficial e os vectores finitos  $P_u$  e  $P_v$  assinalam as direções das linhas paramétricas.

Teremos

$$A_3 = \frac{P_u \times P_v}{|P_u \times P_v|} . \quad (27)$$

O denominador é um escalar importante na teoria das superfícies. A conhecida identidade de Lagrange, J.L. (1736 - 1813).

$$(P_u \times P_v) \cdot (A_1 \times A_2) = \begin{vmatrix} P_u \cdot A_1 & P_u \cdot A_2 \\ P_v \cdot A_1 & P_v \cdot A_2 \end{vmatrix} , \quad (28)$$

válida para quatro vectores quaisquer, permite escrever, num espaço propriamente euclidiano, i.e., naquêle em que a norma ou quadrado do comprimento de um vector é sempre positiva.

$$(P_u \times P_v) \cdot (P_u \times P_v) = (P_u \cdot P_u)(P_v \cdot P_v) - (P_u \cdot P_v)^2 > 0 \quad (29)$$

Façamos

$$D = |P_u \times P_v| > 0 , \quad (30)$$

com a determinação positiva do radical, no cálculo da (30) a partir da (29).

A (27) se escreve agora

$$A_3 = \frac{P_u \times P_v}{D} . \quad (31)$$

Da primeira de (21,3) segue

$$w^3 \equiv 0 . \quad (32)$$

Ficamos reduzidos a cinco pfaffianos.

As equações de estrutura (26), sob forma explícita, se escrevem agora:

$$\boxed{dw^1 = -w^2 \times w_3} \quad \boxed{dw^2 = w^1 \times w_3} \quad (33)$$

$$\boxed{w^1 \times w_2 + w_1 \times w^2 = 0} \quad (34)$$

$$\boxed{dw_1 = -w_2 \times w_3} \quad \boxed{dw_2 = w_1 \times w_3} \quad \boxed{dw_3 = -w_1 \times w_2} \quad (35)$$

## § 22. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA GEOMETRIA.

Uma propriedade ou um elemento geométrico ligado a um ponto, a um conjunto de pontos, a uma linha, etc., de uma superfície dada, é, por definição, um elemento que não depende da rede de linhas paramétricas escolhida para o estudo da superfície. Dentro desses elementos ou propriedades, alguns dependem apenas das medições efetuadas sobre a superfície e dizem-se propriedades geodésicas e seu conjunto constitue a Geometria Intrínseca.

As propriedades geodésicas se opõem as propriedades externas, que afetam as relações do espaço exterior com a superfície e seu conjunto constitue a Geometria Extrínseca.

A (21,10) com a (21,32) nos dá

$$dP = w^1 A_1 + w^2 A_2 , \quad (1)$$

de onde

$$ds^2 = w^1^2 + w^2^2 = (w)^2. \quad (2)$$

E' a métrica, ou o  $ds^2$  da superfície  $\Sigma$ , propriedade geodésica. As propriedades externas, as mais importantes, são aquelas em que intervém a normal  $(P; A_3)$  e elas variam ao variar a forma da superfície.

Imaginemos o vector  $A_3 = A_3(u, v)$  aplicado, p. ex., na origem fixa 0.

A correspondência pontual

$$(0; P) \longleftrightarrow (0; A_3), \quad (3)$$

define a representação esférica de Gauss, C.F., (1 777 - 1 855). Ao descrever o ponto P o contorno de um elemento de área  $\sigma$  sobre  $\Sigma$ , o ponto  $A_3$  descreverá, em geral, o contorno de um elemento de área  $\sigma^0$  sobre  $\Sigma^0$ , ímagem esférica de raio unidade.

O quociente

$$K = \frac{\sigma^0}{\sigma} \quad (4)$$

é a curvatura gaussiana da superfície  $\Sigma$ , no ponto P.

Elemento de área.

Da (1) seguem :

$$w^1 = dP \cdot A_1, \quad w^2 = dP \cdot A_2, \quad (5)$$

que são os lados de um retângulo infinitesimal.

Tendo em vista as (21,4) e (21,28) obtemos

$$\begin{aligned}
 \delta' &= w^1 \times w^2 = (P_u du + P_v dv) \cdot A_1 \times (P_u du + P_v dv) \cdot A_2 \\
 &= [(P_u \cdot A_1)(P_v \cdot A_2) - (P_u \cdot A_2)(P_v \cdot A_1)](du \times dv) \\
 &= [(P_u \times P_v) \cdot (A_1 \times A_2)](du \times dv) = D A_3 \cdot A_3 (du \times dv),
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\delta' = w^1 \times w^2 = D (du \times dv). \quad (6)$$

Elemento de área da imagem esférica.

Da (21, 14)

$$dA_3 = w_2 A_1 - w_1 A_2, \quad (7)$$

de onde

$$\delta' = w_1 \times w_2 = - dw_3. \quad (8)$$

A (4) se escreve agora

$$\boxed{K = \frac{\delta'}{\delta} = \frac{w_1 \times w_2}{w^1 \times w^2} = - \frac{dw_3}{w^1 \times w^2}} \quad (9)$$

Os pf - w sendo formas lineares em relação ao vector (1) podem ser expressos como combinação linear de suas componentes relativas, ou seja :

$$-w_2 = c_1 w^1 + c_3 w^2 \quad (10)$$

$$+w_1 = c_3 w^1 + c_2 w^2 \quad (11)$$

$$+w_3 = g_1 w^1 + g_2 w^2 \quad (12)$$

O coeficiente  $c_3$  aparece em comum nas duas primeiras para atender à equação de estrutura (21, 34).

A multiplicação exterior das duas primeiras dá

$$K = c_1 c_2 - c_3^2 \quad (13)$$

Das equações de estrutura (22, 33) com a (12) seguem :

$$g_1 = \frac{dw^1}{w^1 x w^2} \quad g_2 = \frac{dw^2}{w^1 x w^2} \quad (14)$$

A diferenciação exterior da (12) dá

$$dw_3 = dg_1 x w^1 + dg_2 x w^2 + g_1 dw^1 + g_2 dw^2 \quad (15)$$

Introduzindo derivadas em relação ao par de pf.  $w^1, w^2$ , como vimos no § 13 :

$$dg_s = g_{s,1} w^1 + g_{s,2} w^2 \quad (16)$$

obtemos

$$dw_3 = (g_{2,1} - g_{1,2} + g_1^2 + g_2^2)(w^1 \times w^2). \quad (17)$$

Segue da (9)

$$K = g_{1,2} - g_{2,1} - g_1^2 - g_2^2 \quad (18)$$

Procedimento análogo com as equações (10) e (11), i.e., com as duas primeiras equações de estrutura (21, 35) permite obter as seguintes equações de Codazzi.

$$2c_3 g_1 + (c_2 - c_1) g_2 + c_{2,1} - c_{3,2} = 0 \quad (19)$$

$$(c_1 - c_2) g_1 + 2c_3 g_2 + c_{3,1} - c_{1,2} = 0 \quad (20)$$

Vamos introduzir coordenadas polares no plano tangente (fig. 1).

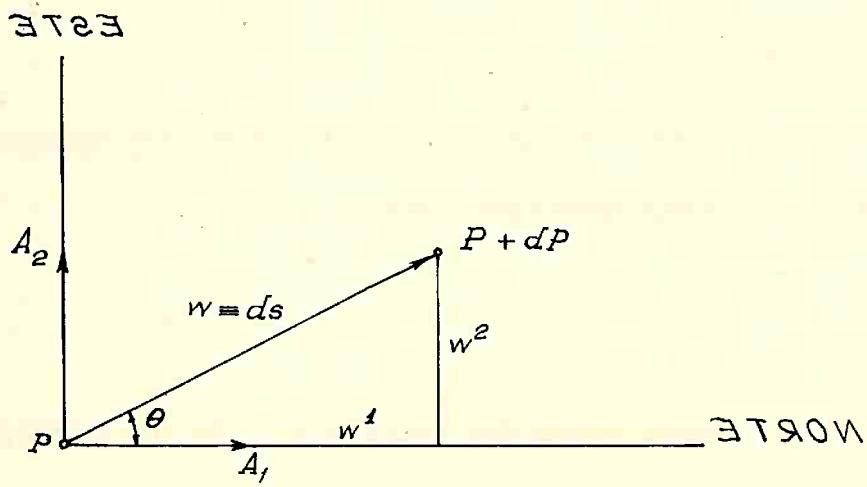


fig. 1

$$w \quad \angle \theta \quad , \quad (21)$$

$w^1 = w \cos \theta$	$w^2 = w \sin \theta$
-----------------------	-----------------------

onde  $\theta$  é o azimute de emissão norte do elemento de linha de direção e sentido, (i.e., de orientação),  $dP$  e comprimento  $w \equiv ds$ .

O matemático deve olhar a fig. 1, ao passo que o geodeta deve olhar o verso da página, imprimindo à figura um giro de  $90^\circ$ , no sentido do relógio, para ter o N. para cima e o E. à sua direita.

Os pf.  $w^1$ ,  $w^2$  e  $w_3$  são geodésicos, mas  $w_1$  e  $w_2$  e, portanto,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são externos.

O último membro da (9) e a (18) permitem concluir:

A curvatura gaussiana é uma propriedade geodésica.

Em outras palavras : A curvatura K pode ser calculada conhecendo-se apenas os pf. métricos  $w^1$ ,  $w^2$ , ou seja, com medições realizadas sobre a superfície  $\Sigma$

Ainda : Duas superfícies isométricas em pontos correspondentes têm a mesma curvatura gaussiana, i.e.,

$$K = \tilde{K} . \quad (23)$$

Estes enunciados constituem o teorema egregium de Gauss : "um teorema certamente excelente," escreveu o próprio Gauss.

## § 23 CINTAS E LINHAS

Vamos dar dois giros ao triedro  $P, A_r$  e considerar as três posições seguintes : (fig. 2)

CARTAN

 $A_1 A_2 A_3$ 

DARBOUX

 $\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3$ 

FRENET

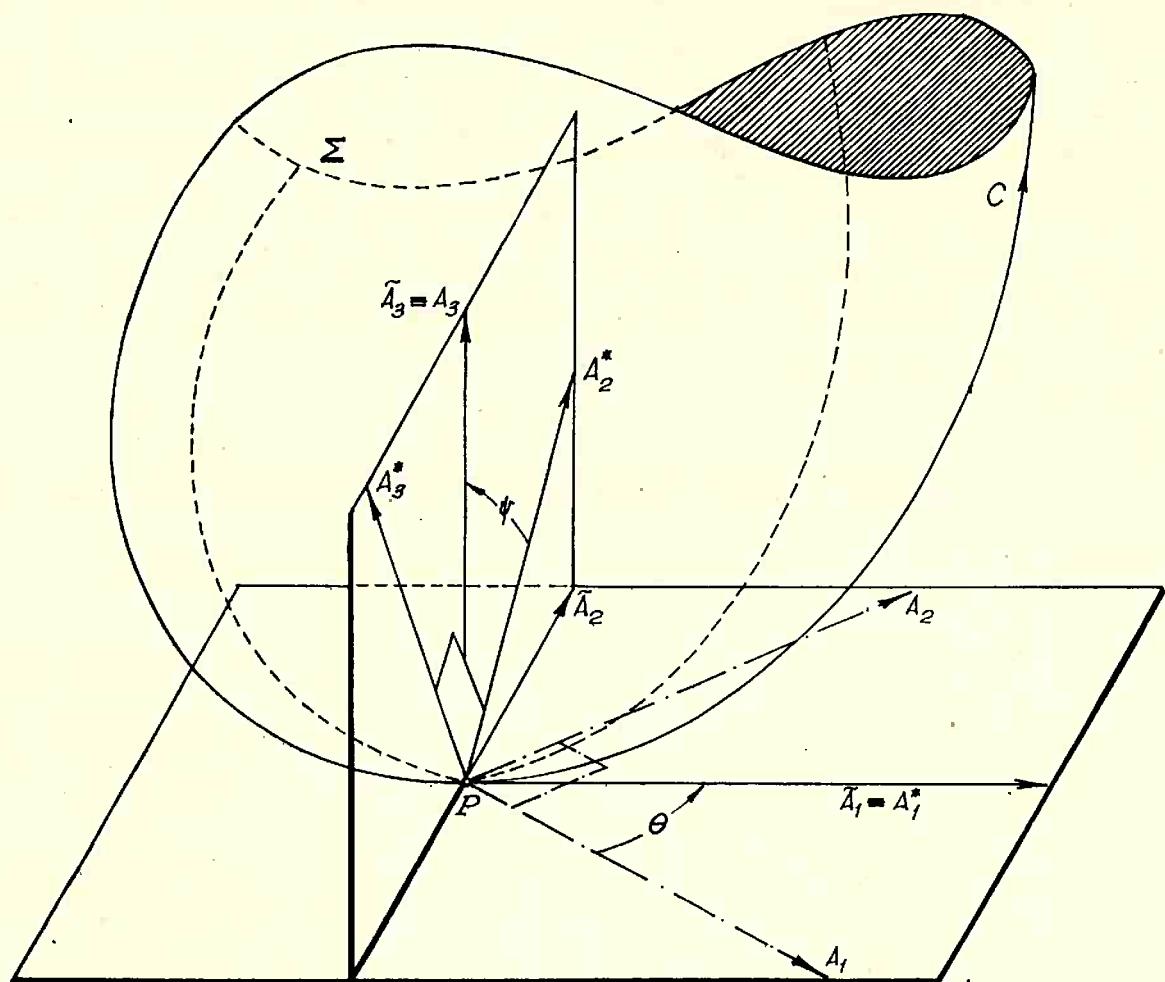
 $A_1^* A_2^* A_3^*$ 

fig. 2

$$A_3 = \tilde{A}_3 ,$$

$$A_1 = A_1^*$$

$$- (u, v) = \text{âng. } (A_1, \tilde{A}_1) , \quad - (\tau) = \text{âng. } (A_2^*, A_3) . \quad (1)$$

Primeiro giro em torno de  $A_3$

O triedro de Cartan passará a coincidir com o triedro de Darboux, J.G. (l 842 - l 917) e o vector  $\tilde{A}_1$  é tangente a uma linha orientada  $C$  jacente sobre a superfície  $\Sigma$ .

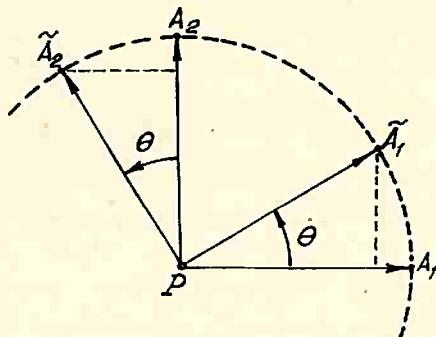


fig. 3

As bases serão ligadas entre si pelas relações constantes do seguinte quadro (fig. 3) :

$= 11$	$A_1$	$A_2$	
$\tilde{A}_1$	$+ \cos \theta$	$+ \sin \theta$	(2)
$\tilde{A}_2$	$- \sin \theta$	$+ \cos \theta$	

Com as (21, 3) :

$$\tilde{w}^1 = dP \cdot \tilde{A}_1, \quad \tilde{w}^2 = dP \cdot \tilde{A}_2$$

(3)

$$\tilde{w}_1 = d\tilde{A}_2 \cdot A_3, \quad \tilde{w}_2 = -d\tilde{A}_1 \cdot A_3, \quad \tilde{w}_3 = d\tilde{A}_1 \cdot A_2.$$

Com estas relações e tendo em vista as (22, 22) obtemos as fórmulas seguintes :

$=  $	$w^1$	$w^2$
$\tilde{w}^1 = w$	$+ \cos \theta$	$+ \sin \theta$
$\tilde{w}^2 = 0$	$- \sin \theta$	$+ \cos \theta$

(4)

$=  $	$w_1$	$w_2$
$\tilde{w}_1$	$+ \cos \theta$	$+ \sin \theta$
$\tilde{w}_2$	$- \sin \theta$	$+ \cos \theta$

(5)

$$\tilde{w}_1 = \frac{w^1 w_1 + w^2 w_2}{w}, \quad \tilde{w}_2 = \frac{w^1 w_2 - w^2 w_1}{w} \quad (6)$$

$$\tilde{w}_3 = d\theta + w_3. \quad (7)$$

Segundo giro em torno de  $A_1$

O triedro de Darboux passará a coincidir com o triedro de Frénet,

F. (1 816 - 1 888) relativo à linha espacial C.

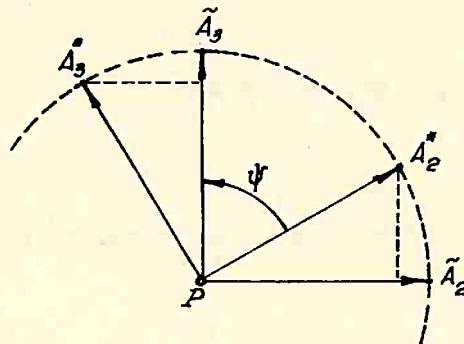


fig. 4

As bases serão ligadas entre si pelas relações constantes do seguinte quadro (fig. 4)

=	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_3$	
$A_2^*$	$+ \sin \psi$	$+ \cos \psi$	(8)
$A_2^*$	$- \cos \psi$	$+ \sin \psi$	

Com as (21, 3) :

$$w_1^* = dP \cdot \tilde{A}_1 \quad , \quad w_2^* = dP \cdot A_2^* \quad (9)$$

$$w_1^* = dA_2^* \cdot A_3^* \quad , \quad w_2^* = dA_3^* \cdot \tilde{A}_1 \quad , \quad w_3^* = -dA_2^* \cdot \tilde{A}_1$$

Com estas relações obtemos as fórmulas seguintes :

$$w_1^* = \tilde{w}_1 = w = ds \quad , \quad (10)$$

	$w^2$	$=$	$0$
$= 11$	$\tilde{w}_2$		$\tilde{w}_3$
$w_2^*$	$+ \sin \psi$	$+ \cos \psi$	
$w_3^*$	$- \cos \psi$	$+ \sin \psi$	

(12)

$$w_1^* = - d\psi + \tilde{w}_1 . \quad (13)$$

No primeiro giro  $\theta$  fica invariante a grandeza

$$\frac{w_1^2 + w_2^2}{(w)^2} = \frac{\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2}{(w)^2} = t^2 . \quad (14)$$

No segundo giro  $\psi$  fica invariante a grandeza

$$\frac{\tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_3^2}{(w)^2} = \frac{w_2^*{}^2 + w_3^*{}^2}{(w)^2} = k^2 . \quad (15)$$

Imaginemos que a linha  $C$  é espacial, i.e., isolada de  $\Sigma$ .

Dispomos, então, ao longo de  $C$ , de um vector tangente  $\tilde{A}_1 \equiv A_1^*$ ,

com

$$dP = \tilde{w}_1^* \tilde{A}_1 = w_1^* A_1^* , \quad (16)$$

e de um vector  $\tilde{A}_3 \equiv A_3 = \tilde{A}_3(t)$ , tal que

$$dP \cdot A_3 = 0 . \quad (17)$$

Com tal vector  $\tilde{A}_3$  a linha  $C$  diz-se suporte de uma cinta  $C^*$  e  $\tilde{A}_3$  é o vector unitário normal da cinta. A cinta pode ser imaginada como extreita tira ou fita ao longo da linha  $C$ .

Ela ficará determinada pelos quatro pfaffianos :

$$\tilde{w}^1(\tilde{t}), \tilde{w}_1(\tilde{t}), \tilde{w}_2(\tilde{t}), \tilde{w}_3(\tilde{t}),$$

com os quais obtemos os oito elementos do quadro.

Invariantes	
diferenciais	integrais
$w = ds$	$s = \int_{t_0}^{\tilde{t}} w$
$\frac{du_r}{ds} = \frac{\tilde{w}_r}{w}$	$u_r = \int_{t_0}^{\tilde{t}} \tilde{w}_r$

(18)

(19)

Consideremos agora os casos particulares de cintas.

a) Cinta cônica

$$\tilde{w}^1 = dP \cdot \tilde{A}_1 = 0, \quad (20)$$

para todos os valores de  $t$ . A linha  $C$ , suporte da cinta  $C^*$ , se reduz a um ponto fixo  $P = \text{const.}$  e  $C^*$  degenera.

A cinta se diz cônica e este é um caso pouco interessante.

b) Cinta de curvatura

$$\tilde{w}_1 = (\tilde{A}_1, A_3, dA_3) = 0. \quad (21)$$

Determinemos o caso em que as normais ( $P$  ;  $A_3$ ) à linha  $C$ , supõe da cinta  $C^*$ , sejam, em geral, tangentes a uma linha  $C'$ , evoluta de  $C$  (fig. 5)

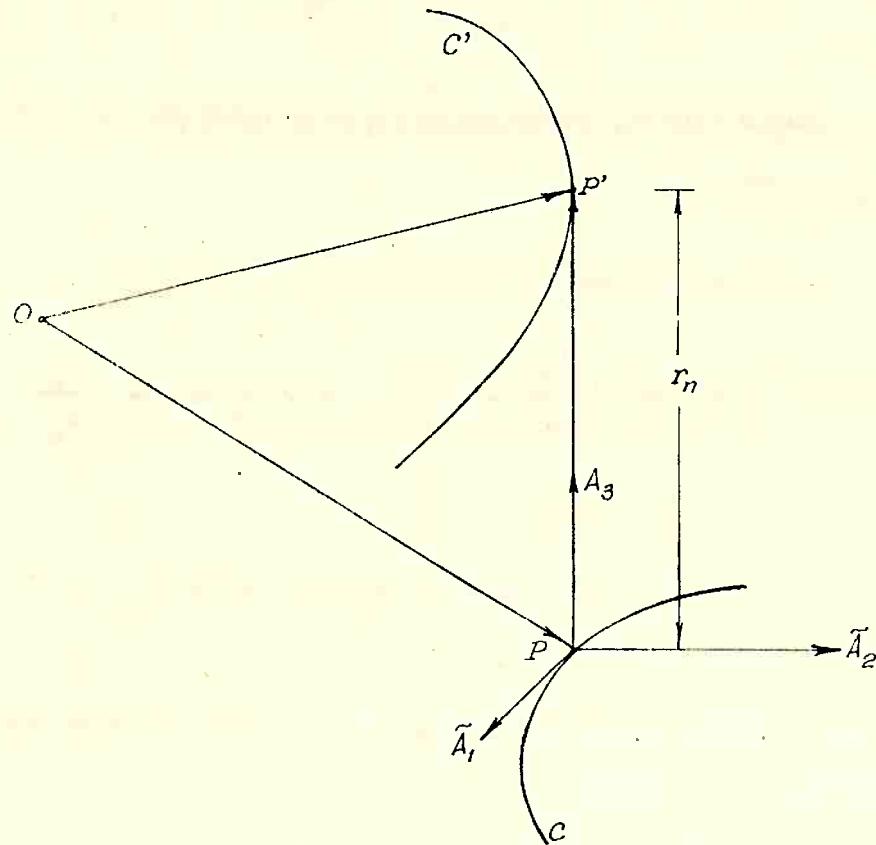


fig. 5

Então

$$P' = P + r_n A_3, \quad (22)$$

e para direção da tangente a  $C'$  teremos

$$dP' = dP + r_n dA_3 + dr_n A_3 = (\tilde{w}^1 + r_n \tilde{w}) \tilde{A}_1 - r_n \tilde{w} \tilde{A}_2 + dr_n \tilde{A}_3,$$

segundo (16) e (21, 14), escrita com til.

(23)

Se a direção da tangente coincidir com a direção da normal devemos ter :

$$\tilde{w}_1 = 0, \quad r_n = - \frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2} = - \frac{1}{k_n}. \quad (24)$$

Estas cintas, caracterizadas pela condição  $\tilde{w}_1 = 0$  se denominam cintas de curvatura.

Podemos escrever

$$dP = \frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2} \tilde{A}_1 = \frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2} (\tilde{w}_2 \tilde{A}_1 - \tilde{w}_1 \tilde{A}_2) = - r_n dA_3 = - \frac{1}{k_n} dA_3 \quad (25)$$

ou

$$dA_3 + k_n dP = 0. \quad (26)$$

é a fórmula de Rodrigues, O. (1794 - 1851) que também caracteriza as cintas de curvatura.

As normais à cinta  $C^*$  de curvatura formam uma superfície desenvolvível para a qual  $C$  é a aresta de retrocesso.

Um exemplo simples é o que oferecem os meridianos e paralelos do elipsóide de revolução, que são suportes de cintas de curvatura porque ao longo dos meridianos as normais à cinta formam planos, e ao longo dos paralelos cônes. Os cones e planos são superfícies desenvolvíveis.

A condição para que  $C^*$ , após o giro  $\psi$ , se converta em cinta de curvatura ( $w_1^* = 0$ ), segundo (23, 13), é

$$d\psi = \tilde{w}_1 \text{ então } \psi = \int \tilde{w}_1 = u_1 + \psi_0. \quad (27)$$

Daqui uma significação geométrica para  $u_1$  e a seguinte proposição de Bonnet, O. (1853) :

Duas cintas de curvatura com a mesma linha suporte C cortam-se sob um ângulo constante.

c) Cinta assintótica.

$$\tilde{w} = (\tilde{A}_1, d\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = 0. \quad (28)$$

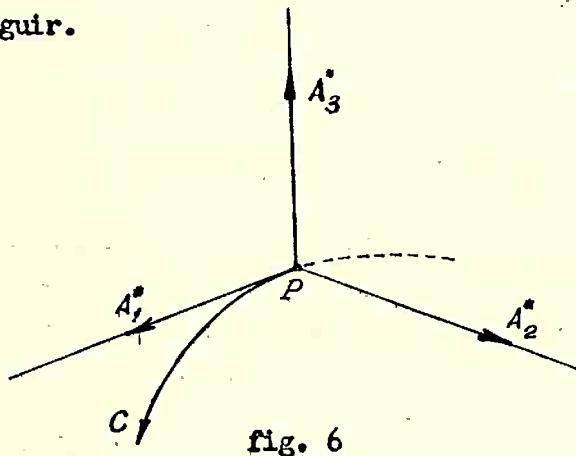
O plano  $(P; \tilde{A}_1, d\tilde{A}_1)$ , que contém duas tangentes infinitamente vizinhas é o plano osculador, então : O plano tangente  $(P; \tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$  da cinta assintótica coincide com o plano osculador de sua linha suporte.

De (14) e (15) seguem :

$$t = \frac{\tilde{w}_1}{w}, \quad k = \frac{\tilde{w}_1}{w} \quad (29)$$

que se chamam torção e curvatura da linha C. Em especial, para  $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 0$  teremos as cintas planas, ou seja, aquelas que tem fixo o plano osculador.

Para as linhas do espaço (cintas assintóticas) teremos as fórmulas de Frenet, como casos particulares das fórmulas (21,10) - (21,14) constantes do quadro a seguir.



base móvel	$A_1^*$	$A_2^*$	$A_3^*$	
$d P/ds$	$+l$	0	0	(30)
$d W/ds$	$+t$	0	$+k$	(31)
$d A_1^*/ds$	0	$+k$	0	(32)
$d A_2^*/ds$	$-k$	0	$+t$	(33)
$d A_3^*/ds$	0	$-t$	0	(34)

Ficam definidos os seguintes elementos : (fig. 6).

$(P ; A_1^*)$  = tangente

$(P ; A_2^*)$  = normal principal

$(P ; A_3^*)$  = binormal

$(P ; A_1^*, A_2^*)$  = plano osculador

$(P ; A_2^*, A_3^*)$  = plano normal

$(P ; A_3^*, A_1^*)$  = plano retificante

$d P / ds$  = vector de Darboux.

Consideremos o caso simples de uma linha plana fazendo  $A_3 = \text{const.}$ ,  
 $t = 0$ .

$$P = \sin \theta \mathbf{E}_1 - \cos \theta \mathbf{E}_2 \quad (35)$$

Da (30)

$$\mathbf{A}_1^* = \frac{dP}{ds} = (\cos \theta \mathbf{E}_1 + \sin \theta \mathbf{E}_2) \frac{d\theta}{ds}, \quad (36)$$

$$\mathbf{A}_1^* \cdot \mathbf{A}_1^* = \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 1. \quad (37)$$

Então

$$\mathbf{A}_1^* = \cos \theta \mathbf{E}_1 + \sin \theta \mathbf{E}_2 \quad (38)$$

e da (32)

$$k \mathbf{A}_2^* = \frac{d \mathbf{A}_1^*}{ds} = (-\sin \theta \mathbf{E}_1 + \cos \theta \mathbf{E}_2) \frac{d\theta}{ds}, \quad (39)$$

i.e.,

$$k = \frac{d\theta}{ds}, \quad (40)$$

mostrando que a curvatura de uma linha plana é a variação da direção da tangente em relação ao comprimento do arco.

Na (40), em vez de entender por  $\theta$  o ângulo que forma o vector tangente com uma direção fixa do plano da curva, podemos considerar  $\theta$  como comprimento do arco percorrido pela imagem da tangente  $\mathbf{A}_1^* = \mathbf{A}_1^*(s)$  à curva dada.

Com essa interpretação aparece sugestiva analogia entre os conceitos de curvatura de uma curva e curvatura gaussiana de uma superfície, visto no § 22.

d) Cinta geodésica.

$$\tilde{w}_3 = (\tilde{A}_3, \tilde{A}_1, d\tilde{A}_1) = 0. \quad (41)$$

A normal  $(P; \tilde{A}_3)$  da cinta pertence ao plano osculador  $(P; \tilde{A}_1, d\tilde{A}_1)$  de sua linha suporte, i.e., a normal principal  $\tilde{A}_2^*$  da linha suporte coincide com a normal  $\tilde{A}_3$  da cinta.

§ 24 TORÇÃO GEODÉSICA. CURVATURA NORMAL. CURVATURA GEODÉSICA.

Consideremos o vector  $(21, 11)$  referido ao triedro de Darboux.

$$\frac{dW}{ds} = \frac{\tilde{w}_1}{w} \tilde{A}_1 + \frac{\tilde{w}_2}{w} \tilde{A}_2 + \frac{\tilde{w}_3}{w} \tilde{A}_3. \quad (1)$$

Temos

$$\frac{\tilde{w}_1}{w} = \frac{d\tilde{A}_2}{ds} \cdot \tilde{A}_3. \quad (2)$$

Da (23, 34) segue

$$-t = \frac{d\tilde{A}_3^*}{ds} \cdot \tilde{A}_2^* \quad (3)$$

Comparando (2) e (3) concluimos que o coeficiente  $\frac{\tilde{w}_1}{w}$  da (1) é igual à torção  $-t$  da curva de  $\Sigma$  cuja normal principal  $\tilde{A}_2^*$  coincide com a normal  $\tilde{A}_3$  à superfície, então  $C$ , como vimos no § 23, "in fine", é o suporte de uma cinta geodésica e  $\frac{\tilde{w}_1}{w}$  é a torção geodésica de  $C$ .

Das (23, 32) e (21, 12), com til, obtemos

$$k\tilde{A}_2^* = \frac{\tilde{a}_1}{ds} = \frac{d\tilde{A}_1}{ds} = \frac{\tilde{w}_3}{w} \tilde{A}_2 - \frac{\tilde{w}_2}{w} \tilde{A}_3. \quad (4)$$

Temos aqui um vector curvatura  $k \tilde{A}_2^*$  decomposto em uma componente normal de coeficiente  $-\tilde{w}_2$  :  $w$  denominada curvatura normal e outra componente tangencial de coeficiente  $\tilde{w}_3$  :  $w$  denominada curvatura tangencial ou curvatura geodésica.

A multiplicação escalar da (4), respectivamente por  $A_3$  e  $\tilde{A}_2$ , nos dá : (fig. 2).

$$\frac{\tilde{w}_2}{w} = k \cos \psi, \quad \frac{\tilde{w}_3}{w} = k \sin \psi. \quad (5)$$

Vamos definir e calcular em termos de pf. as quatro formas fundamentais de uma superfície :

Símbolo	Definição	Valor	
$\phi_1$	$dP \cdot dP$	$w_1^2 + w_2^2$	(6)
$\phi_2$	$-dP \cdot dA_3$	$w_1 w^2 - w_2 w^1$	(7)
$\phi_3$	$-ds \cdot \tilde{A}_2 \cdot dA_3$	$w_1 w^1 + w_2 w^2$	(8)
$\phi_4$	$dA_3 \cdot dA_3$	$(w_1)^2 + (w_2)^2$	(9)

A (6) é a métrica, ou o  $ds^2$  (22, 2) ;

A (7) segue de (22, 1) com (21, 14) ;

A (8) segue de (23, 2) com (22, 22) e (21, 14) ;

A (9) segue de (21, 14).

No quadro a seguir daremos o vector (1) com suas componentes escalares expressas em diversas maneiras identicas entre si :

$\frac{dw}{ds}$		
$\tilde{A}_1 \equiv A_1^*$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_3 \equiv A_3$
$\frac{\tilde{w}_1}{w}$	$\frac{\tilde{w}_2}{w}$	$\frac{\tilde{w}_3}{w}$
$\frac{w^1 w_1 + w^2 w_2}{(w)^2}$	$\frac{w^1 w_2 - w^2 w_1}{(w)^2}$	$\frac{d}{ds} + \frac{w_3}{w}$
$t + \frac{d\psi}{ds}$	$-k \cos \psi$	$k \sin \psi$
$\frac{\phi_3}{\phi_1}$	$-\frac{\phi_2}{\phi_1}$	$\frac{x}{\phi^{1/2}}$
$t_g$	$-k_n$	$g$
torção geodésica	curvatura normal	curvatura geodésica

As (10) contém as componentes do vector de Darboux em sua forma

inicial :

As (11) são as (23, 6) e (23, 7) ;

As (12) são as (23, 13) e (5) ;

As (13) seguem das (6), (7), (8) e da definição do ângulo de contingência geodésica.

$$\chi = d\theta + w_3 ; \quad (15)$$

As (14) contém os símbolos.

Visto ser :

$$t_g = \left( -\frac{dA_3}{ds}, A_3, A_1^* \right) \text{ e } k_n = -\frac{dA_3}{ds} \cdot A_1^* \quad (16)$$

Ora  $A_3$  e  $dA_3/ds$  dependem exclusivamente do ponto  $P$ , então : Para um dado ponto  $P$  de  $\Sigma$  a torção geodésica e a curvatura normal são as mesmas para todas as curvas sobre  $\Sigma$  emitidas na mesma direção ( $P; A_1^*$ ), i.e., tendo uma tangente comum.

Visto ser  $\cos \psi = A_2^* \cdot A_3$  vemos, na segunda coluna do quadro, que a curvatura  $k = k_n \sec \psi$  fica completamente determinada por  $A_1^*$ , em face da (23, 32), e  $A_2^*$  no ponto considerado, desde que  $\psi \neq 90^\circ$ .

Ora, uma vez que  $A_1^*$  e  $A_2^*$  determinam o plano osculador no ponto, teremos : Todas as curvas de uma superfície que passam por um ponto osculador comum, não tangente à superfície, têm aí a mesma curvatura, a saber, a curvatura da curva plana cortada na superfície pelo plano osculador.

Em particular, a projeção da curva  $C$  sobre o plano normal  $(P; A_1^*, A_3)$  tem, no ponto  $P$  a mesma tangente  $A_1^*$ . Pelo que vimos, aí a curvatura normal  $k_n$  é (eventualmente a menos do sinal) a curvatura

ra da projeção de  $C$  sobre o plano normal.

Por outro lado, comparando as duas expressões :

$$g = \frac{dA_1^*}{ds} \cdot \tilde{A}_2, \quad k = \frac{dA_1^*}{ds} \cdot \frac{A_2^*}{2} \quad (17)$$

concluimos que a curvatura geodésica  $g$  é (eventualmente a menos do sinal) a curvatura da projeção de  $C$  sobre o plano tangente  $(P; A_1^*, \tilde{A}_2)$ .

Para um plano  $dw^1 = dw^2 = 0$ , então, das (22, 14) e (22, 12), segue  $w_3 = 0$  e da terceira de (11) resulta

$$g = \frac{d\theta}{ds}, \quad (18)$$

que, segundo (23, 14), é a curvatura ordinária de uma curva plana, portanto : a curvatura geodésica de uma linha plana se identifica com a sua curvatura ordinária.

Do que foi exposto concluimos que é suficiente estudar as curvas planas, ou melhor, as secções planas da superfície que passam por um ponto  $P$ , para termos, imediatamente, todas as informações concernentes à curvatura das curvas que passam por  $P$ . Da segunda coluna do quadro obtemos

$$k = k_n \sec \psi. \quad (19)$$

E' o teorema de Meusnier, J.B. (1754 - 1793), que reduz o cálculo da curvatura das curvas traçadas sobre  $\Sigma$  ao cálculo da curvatura das secções normais de mesma tangente.

A última de (11), com as (22, 12) e (22, 22), dá

$$g = \frac{d\theta}{ds} + g_1 \cos \theta + \frac{g_2 \sin \theta}{2} . \quad (20)$$

É o teorema de Liouville, J. (1809 - 1882), que nos dá a significação geométrica de  $g_1 \circ g_2$ , i.e., curvaturas geodésicas das linhas da rede  $R$  retangular, i.e., para  $\theta = 0$  e  $\theta = 90^\circ$  respectivamente.

Finalmente, com as (22,10) e (22,11) o quadro das quatro formas fundamentais passará a ser :

$\phi_1 =$	$w^1 +$	$w^2$	(21)
$\phi_2 =$	$c_1 w^1 + 2 c_3 w^1 w^2$	$c_2 w^2$	(22)
$\phi_3 =$	$c_3 w^1 + (c_2 - c_1) w^1 w^2$	$c_3 w^2$	(23)
$\phi_4 =$	$(c_3^2 + c_3^2) w^1 + 2 (c_1 + c_2) c_3 w^1 w^2$	$(c_2^2 + c_3^2) w^2$	(24)

A (23,21) com a primeira coluna do quadro de  $dW/ds$ , bem como a (23,28) com a segunda coluna do mesmo quadro dão :

$$\phi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \phi_2 = 0 , \quad (25)$$

respectivamente, para as equações das linhas de curvatura e das linhas assintóticas da superfície.

### § 25. COMPLEMENTO AO ESTUDO DAS LINHAS

Consideremos uma linha espacial  $P = P(s)$  e estacionemos o triângulo móvel no ponto  $P$ , p. ex., correspondente à origem das abcissas curvilineas,  $s = 0$ . A fórmula de Taylor, B. (1685 - 1731), permite escrever:

$$P = P(s) = P(0) + \frac{s}{1!} P'(0) + \frac{s^2}{2!} P''(0) + \frac{s^3}{3!} P'''(0) + \dots \quad (1)$$

Indicaremos as derivadas em relação a  $s$  mediante plicas e deixaremos subentendido o sub-índice "1" relativo ao ponto onde são calculadas as derivadas. Teremos por diferenciação sucessiva :

	$A_1^*$	$A_2^*$	$A_3^*$	
$P(0)$	0	0	0	
$P'(0)$	1	0	0	
$P''(0)$	0	$+k$	0	(2)
$P'''(0)$	$-k^2$	$+k'$	$+kt$	
$P''''(0)$	$-3k'k$	$k'' - k^3$	$-kt^2$	
	-----	-----	-----	

A forma de uma linha espacial  $C$  fica completamente determinada por suas equações naturais ou intrínsecas

$$k = k(s), \quad t = t(s) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 P = P_0 + s \begin{cases} 1 \\ 0 + \frac{s^2}{2} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \\ k + \frac{s^3}{6} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -k^2 \\ +k^3 + \frac{s^4}{24} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3k^4k \\ k'' - k^3 - kt^2 + \dots \\ 2k't + kt^2 \end{cases} \quad (4)
 \end{aligned}$$

A (4), para linha plana ( $t = 0$ ) é utilizada para a solução de vários problemas de Geodésia para as quais é conhecida a curvatura  $k$ , em função da qual se deseja exprimir diferentes características de um elemento finito de curva  $s$ , em particular, o afastamento (angular ou métrico) entre este elemento de curva e a corda correspondente. Assim acontece especialmente para a curva constituída por um raio luminoso na atmosfera (refração geodésica) ou para a curva plana constituída pela transformada plana de uma linha geodésica do elipsóide terrestre.

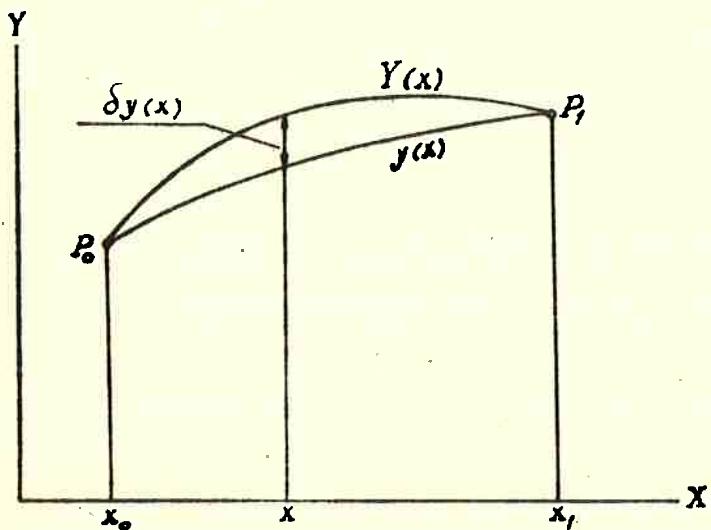


fig. 7

Uma variação  $\delta y(x)$  de uma função  $y(x)$  é uma função  $\delta y(x)$  que é acrescida a  $y(x)$  para dar uma nova função  $y(x) + \delta y(x)$

Interessa-nos comparar o valor de uma integral ao longo de um arco com o seu valor ao longo de um arco vizinho (fig. 7).

Segundo a definição

$$\delta y(x) = Y(x) - y(x) \quad (5)$$

Ao símbolo  $\delta$  denomina-se variação e representa o incremento da grandeza ao qual se aplica quando se passa, para um mesmo valor de  $x$ , do caminho estacionário ao de comparação. Deste modo é evidente que  $\delta x = 0$ . Além disso

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (Y - y) = \frac{d}{dx} \delta y, \quad (6)$$

o que mostra a permutabilidade dos dois símbolos.

Consideremos, agora, uma família de cintas  $C^*(v)$ , dependente de um parâmetro  $v$ :

$$P = P(\tilde{t}, v), \quad A_3 = A_3(\tilde{t}, v). \quad (7)$$

Ao longo de uma cinta  $v = \text{const.}$  a única variável é  $\tilde{t}$ . As derivações em relação a  $\tilde{t}(v)$  serão indicadas por plicas (pontos).

Uma vez que  $dP = w \tilde{A}_1$ , se fizermos

$$\frac{ds}{d\tilde{t}} = h, \quad (8)$$

o quadro geral do § 21, no qual incluimos o vector  $\tilde{P}$  com as componentes

$$p_r = P_v \cdot \tilde{A}_r, \quad (9)$$

e as quantidades  $h_r$  tais que

$$h_r = \frac{\tilde{w}_r}{w} , \quad (10)$$

passará a ser :

base	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_3$	
$\dot{P}$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	(11)
$P'$	$+h$	0	0	(12)
$\tilde{A}_1'/h$	0	$+h_3$	$-h_2$	(13)
$\tilde{A}_2'/h$	$-h_3$	0	$+h_1$	(14)
$\tilde{A}_3'/h$	$+h_2$	$-h_1$	0	(15)

O comprimento do arco suporte da cinta segue da segunda de (23 , 18) i.e ,

$$s = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} h \, d\tilde{t} . \quad (16)$$

A derivação sob o sinal soma, em relação ao parâmetro  $v$ , dá

$$\dot{s} = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}} \dot{h} d\tilde{t} . \quad (16)$$

Admitindo sempre condições de existência e continuidade, teremos para a derivada mista

$$\dot{p}_{tv} = (p^i)^* = (\dot{p})^i. \quad (17)$$

Interessa-nos aqui as componentes tangenciais desse vector, então:

$$(p^i)^* = \dot{h} \tilde{A}_1 + h \tilde{A}'_1 = \dot{h} \tilde{A}_1 + \dots$$

$$(\dot{p})^i = \frac{p^i}{r} \tilde{A}_r + p \frac{\tilde{A}'}{r} = [p_1^i + (h_2 p_3 - h_3 p_2) h] \tilde{A}_1 + \dots, \quad (18)$$

de onde

$$\dot{h} = p_1^i + (h_2 p_3 - h_3 p_2) h, \quad (19)$$

que se escreve ainda

$$\dot{w} = \dot{p}_1 + \tilde{w}_2 p_3 - \tilde{w}_3 p_2, \quad (20)$$

com

$$\dot{w} = \dot{h} \tilde{dt}, \quad \dot{p}_1 = p_1^i \tilde{dt} \quad (21)$$

$$\dot{h} \tilde{dt} = ds = w. \quad (22)$$

A integração da (20), para  $v$  fixo, tendo em vista a (16) dá finalmente

$$\dot{s} = \left[ p_1 \right]_{P_0}^P + \int_{P_0}^P (\tilde{w}_2 p_3 - \tilde{w}_3 p_2) . \quad (23)$$

Esta é a expressão procurada da variação do arco. No caso de ser  $C^*$  (v) uma cinta assintótica, tendo em vista as (23,28) e (23,29), a (23), com notação variacional, se escreve

$$\delta s = \left[ \delta p_1 \right]_{P_0}^P - \int_{P_0}^P k \cdot \delta p_2 \cdot ds \quad (24)$$

Nesta notação as (9) se escrevem :

$$\delta p_1 = \delta P \cdot \tilde{A}_1, \quad \delta p_2 = \delta P \cdot \tilde{A}_2. \quad (25)$$

Consideremos, agora, um arco de curva  $P = P(s)$  e um outro arco "paralelo" à distância  $\epsilon$ . (fig. 8)

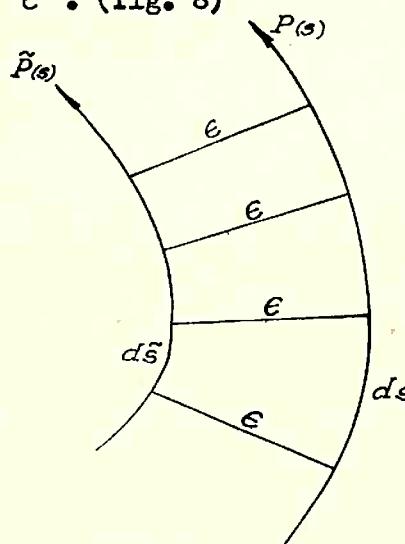


fig. 8

Teremos

$$P = \tilde{P}(s) + \epsilon A_2, \quad (26)$$

onde  $A_2$  é o vector normal à curva.

Nas (25) :

$$\delta p_1 = \delta P \cdot A_1 = 0, \quad \delta p_2 = \delta P \cdot A_2 = \epsilon. \quad (27)$$

A (24) dá

$$k = - \frac{1}{\epsilon} \frac{\delta s}{ds}. \quad (28)$$

Obtivemos aqui uma segunda definição para a curvatura de uma linha, a partir da primeira variação do comprimento do arco.

Vimos que uma generalização adequada da primeira definição (23, 40) da curvatura de uma linha permite obter o conceito (22,4) de curvatura gaussiana e vice-versa.

Vamos agora generalizar a segunda definição de curvatura de uma linha, trocando o elemento de arco pelo elemento de área, para introduzir o novo elemento geométrico.

$$2H = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{\delta \sigma}{\sigma}, \quad (29)$$

onde a superfície vizinha é

$$\tilde{P} = \tilde{P}(u, v) = P(u, v) + \epsilon A_3(u, v). \quad (30)$$

Diferenciando e tendo em vista as (22,1) e (21,14) temos

$$d\tilde{P} = (w^1 + \epsilon w_2) A_1 + (w^2 - \epsilon w_1) A_2 . \quad (31)$$

Os elementos de área, calculados como no § 22, dão

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} = \frac{(w^1 + \epsilon w_2) x (w^2 - \epsilon w_1)}{w^1 x w^2} . \quad (32)$$

Ora

$$- \frac{1}{\epsilon} \frac{\delta \sigma}{\sigma} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\sigma - \tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{\epsilon} \left( 1 - \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} \right) , \quad (33)$$

de onde

$$2H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{1}{w^1 x w^2} (w^1 x w^2)}{\frac{1}{w^1 x w^2}} + \epsilon K \right] \quad (34)$$

Finalmente

$$2H = \frac{w^1 x w^2_1 + w^2 x w^2_2}{w^1 x w^2} \quad (35)$$

Das (22,10) e (22,11) obtemos agora

$$2H = c_1 + c_2 . \quad (36)$$

$H$  é a curvatura média da superfície.

## § 26 CURVATURAS PRINCIPAIS

Vamos considerar agora, as linhas de curvatura, suportes de cintas de curvatura.

Segue da (23,21) que uma condição característica para as linhas de curvatura, além da (23,26), é obtida igualando-se a zero qualquer elemento da primeira coluna do quadro  $dW/ds$  do § 24. Tomemos, p. ex., a primeira das (24, 25)

$$\phi_3 = 0. \quad (1)$$

Sejam

$$d^1P = w^1 A_1 + w^2 A_2, \quad d^2P = w^1 A_1 + w^2 A_2 \quad (2)$$

com

$$\frac{w^1}{w^2} + \frac{w^1}{w^2} = 0, \quad (3)$$

duas direções distintas, soluções da (1). Levadas nela dão um sistema linear e homogêneo nas incógnitas  $c_3$  e  $c_2 - c_1$  e a condição de compatibilidade é expressa anulando-se o determinante

$$\begin{vmatrix} w^1 & w^2 & w^1 & w^2 \\ w^1 & w^2 & w^1 & w^2 \\ w^1 & w^2 & w^1 & w^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

de onde

$$w^1 w^1 + w^2 w^2 = 0, \quad (5)$$

que é, precisamente, a condição de ortogonalidade das duas direções, i. e.

$$d' P + d'' P = 0 . \quad (6)$$

Esta condição é incompatível com a existência de solução imaginária pois que, neste caso, as raízes seriam conjugadas, i.e.,

$$w^{1''} = \bar{w}^1 \quad , \quad w^{2''} = \bar{w}^2 \quad (7)$$

de onde

$$w^{1'1''} + w^{2'2''} = w^1 \bar{w}^1 + w^2 \bar{w}^2 > 0 \quad (8)$$

contrariamente à conclusão (5).

Há um caso em que a equação (1) se verifica identicamente, para todas as direções emitidas do ponto P, a saber, quando

$$\begin{matrix} c_1 & = & c_2 & = & c_3 & = & 0 \end{matrix} . \quad (9)$$

Neste caso as (22,1), (22,10), (22,11), (21,14) dão a (23, 26) com  $k_n = c = \text{const.}$

O ponto P se diz circular (umbílico).

A caracterização das linhas de curvatura pela equação de Rodrigues (23, 26) que, junto com as (22,1) e (21,14), se desdobra nas duas seguintes :

$$w_1 - k_n w^2 = 0 , \quad w_2 + k_n w^1 = 0 , \quad (10)$$

permite concluir que a direção das linhas de curvatura é paralela à tangente correspondente da imagem esférica.

As equações (22,10) e (22,11) levadas nas (10) dão o sistema seguinte:

$$\left. \begin{array}{l} (c_1 - k_n) w^1 + c_3 w^2 = 0 \\ c_3 w^1 + (c_2 - k_n) w^2 = 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

A condição para que este sistema homogêneo tenha solução não trivial em  $w^1 : w^2$  é que os valores de  $k_n$  sejam as duas raízes da equação quadrática

$$\left| \begin{array}{cc} c_1 - k_n & c_3 \\ c_3 & c_2 - k_n \end{array} \right| = 0 \quad (12)$$

ou

$$k_n^2 - (c_1 + c_2) k_n + c_1 c_2 - c_3^2 = 0 \quad (13)$$

As (22,13) e (25,36) permitem escrever

$$k_n^2 - 2H k_n + K = 0 \quad (14)$$

As raízes  $k_n = k_1$  e  $k_n = k_2$  desta equação são chamadas as curvaturas principais da superfície e são relacionadas com as curvaturas gaussiana e média pelas fórmulas

$$\left. \begin{array}{l} k_1 + k_2 = K \\ k_1 \cdot k_2 = 2H \end{array} \right\} \quad (15)$$

Fazemos coincidir as linhas de curvatura com as linhas  $w^1$  ( $w^2 = 0$ ) e  $w^2$  ( $w^1 = 0$ ) de nossa rede ortogonal R. Seguem das relações (10), (22,10), e (22, 11) :

$$w_2 + k_1 w^1 = 0 \quad ; \quad w_1 - k_2 w^2 = 0 \quad (16)$$

$$c_1 = k_1, \quad c_3 = 0, \quad c_2 = -k_2. \quad (17)$$

Concluimos da utilidade de uma rede principal R para o estudo de uma superfície  $\Sigma$ , pois as fórmulas fundamentais (24, 21) - (24, 24) tomarão as formas seguintes, mais simples ;

$$\phi_1 = w^1 + * + w^2 \quad (18)$$

$$\phi_2 = k_1 w^1 + * + k_2 w^2 \quad (19)$$

$$\phi_3 = * (k_2 - k_1) w^1 w^2 * \quad (20)$$

$$\phi_4 = k_1^2 w^1 + * + k_2^2 w^2 \quad (21)$$

Façamos :

$$r = \frac{1}{k}, r_n = \frac{1}{k_n}, r_1 = \frac{1}{k_1}, r_2 = \frac{1}{k_2} \quad (22)$$

As (19) e (20) divididas pela (18), com vistas às (22, 22) e às duas primeiras colunas do quadro  $dw/ds$  do § 24, permitem escrever, respectivamente, a fórmula de Euler, L. (1 707 - 1 783) e a fórmula de Bonnet :

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{\cos \psi}{r} = \frac{1}{r_n} = \frac{\cos^2 \theta}{r_1} + \frac{\sin^2 \theta}{r_2} \quad (23)$$

$$\frac{\phi_3}{\phi_1} = t_g = \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \cos \theta \sin \theta = t + \frac{d \psi}{ds} \quad (24)$$

O teorema de Meusnier, (24, 19), toma a forma

$$r = r_n \cos \psi \quad (25)$$

Para calcular, portanto, o raio de curvatura  $r$  de uma secção oblíqua qualquer, num ponto  $P$  de  $\Sigma$ , com azimute de emissão  $\theta$  e ângulo de inclinação  $\psi$  em relação à secção normal de mesma tangente, calculamos inicialmente os raios de curvatura principais  $r_1$  e  $r_2$ , em seguida a (23) nos dá  $r_n$  e finalmente com a (25) obtemos  $r$ .

No caso de uma assintótica não retilínea a segunda das (24, 25) com a segunda das (24, 12) mostra que  $\psi = \pm 90^\circ$ , i.e.,  $k_n = 0$  e a (23) dá

$$\tan^2 \theta = - \frac{r_2}{r_1} . \quad (26)$$

Ora

$$\cos \theta \sin \theta = \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\pm \sqrt{-r_1 r_2}}{r_1 - r_2} \quad (27)$$

então a (24) dá

$$t = \pm \sqrt{-k} . \quad (28)$$

E' a fórmula de Beltrami, E. (1 835 - 1 900) - Enneper, A. (1 870) para a torção de uma linha assintótica.

A (23), com as (24, 22) e (22, 22) permite escrever

$$\frac{1}{r} = c_1 \cos^2 \theta + 2 c_3 \cos \theta \sin \theta + c_2 \sin^2 \theta . \quad (29)$$

Esta fórmula exprime como depende a curvatura da secção normal, do azimute  $\theta$  da secção.

Para dar uma idéia geométrica desta dependência, representa - se, não 1:  $r_n$  nem  $r_n$ , mas  $\sqrt{|r_n|}$ , como função de  $\theta$ , em coordenadas polares (fig. 9)

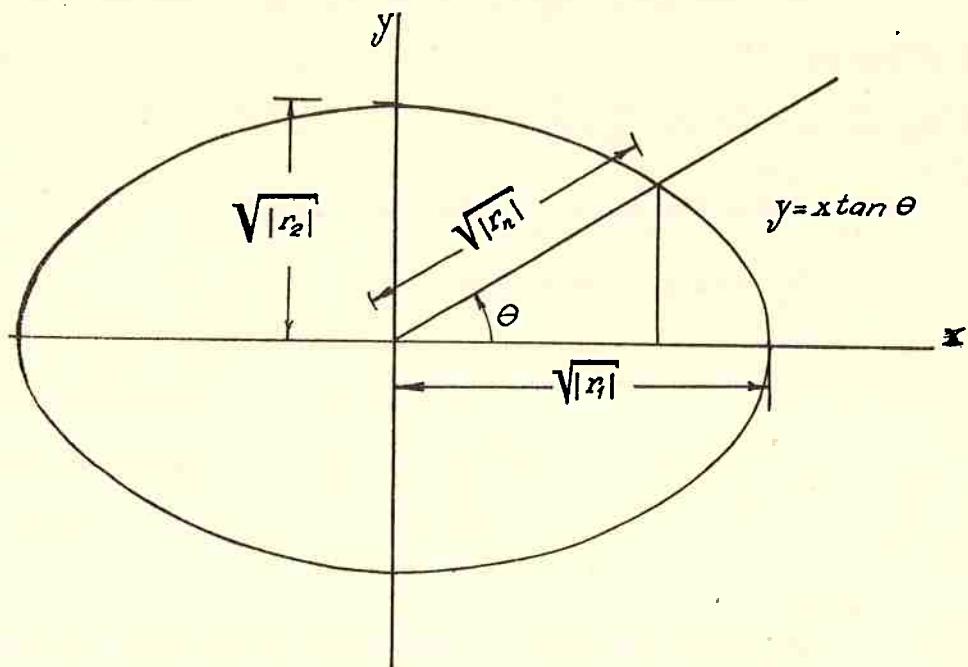


fig. 9

Mediante a substituição

$$\rho = \sqrt{|r_n|} \quad (30)$$

a (29) toma a forma

$$c_1 \rho^2 \cos^2 \theta + 2 c_3 \rho^2 \cos \theta \sin \theta + c_2 \rho^2 \sin^2 \theta = \begin{cases} +1, \\ -1 \end{cases} \quad (31)$$

segundo seja  $\frac{1}{r_n} > 0$  ou  $\frac{1}{r_n} < 0$ .

Passando, finalmente, mediante a substituição

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad (32)$$

as coordenadas cartesianas, resulta a equação

$$c_1 x^2 + 2 c_3 xy + c_2 y^2 = \pm 1. \quad (33)$$

E' a indicatriz de Dupin em  $P$ , i.e., uma cônica referida ao centro ou um par de cônicas, segundo sómente um dos dois sinais do segundo membro nos dê uma cônica real ou os dois.

O discriminante, segundo (22, 13), é  $K$ .

A indicatriz será, para

$$K \left\{ \begin{array}{ll} > 0 & , \text{uma elipse} ; \\ = 0 & , \text{um par de retas paralelas} ; \\ < 0 & , \text{um par de hiperboles.} \end{array} \right.$$

De acordo com isto, classificam-se os pontos de uma superfície em elípticos, parabólicos e hiperbólicos, (de curvatura elíptica, parabólica e hiperbólica). Assim, p. ex., o elipsóide tem todos os seus pontos elípticos (de curvatura elíptica positiva) ; o hiperbolóide de uma folha tem todos os seus pontos hiperbólicos (de curvatura hiperbólica, negativa) ou de "sela de montar" e um cilindro, um cône e, em geral, qualquer superfície desenvolvível, tem todos os seus pontos parabólicos (de curvatura parabólica).

Os raios de curvatura principais,  $r_1$  e  $r_2$ , devem corresponder a valores maximum ou minimum de  $\rho$ , logo de  $r_n$  pois que  $|r_n| = \rho^2$ .

Para determinar os extremantes notemos inicialmente que a equação (33) de acordo com as (32), está obrigada à condição

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (34)$$

Consideremos a função auxiliar

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(c_1 x^2 + 2c_3 xy + c_2 y^2 + 1), \quad (35)$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange.

As derivadas parciais igualadas a zero dão :

$$x + \lambda (c_1 x + c_3 y) = 0 \quad (36)$$

$$y + \lambda (c_3 x + c_2 y) = 0$$

Se multiplicarmos a primeira por  $x$  e a segunda por  $y$  e somarmos obtemos

$$\lambda = \pm \rho^2 \quad (37)$$

As (32) com as (22, 22) se escrevem

$$x = \rho \frac{w^1}{w} \quad , \quad y = \rho \frac{w^2}{w} \quad . \quad (38)$$

As (36), que dão os extremantes, se transformam precisamente no sistema (11), logo suas raízes  $r_1$  e  $r_2$  são valores maximum e minimum de  $r_n$ .

### § 27. TRANSPORTE PARALELO DE LEVI-CIVITA

Com  $v^3 = 0$  na (21,15) e  $V$  ligado a  $P$  teremos sobre  $\Sigma$  um campo vectorial tangente ( $P$  ;  $V$ ) relativo ao ponto  $P$ .

Imaginemos, agora, que o geodeta se transporta para  $P' \neq P$  e considera o campo vectorial ( $P'$  ;  $V$ ) relativo ao ponto  $P'$ .

Este novo campo vectorial é evidentemente paralelo ao anterior na excepção enclidianas, porém, perde, em geral, a condição de ser tangente a  $\Sigma$ .

Devemos, portanto, abandonar a noção enclidianas de paralelismo se quisermos que o vector, após o transporte, pertença ainda a um plano tangente.

Ora, na (21,19) temos a condição característica de um transporte paralelo de um vector que, sob forma explícita se escreve :

dá à segunda forma fundamental da superfície a forma quadrática

$$\phi_2 = L du^2 + 2 M dudv + N dv^2, \quad (6)$$

na qual  $L, M, N$ , funções de  $u$  e  $v$ , são os produtos escalares contidos na tabuada seguinte :

	$P_u$	$P_v$
$A_{3u}$	- $L$	- $M$
$A_{3v}$	- $M$	- $N$

(7)

Para um cálculo mais comodo dessas funções tomamos a (22, 31) e calculamos as derivadas :

$$A_{3u} = \frac{1}{D} (P_{uu} \times P_v + P_u \times P_{uv}) = \frac{Du}{D^2} P_u \times P_v \quad (8)$$

$$A_{3v} = \frac{1}{D} (P_{uv} \times P_v + P_u \times P_{vv}) = \frac{Dv}{D^2} P_u \times P_v,$$

que, levadas na tabuada (7), dão os produtos mistos seguintes :

$$LD = (P_{uu} P_u P_v), MD = (P_{uv} P_u P_v), ND = (P_{vv} P_u P_v). \quad (9)$$

Mediante derivações dos produtos escalares da tabuada (3) podemos construir uma nova e importante tabuada cujas duas primeiras linhas contém os chamados símbolos de primeira espécie de Christoffel, E.B. (1 829 - 1 901) ;

	$P_{uu}$	$P_{uv}$	$P_{vv}$
$P_u$	$\frac{Eu}{2} = (11,1)$	$\frac{Ev}{2} = (12,1)$	$F_v - \frac{Gu}{2} = (22,1)$
$P_v$	$F_u - \frac{Ev}{2} = (11,2)$	$\frac{Gu}{2} = (12,2)$	$\frac{Gv}{2} = (22,2)$

(10)

$A_3$	$L$	$M$	$N$

(11)

Os três vectores em coluna sendo linearmente independentes podemos exprimir qualquer vector  $\mathbf{e}$ , em especial, os três vectores em linha como combinação linear dêles, i.e.:

=	$P_u$	$P_v$	$A_3$	
$P_{uu}$	$C_{11}^1$	$C_{11}^2$	$L$	(12)
$P_{uv}$	$C_{12}^1$	$C_{12}^2$	$M$	
$P_{vv}$	$C_{22}^1$	$C_{22}^2$	$N$	

Estas são as chamadas equações de Gauss.

Cada linha, multiplicada sucessivamente por  $P_u$  e  $P_v$ , com vistas às tabuadas (3) e (10), dá um sistema linear de duas equações com duas incógnitas, que resolvidas em relação aos valores  $C_{st}^r = C_{ts}^r$  denominados símbolos de segunda espécie de Christoffel, dão:

$$2 D^2 C_{11}^1 = G(11,1) - F(11,2) = + G E_u - 2 F F_u + F E_v \quad (13)$$

$$2 D^2 C_{11}^2 = - F(11,1) + E(11,2) = - F E_u + 2 E F_u - E E_v \quad (14)$$

$$2 D^2 C_{12}^1 = G(12,1) - F(12,2) = + G E_v + * - F G_u \quad (15)$$

$$2 D^2 C_{12}^2 = E(12,2) - F(12,1) = + E G_u + * - F E_v \quad (16)$$

$$2 D^2 C_{22}^1 = - F(22,2) + G(22,1) = - F G_v + 2 G F_v - G G_u \quad (17)$$

$$2 D^2 C_{22}^2 = E(22,2) - F(22,1) = E G_v - 2 F F_v + F G_u \quad (18)$$

Resta-nos, apenas, exprimir os cinco  $pf - w$  em termos das seis funções clássicas e dos símbolos de Christoffel para que, mediante as fórmulas do Cálculo Exterior, possamos obter sistematicamente as fórmulas da Geometria Diferencial Clássica. Recomendamos, para isso, dois métodos.

(i) Método simétrico

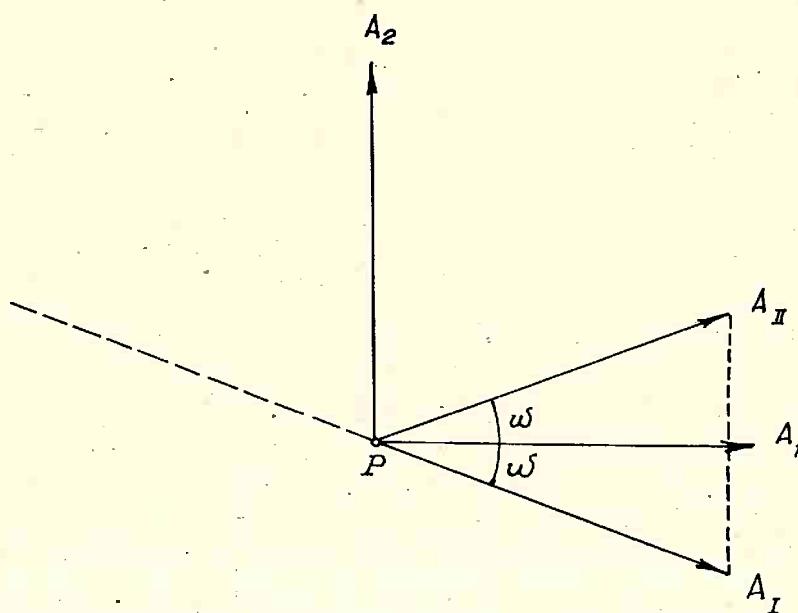


fig. 10

Tomemos a nossa rede ortogonal  $R$  como rêde bissetora ou rêde diagonal da rede obliqua  $R_o$  (fig. 10).

Os vectores unitários da rede obliqua, aos quais juntamos o vector unitário da normal, comum às duas redes, se escrevem:

$$A_I = \frac{P_u}{\sqrt{E}}, \quad A_3 = \frac{P_u \times P_v}{\sin 2w}, \quad A_{II} = \frac{P_v}{\sqrt{G}} \quad (19)$$

O ângulo  $2w$  de rede será dado pelas relações

$$\cos 2w = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \tan 2w = \frac{D}{F}, \quad \sin 2w = \frac{D}{\sqrt{EG}} \quad (20)$$

No caso particular  $2\omega = 90^\circ$  será

$$F = 0. \quad (21)$$

As bases das duas redes serão ligadas entre si pelas relações :

$$A_I = \cos \omega A_1 - \sin \omega A_2, \quad 2A_1 = \sec \omega (A_I + A_{II})$$

(22)

$$A_{II} = \cos \omega A_1 + \sin \omega A_2, \quad 2A_2 = \csc \omega (-A_I + A_{II})$$

Façamos

$$dP = P_u du + P_v dv \equiv w^I A_I + w^{II} A_{II}, \quad (23)$$

cuja identificação com a (22, 1) e tendo em vista as (22), permite obter :

$$w^I = \sqrt{E} du, \quad w^{II} = \sqrt{G} dv \quad (24)$$

$$w^1 = \cos \omega (w^I + w^{II}), \quad w^2 = \sin \omega (-w^I + w^{II}). \quad (25)$$

Com a segunda de (21, 3) temos :

$$w_1 = \frac{dA_2 \cdot A_3}{2} = - \frac{dA_3 \cdot A_2}{3}, \quad -w_2 = \frac{dA_1 \cdot A_3}{3} = - \frac{dA_3 \cdot A_1}{1} \quad (26)$$

$$w_3 = \frac{dA_1 \cdot A_2}{2} = - \frac{dA_2 \cdot A_1}{1}$$

Feitos os cálculos, facilitados pelas simplificações, resultam :

$$+ w_1 = \frac{\cos \omega}{D} \left[ (\sqrt{E} M - \sqrt{G} L) \frac{w^I}{\sqrt{E}} + (\sqrt{E} N - \sqrt{G} M) \frac{w^{II}}{\sqrt{G}} \right] \quad (27)$$

$$- w_2 = \frac{\sin \omega}{D} \left[ (\sqrt{E} M - \sqrt{G} L) \frac{w^I}{\sqrt{E}} + (\sqrt{E} N - \sqrt{G} M) \frac{w^{II}}{\sqrt{G}} \right] \quad (28)$$

$$+ w_3 = \frac{D}{2 \cdot G} \left[ (G C_{11}^1 - E C_{12}^1) \frac{w^I}{\sqrt{E}} + (G C_{12}^2 - E C_{22}^1) \frac{w^{II}}{\sqrt{G}} \right] \quad (29)$$

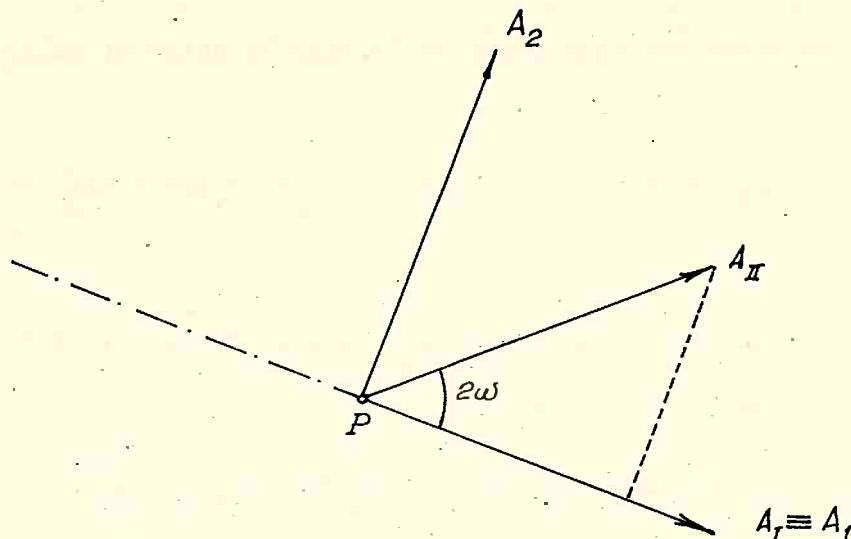
(ii) Método assimétrico

Fig. 11

Tomamos a nossa rede ortogonal  $R$  de forma a haver coincidência de dois vectores da base, p.ex.,  $A_1 = A_{11}$ . (fig. 11).

Com procedimento análogo ao anterior resultam para os cinco pf-w as expressões seguintes :

$$w^1 = \sqrt{E} du + \frac{F}{\sqrt{E}} dv, \quad w^2 = \frac{D}{\sqrt{E}} dv \quad (30)$$

$$w_1 = \frac{1}{D \sqrt{E}} [(EM - FL) du + (EN - FM) dv] \quad (31)$$

$$- w_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} (L du + M dv) \quad (32)$$

$$w_3 = \frac{D}{E} (c_{11}^2 du + c_{12}^2 dv) \quad (33)$$

### § 29. REDE DE TSCHEBYSCHOFF

Vamos considerar, agora, uma rede  $R_t$  para a qual se verificam simultaneamente as duas condições :

$$d(w^I + w^{II}) = 0, \quad d(-w^I + w^{II}) = 0, \quad (1)$$

então

$$dw^I = 0, \quad dw^{II} = 0. \quad (2)$$

Da (12, 6) segue que os pf.  $w^I$  e  $w^{II}$  são diferenciais exatas, logo

$$w^I = dp, \quad w^{II} = dq \quad (3)$$

e o  $ds^2$  (28, 2) tomará a forma

$$ds^2 = dp^2 + 2 \cos 2\omega dp dq + dq^2, \quad (4)$$

observada a primeira vez por Tschebyschoff, P.L. (1821 - 1894).

Observemos que as quatro linhas da rede  $R_t$  :

$$p = 0, \quad p = +\epsilon$$

$$q = 0, \quad q = +\eta,$$

delimitam sobre  $\Sigma$  um quadrilátero curvilinear com os lados opostos iguais,  $\epsilon$  para o primeiro par e  $\eta$  para o segundo. Teremos um paralelogramo curvilinear na acepção finita, um losango ou rombo se tomarmos graduações iguais  $\epsilon = \eta$ . Com uma graduação conveniente podemos, portanto, cobrir uma porção da superfície  $\Sigma$  com uma rede de malhas rombicas infinitésimas.

Imaginemos uma "rede de pescar" constituída de malhas rombicas com fios perfeitamente flexíveis e inextensíveis. É u'a materialização de uma rede  $R_t$  e poderemos, deformá-la, mantendo-se fixos os comprimentos dos lados e os nós de suas malhas, porém variando o ângulo  $2\omega$  da rede.

Em particular, poderemos transformá-la num reticulado plano euclidiano do.

O problema de Tschebyschoff consiste na redução do  $ds^2$  da superfície à forma (4), i.é., na adaptação à superfície de um tecido  $R_t$  ou ainda, no dizer do próprio Tschebyschoff, "vestir" a superfície: "Sur la coupe de vêtements, Oeuvres II, p. 708".

Torna-se claro o campo de pesquisas que as rãdes  $R_t$  podem oferecer à Cartografia, aliás em /5/, p. 207, encontramos em rodapé, logo a seguir à citação da rede de Tschebyschoff: "A Voss: Über ein neus Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen."

### 3. GEODESICAS

#### § 31. EQUAÇÃO GERAL

Vamos procurar uma linha que realiza um minimum da distância entre dois pontos  $P_0$  e  $P$  de uma superfície  $\Sigma$ . A (25, 23), escrita para uma linhha com os extremos  $P_0$ ,  $P$  fixos, portanto, com  $p_3 = 0$  e  $\tilde{w}_3 = x$  segundo (24, 10) e (24, 13), é

$$\delta_s = - \int x p_2 . \quad (1)$$

A condição de estacionariedade  $\delta_s = 0$  dá, para a linha procura-  
da, a equação

$$x = 0 = \tilde{w}_3 . \quad (2)$$

Segundo (23, 41) ela é o suporte de uma cinta geodésica. Segue que uma condição característica de uma linha geodésica é obtida igualando-se a ze-  
ro a terceira coluna do quadro  $dW / ds$  do § 24, i.é. :

$$g = \frac{d\theta}{ds} + \frac{w_3}{w} = k \sin \psi = 0 \quad (3)$$

(i)  $k = 0$ , a reta é uma geodésica;

(ii)  $\sin \psi = 0$ , i.e.,  $A_2^* = A_3$  (fig. 2 - § 23), ou ainda, o plano osculador da geodésica é um plano normal da superfície.

A condição (23, 41) se escreve ainda

$$(A_3, dP, d^2P) = 0, \quad (4)$$

ou, segundo (21, 31), (21, 30) e (21, 4),

$$(P_u \times P_v, P_u du + P_v dv, d^2P) = 0. \quad (5)$$

Com o produto e o duplo produto vectorial, tendo em vista a tabuada (28, 3) obtemos

$$(P_u \times P_v) \times (P_u du + P_v dv) = -(Fdu + Gdv) P_u + (Edu + Fdv) P_v. \quad (6)$$

A diferenciação da (21, 4) dá

$$d^2P = P_{uu} du^2 + 2P_{uv} dudv + P_{vv} dv^2 + P_u d^2u + P_v d^2v. \quad (7)$$

A multiplicação escalar das (6) e (7), com vistas à tabuada (28, 10) e a (4), dá:

$$0 = \begin{vmatrix} E du + F dv & E d^2u + F d^2v + \frac{E_u}{2} du^2 + E_v dudv + \frac{2F_v - G_u}{2} dv^2 \\ F du + G dv & F d^2u + G d^2v + \frac{G_v}{2} dv^2 + G_u dudv + \frac{2F_u - E_v}{2} d^2u \end{vmatrix} \quad (8)$$

Para colocar a equação diferencial geral das geodésicas sob forma de equação diferencial ordinária basta considerar que as geodésicas serão definidas por uma relação tal como  $v = v(u)$ , com  $u$  tendo o papel de variável independente. Então  $du = 0$  e a (8) se escreve

$$\begin{vmatrix} E + Fv' & Fv'' + \frac{1}{2} E_u + E_v v'^2 + \left( F_v - \frac{1}{2} G_u \right) v'^2 \\ F + Gv' & Gv'' + \frac{1}{2} G_v v'^2 + G_u v' + \left( F_u - \frac{1}{2} E_v \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Com o desenvolvimento o termo em  $v^1 w^1$  desaparece e resulta uma equação do tipo

$$v'' = A + Bv^1 + Cv^1{}^2 + Dv^1{}^3, \quad (10)$$

na qual A, B, C, D são funções dadas de u e v.

O teorema de existência das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem aplicado à (10) que, em geral, não se relaciona a tipo algum elemento integrável, permite concluir: Em cada azimute  $\theta$  emitido de um ponto P, dado sobre  $\Sigma$ , passa uma geodésica, que fica univocamente determinada por duas condições analíticas.

Da (3) segue

$$d\theta + w_3 = 0, \quad (11)$$

onde  $\theta$  é contado a partir da linha  $v = \text{const.}$  suposta coincidente com a linha N. (norte). Da (29, 33) segue

$$d\theta + \frac{D}{E} (c_{11}^2 du + c_{12}^2) dv = 0 \quad (12)$$

Equação de Gauss para as geodésicas e que caracteriza o modo como, movendo-se ao longo de uma geodésica, varia o seu azimute  $\theta$  em correspondência aos acréscimos du, dv das variáveis. No caso particular da rede ortogonal (28, 21) a (12) toma a forma simples

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{E}} ( \sqrt{E} )_v du - \frac{1}{\sqrt{E}} ( \sqrt{G} )_u dv. \quad (13)$$

Procuremos, agora, a condição para que as linhas  $w^1$  ( $w^2 = 0$ ) ou linhas u ( $v = \text{const.}$ ) sejam geodésicas. A (22, 13), ou a (24, 20), mostra que as linhas para as quais  $\theta = 0$ ,  $w^2 = 0$ , são geodésicas se  $g_1 = 0$ , ou, segundo a primeira de (22, 14), se  $dw^1 = 0$ , mas então segue da (12, 6): As linhas  $w^2 = 0$  da rede R formam um campo de geodésicas se  $w^1$  é uma

diferencial exata. Então

$$w^1 = dm \quad \text{e} \quad m = \int w^1. \quad (14)$$

E' a chamada integral de independência de Beltrami - Hilbert, D. (1862 - 1943) do campo de geodésicas.

As linhas  $w^2$  ( $w^1 = 0$ ) ou linhas  $v$  ( $u = \text{const.}$ ) são as trajetórias ortogonais do campo de geodésicas  $w^2 = 0$ . Ao longo das linhas  $\lambda(u, v) = \text{const.}$ , dirigidas segundo as linhas do campo devemos ter

$$d\lambda \times w^2 = 0, \quad dm = x \quad d\lambda \neq 0, \quad (15)$$

de onde

$$w^2 = r d\lambda. \quad (16)$$

O  $ds^2$ , (22, 2), toma, agora, a forma geodésica de Gauss

$$ds^2 = dm^2 + G d\lambda^2 \quad (17)$$

(com  $G = r^2$ ).

Temos aqui  $E = 1$ ,  $F = 0$  e a equação diferencial das geodésicas será

$$\left| \begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial m} \lambda'^2 \\ G\lambda' \quad G\lambda'' + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \lambda} \lambda'^2 + \frac{\partial G}{\partial m} \lambda' \end{array} \right| = 0. \quad (18)$$

Notamos a solução particular  $\lambda' = 0$ , i.e.,  $\lambda = \text{const.}$

Podemos supor que o campo de geodésicas é formado de geodésicas emitidas de um ponto  $P_0$  obtido para  $m = 0$ , logo

$$r(0, \lambda) = 0. \quad (19)$$

Por outro lado, mudando o parâmetro  $\lambda$ , podemos supor também

$$r_m(0, \lambda) = 1. \quad (20)$$

Com efeito, mudando  $\lambda$  por  $v(\lambda)$ ,  $r^2 d\lambda^2$  se torna  $r^2 [m, v(\lambda)] v'(\lambda)^2 d\lambda^2$  e tomamos

$$v' r_m(0, v) = 1. \quad (21)$$

Com (19) e (20) a (17) fica expressa em coordenadas geodésicas polares.

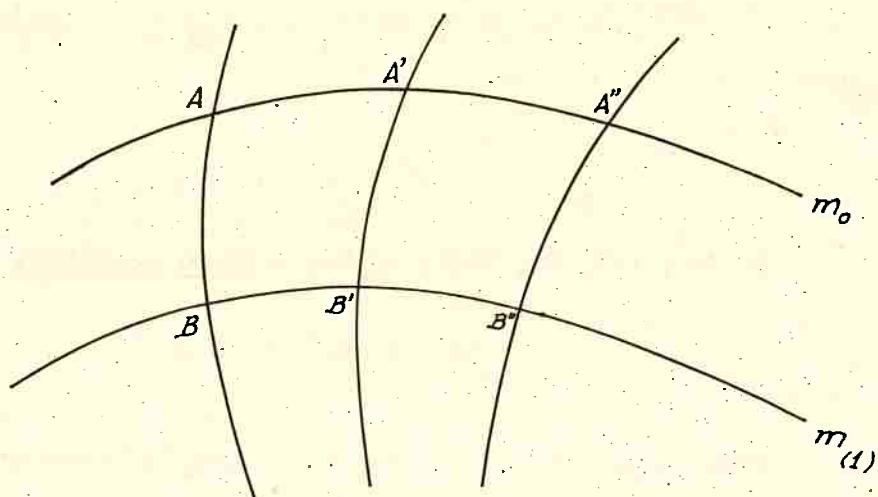


fig. 12

Ao longo das geodésicas temos  $d\lambda = 0$ , de onde  $ds = dm$  e  $s = m - m_0$ .

Segue daqui que podemos traçar duas trajetórias  $m_0 = \text{const.}$  e  $m_{(1)} = \text{const.}$  tais que  $A B = A' B' = A'' B'' \dots$  (fig. 12).

Em particular, se a partir de um ponto  $P_0$  da superfície levarmos sóbre todas as geodésicas emitidas de  $P_0$ , arcos iguais, o lugar das extremidades é uma trajetória ortogonal das geodésicas denominada círculo geodésico de centro  $P_0$ . A extensão às cônicas geodésicas é imediata.

Para o comprimento  $s$  de um arco de linha  $m = m(\tilde{t})$ ,  $\lambda = \lambda(\tilde{t})$  ligando os pontos  $P_0, P_1$ , com :

$$m_0 = m(\tilde{t}_0) < m_1 = m(\tilde{t}_1), \lambda(\tilde{t}_0) = \lambda(\tilde{t}_1) = \lambda_0,$$

encontramos

$$s = \int_{P_0}^{P_1} \left| \sqrt{dm^2 + r^2 d\lambda^2} \right| \geq \int_{P_0}^{P_1} |dm| \geq \int_{m_0}^{m_1} dm = m_1 - m_0, \quad (22)$$

visto ser  $r^2 > 0$ . A igualdade teria lugar apenas para  $d\lambda = 0$  i.e., ao longo da própria geodésica: A linha geodésica é, portanto, o caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície.

### § 32. TEOREMA INTEGRAL DE GAUSS - BONNET

A (27, 7) com a (23, 7) nos dá

$$u_3 = \int \chi - \int (d\theta + w_3). \quad (1)$$

A fórmula fundamental (14, 1) aplicada ao pf.  $w_3$ , tendo em vista a terceira das (21, 35), permite escrever

$$\int_{\Sigma} w_1 \times w_2 + \int_C w_3 = 0. \quad (2)$$

Consideremos primeiro como curva  $C$ , fronteira de  $\Sigma$ , uma curva com tangente contínua. Podemos contrair  $C$  com continuidade sem que varie  $\int_C d\theta$  uma vez que seu valor é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Se  $\Sigma$  é uma região simplesmente conexa, i.e., tal que por contração contínua de  $C$  possa reduzir -se a um ponto, se reduzirmos o suficiente será

$$\int d\theta = 2\pi \quad (3)$$

Com isto a (2) se escreve

$$\int_{\Sigma} w_1 \times w_2 + \int_C x = 2\pi, \quad (4)$$

que exprime o teorema integral de Gauss-Bonnet.

Com (22, 9) e a terceira de (24, 13) a (4) se escreve

$$\int_{\Sigma} K \sigma + \int_{\partial\Sigma} g \nu = 2\pi. \quad (5)$$

Quando  $C$  é constituída de  $n$  arcos regulares formando ângulo exteriores  $\tilde{\alpha}_r$  nos vértices onde concorrem os arcos, então a variação total de  $\theta$  ao longo de  $C$  continua sendo  $2\pi$ , mas sómente uma parte é devida a variação de  $\theta$  sobre os arcos devendo-se a outra parte aos ângulos. Neste caso teremos no segundo membro da (5) a expressão

$$2\pi - \sum_r \tilde{\alpha}_r \quad (6)$$

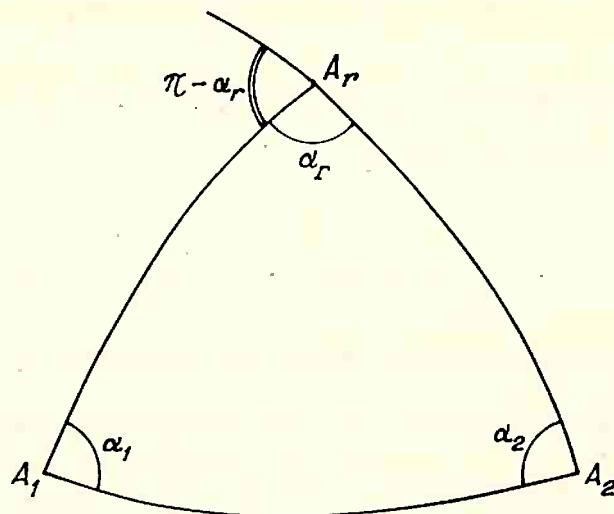


fig. 13

A (5), quando consideramos ângulos interiores  $\alpha_r$  se escreve, para um polígono geodésico.

$$\int_{\Sigma} K \sigma = \sum_r^n \alpha_r - (n - 2)\pi. \quad (7)$$

Para um triângulo geodésico,  $n = 3$ , então

$$\int_{\Sigma} K \sigma = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi = \epsilon \quad (8)$$

onde  $\epsilon$  é, por definição, o excesso esférico do triângulo. Teremos:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 180^\circ \text{ se for } K \geq 0 \quad (9)$$

No caso de uma esfera ( $K = \text{const. positiva}$ ) o triângulo geodésico toma o nome de triângulo esférico, e neste caso o primeiro membro da (8) se reduz a  $K \Sigma = \Sigma : R^2$ , onde  $\Sigma$  é a área do triângulo e  $R$  o raio da esfera. Resulta a fórmula de uso corrente na Geodésia.

$$\epsilon = \frac{\Sigma}{R^2} \cdot \quad (10)$$

### § 33. PARAMETROS DIFERENCIAIS

Consideremos a função escalar (11, 8), com  $h$  em lugar de  $f$ , definida sobre  $\Sigma$  e a sua diferencial total sob a forma (13, 2), i.e.

$$dh = h_1 w^1 + h_2 w^2. \quad (1)$$

Com as derivadas  $h_1$ ,  $h_2$  vamos construir um campo vectorial tangente

$$H = h_1 A_1 + h_2 A_2 \quad (2)$$

Com o giro (23, 2) podemos verificar a invariância desse vector.

A multiplicação escalar do vector (2) pelo vector (22, 1) dá precisamente a (1), i.e'.

$$H \cdot dP = dh \quad (3)$$

Se

$$A_1^* = \frac{dP}{|dP|} \quad (4)$$

é o vector unitário ligado a P, tangente a  $\Sigma$  então

$$H \cdot A_1^* = \frac{dh}{ds}, \quad (5)$$

i.e., a componente do vector H segundo uma direção superficial genérica dP é igual à derivada de h, no ponto P orientada segundo  $A_1^*$ . Daqui resulta a significação simples para as derivadas  $h_1$  e  $h_2$ .

A analogia com os campos escalares ordinários e, em particular, a (3) permite definir H como um vector gradiente superficial, ou gradiente de h sobre  $\Sigma$ . Escreveremos

$$H = \underline{\text{grad}} h. \quad (6)$$

Consideremos uma segunda função escalar  $h'$  (P), definida sobre  $\Sigma$ .

Teremos :

$$dh' = h'_1 w_1 + h'_2 w_2, \quad H' = h'_1 A_1 + h'_2 A_2. \quad (7)$$

Vamos construir os invariantes :

$$\nabla(h, h') = h_1 h'_1 + h_2 h'_2 = H \cdot H' \quad (8)$$

$$\theta(h, h') = h_1 h'_2 - h_2 h'_1. \quad (9)$$

Em particular, para  $h = h'$  obtemos a norma do gradiente

$$\nabla(h, h) = \nabla(h) = h_1^2 + h_2^2 = H \cdot H \quad (10)$$

Os invariantes escalares  $\nabla(h)$ ,  $\nabla(h, h')$ ,  $\theta(h, h')$  foram denominados por Beltrami parâmetros diferenciais de primeira ordem, já usados, para o plano e para o espaço, por Lamé, G. (1795 - 1870), em 1859.

Dadas duas famílias de linhas sobre  $\Sigma$

$$h(u, v) = c, \quad h'(u, v) = c' \quad (11)$$

então  $dh = 0$ ,  $dh' = 0$  e a (3) mostra que os gradientes  $H$  e  $H'$  são normais às tangentes das linhas dadas. Se  $\alpha$  é o ângulo dessas tangentes podemos concluir da (8) que

$$\cos \alpha = \frac{\nabla(h, h')}{\sqrt{\nabla(h)} \sqrt{\nabla(h')}} \quad (12)$$

Logo, a condição para que as duas famílias formem rede ortogonal

é

$$\nabla(h, h') = 0 \quad (13)$$

Para o  $ds^2$  geodésico (31, 17), segundo a primeira de (31, 14) e a (31, 16) :

$$dm = 1 w^1 + 0 w^2, \quad d\lambda = 0 w^1 + \frac{1}{r} w^2, \quad (14)$$

de onde as derivadas em relação ao par de pf.  $w^1, w^2$  :

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{r} \quad (15)$$

Logo

$$\nabla(m) = 1, \quad \nabla(m, \lambda) = 0, \quad \nabla(h) = -\frac{1}{r} \hat{z}, \quad \theta(m, \lambda) = \frac{1}{r} \quad (16)$$

Consideremos, agora, sobre a superfície, uma área  $\Sigma$  limitada por um contorno  $C$ .

Suponhamos como sempre que :

$\hat{A}_1^*$  : é o vector unitário tangente à curva  $C$ .

$\hat{A}_2$  : é um vector unitário normal a  $\hat{A}_1^*$ , chamado às vezes de normal geodésica.

$H$  : o campo vectorial tangente.

Suponhamos mais que a normal geodésica é dirigida para o exterior da área  $\Sigma$ .

Por fluxo do vector  $H$  através o contorno  $C$  é preciso entender aqui a integral

$$\int_C H \cdot \hat{A}_2 ds. \quad (17)$$

Suponhamos um fluido derramado sobre a superfície e consideremos a porção de fluido no interior da área  $\Sigma$  no instante  $t$ . No instante  $t+dt$ , o acréscimo  $d\Sigma$  da área recoberta por esta porção de fluido pode se exprimir, indiferentemente, ou pela integral curvilinear (17), multiplicada por  $dt$ , e pela integral dupla

$$- dt \int_{\Sigma} \operatorname{div} \cdot H \, d\Sigma . \quad (18)$$

Recordamos, assim, a relação existente entre o fluxo e a divergência sobre a superfície, i.e.:

$$- \int_C H \cdot \tilde{A}_2 \, ds = + \int_{\Sigma} \operatorname{div} \cdot H \, d\Sigma , \quad (19)$$

cuja forma é a mesma que a da relação análoga para os campos do espaço ordinário e conhecida como fórmula da divergência.

Ora, as linhas das (23, 2) com as (22, 22) se escrevem:

$$A_1^* = \frac{1}{w} A_1 - \frac{w^2}{w} A_2 , \quad \tilde{A}_2 = - \frac{w^2}{w} A_1 + \frac{1}{w} A_2 \quad (20)$$

A componente do vetor campo  $H$ , (vector velocidade da corrente) na direção da normal geodésica é

$$\tilde{h} = H \cdot \tilde{A}_2 = - h_1 \frac{w^2}{w} + h_2 \frac{1}{w} , \quad (21)$$

i.e.

$$- \tilde{h} w = h_1 w^2 - h_2 w^1 \quad (22)$$

A aplicação da fórmula fundamental (14,1) dá

$$- \int_C \tilde{h} w = \int_{\Sigma} d(h_1 w^2 - h_2 w^1) , \quad (23)$$

que, comparada com a (19), permite dar à divergência do campo vectorial  $H$  a forma seguinte

$$\Delta(h) = \operatorname{div} \cdot H = \frac{d(h_1 w^2 - h_2 w^1)}{w^1 x w^2} \quad (24)$$

pois que  $w^1 \times w^2 = \sigma = d \sum$ .

Com a (6) a (24) se escreve ainda

$$\Delta(h) = \text{div. grad. } h . \quad (25)$$

Esta função, introduzida por Beltrami em 1864 e denominada parâmetro diferencial de segunda ordem, generaliza para as superfícies a noção de laplaciano para o plano.

Como aplicação vamos calcular este parâmetro para a superfície  $\Sigma$ , dada por seu  $ds^2$  sob a forma (28, 2). Para isso podemos tomar como par de pf. aquele das (28, 30) e calcular as derivadas  $h_1, h_2, h_{11}$  e  $h_{22}$  mediante as (13, 4).

Finalmente, aplicamos a (24) que se escreve ainda

$$\Delta(h) = h_{11} + h_{22} + h_1 \frac{dw^2}{w^1 \times w^2} - h \frac{dw^1}{w^1 \times w^2} . \quad (26)$$

O resultado é

$$\Delta(h) = \frac{1}{D} \left[ \left( \frac{E h_v - F h_u}{D} \right)_v + \left( \frac{G h_u - F h_v}{D} \right)_u \right] \quad (27)$$

No caso de um plano euclidiano

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (28)$$

$E = G = 1, F = 0$  e a (27) se reduz a

$$\Delta(h) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} , \quad (29)$$

que é o laplaciano.

Cumpre notar, contudo, que podemos escolher em um plano coordenadas curvilíneas absolutamente quaisquer e a fórmula (27) resolve assim o problema seguinte: exprimir o laplaciano a duas dimensões quando se refere o plano a um sistema arbitrário de coordenadas curvilíneas.

#### §34. PARÂMETROS ISOTERMOS

Se o  $ds^2$  de uma superfície  $\Sigma$  se apresentar sob a forma

$$ds^2 = \frac{1}{q^2} (du^2 + dv^2) , \quad (1)$$

então a família de linhas coordenadas  $v = \text{const.}$  (ou  $u = \text{const.}$ ) constitue o que se chama uma família ou rêde isotermas.

Os elementos lineares das linhas desta rôde serão:

$$w^1 = \frac{1}{q} du + 0 dv , \quad w^2 = 0 du + \frac{1}{q} dv . \quad (2)$$

Podemos supor  $du = dv = \epsilon > 0$ , com  $\epsilon$  infinitésimo, então o duplo sistema de linhas  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$ , correspondentes a valores dos parâmetros crescentes em progressão aritmética de razão  $\epsilon = \text{const.}$ :

$$\left. \begin{array}{l} u = 0 , \quad u = \pm \epsilon , \quad u = \pm 2\epsilon \dots \\ v = 0 , \quad v = \pm \epsilon , \quad v = \pm 2\epsilon \dots \end{array} \right\} \quad (3)$$

cobre  $\Sigma$  com uma rôde ou quadriculado de malhas infinitésimas. Numa vizinhança de  $P$  o número de malhas cresce com o crescer de  $q$ , denominado, por isso, densidade da rôde isotermas.

Introduzindo derivadas  $u_r$ ,  $v_r$  ( $r = 1,2$ ) em relação ao par de pf.  $w^1$ ,  $w^2$ , teremos da (2) :

$$\begin{aligned} du &= u_1 w^1 + u_2 w^2 &= q w^1 + 0 w^2 \\ dv &= v_1 w^1 + v_2 w^2 &= 0 w^1 + q w^2 , \end{aligned} \quad (4)$$

de onde

$$u_1 = v_2 = q , \quad u_2 = v_1 = 0 \quad (5)$$

ou ainda

$u_1 = v_2 = 0$	$u_2 + v_1 = 0$
-----------------	-----------------

(6)

A reciproca é imediata, da (6) construimos a (1).

O importante sistema (6) generaliza às superfícies o sistema de Cauchy - Riemann, G.F.B. (1826 - 1866) para o plano.

O sistema (6) é invariante numa transformação admissível de coordenadas.

De fato, com o usual giro (23, 2), os elementos das (6) se transformam segundo as fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_1 - \tilde{v}_2 &= + (u_1 - v_2) \cos \theta + (u_2 + v_1) \sin \theta \\ \tilde{u}_2 + \tilde{v}_1 &= - (u_1 - v_2) \sin \theta + (u_2 - v_1) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

que contém a invariância do sistema (6).

As (13, 4) permitem escrever:

$$u_1 = q \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_2 = q \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_1 = q \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_2 = q \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8)$$

com as quais o sistema (6) toma a sua forma mais usual:

$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$
---	---

(9)

Do sistema (6) segue ainda:

$$u_1 w^2 - u_2 w^1 = v_1 w^1 + v_2 w^2 = dv. \quad (10)$$

Diferenciando exteriormente segue da (12, 5)

$$d(u_1 w^2 - u_2 w^1) = d(dv) = 0, \quad (11)$$

e segue de (12, 6) que  $dv$  é uma diferencial exata. Com isto segue para a equação (33, 24)

$\Delta(u) = 0$
-----------------

(12)

Reciprocamente, se  $u$  é solução desta equação diferencial de Laplace, P.S. (1 749 - 1 827), generalizada às superfícies, segue a (11), que mostra ser  $dv$  uma diferencial exata, logo, a menos de uma constante aditiva, será

$$v = \int (u_1 w^2 - u_2 w^1)$$

e  $u, v$  verificam o sistema (6), sendo, portanto, parâmetros isotermos.

Segue ainda do sistema (6)

$$\text{grad } v = v_1 A_1 + v_2 A_2 = - u_2 A_1 + u_1 A_2 , \quad (14)$$

de onde uma significação geométrica notável: O gradiente de  $v$  se deduz do gradiente de  $u$ , em um ponto  $P$  por um giro de um reto em torno desse ponto.

Recordemos que a existência e continuidade das quatro derivadas parciais da (9), relacionadas entre si pelo próprio sistema, (9), assegura ser

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (15)$$

uma função analítica, i.e., definida numa região do plano  $x + iy$  de Gauss e diferenciável em todos os seus pontos e que a derivada não depende da direção escolhida. Em (15), portanto, nem a parte real nem a imaginária podem ser tomadas arbitrariamente, mas sim que cada uma delas deve satisfazer, separadamente, a equação de Laplace (14) e, juntas, às de Cauchy-Riemann (9).

Vamos generalizar esta noção às superfícies dizendo que a função complexa (15) é uma função analítica se, designando por  $w$  o elemento de arco da direção  $w^1 : w^2$ , i.e.,  $du : dv$  e por  $\theta$  o azimute desta direção, a razão:

$$\frac{du + i dv}{we^{i\theta}} = \frac{(u_1 + i v_1)w^1 + (u_2 + i v_2)w^2}{w^1 + i w^2} \quad (16)$$

tem um valor  $\alpha + i\beta$  independente de  $\theta$ .

Da (16) segue

$$(u_1 + i v_1) w^1 + (u_2 + i v_2) w^2 = (\alpha + i \beta) (w^1 + i w^2) \quad (17)$$

e daqui, com a separação do real do imaginário, segue precisamente o sistema (6) e, portanto, o sistema (9).

O sistema (6) com as (13, 4) e o par de pf. (28, 30) nos dá as

equações :

$$v_x = \frac{1}{D} (F_{u_x} - E_{u_y}) \quad v_y = -\frac{1}{D} (G_{u_x} - F_{u_y}) \quad (18)$$

A invariância do sistema (9) permite que mudemos  $v$  em  $-v$  e o sistema exprime que :  $u + iv$  é função da variável complexa e concluimos: Conhecido sobre a superfície um sistema isotermo  $(u, v)$  obteremos todos os outros  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  fazendo

$$\tilde{u} + i \tilde{v} = f(u + iv), \quad (19)$$

sendo  $f$  o símbolo de função arbitrária de variável complexa.

Toda função complexa  $u + iv$ , formada com duas soluções conjugadas da equação (12), chama-se, segundo Beltrami, variável complexa sobre a superfície.

Se numa rede isotermica  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ , que dá o

$$ds^2 = \frac{1}{q^2} (d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2), \quad (20)$$

sem mudar as linhas coordenadas  $\tilde{u}, \tilde{v}$ , mudamos os parâmetros que as determinam fazendo

$$\tilde{u} = \tilde{u}(u), \quad \tilde{v} = \tilde{v}(v), \quad (21)$$

o  $ds^2$  toma a forma

$$ds^2 = \frac{1}{q^2} [\tilde{u}'^2 du^2 + \tilde{v}'^2 dv^2], \quad (22)$$

na qual, sendo

$$E = \frac{1}{q^2} \tilde{u}'^2, \quad G = -\frac{1}{q^2} \tilde{v}'^2 \quad (23)$$

resulta

$$\frac{E}{G} = \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{v}^2} = \frac{U^2}{V^2} \quad (24)$$

i.e., um quociente (ou produto) de uma função de  $u$  apenas por uma função de  $v$  apenas.

Inversamente, se uma rede ortogonal  $(u, v)$ , com

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 \quad (25)$$

é tal que

$$\frac{E}{G} = \frac{U^2}{V^2} , \quad (26)$$

fazendo

$$\frac{E}{U^2} = \frac{G}{V^2} = \frac{1}{q^2} , \quad (27)$$

podemos escrever

$$ds^2 = \frac{1}{q^2} (U^2 du^2 + V^2 dv^2) , \quad (28)$$

e basta mudar os parâmetros  $u, v$ , respectivamente, em

$$\tilde{u} = \int U du + c_1 , \quad \tilde{v} = \int V dv + c_2 , \quad (29)$$

para termos a rede isotermica com o  $ds^2$  (20).

Por esta razão, uma rede ortogonal  $(u, v)$  na qual seja satisfeita a condição (26), ou o que é o mesmo, a equivalente equação diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \ln\left(\frac{E}{G}\right) = 0 \quad (30)$$

diz-se ainda isotermica.

Finalmente, procuremos a condição para que as linhas

$$\psi(u, v) = \text{const}, \quad (31)$$

junto com as trajetórias ortogonais, formem uma rede isotermica. Para isto, é condição característica que, mudando o parâmetro  $\psi$  em uma sua conveniente função  $F(\psi)$ , resulte

$$\Delta |F(\psi)| = 0. \quad (32)$$

Ora, da (33, 27) segue

$$\Delta [F(\psi)] = F''(\psi) \nabla(\psi) + F'(\psi) \Delta(\psi) \quad (33)$$

Logo

$$\frac{\Delta(\psi)}{\nabla(\psi)} = \frac{F''(\psi)}{F'(\psi)} \quad (34)$$

uma função de  $\psi$  apenas.

Reciprocamente, se o primeiro membro é função de  $\psi$  apenas, tomando-se

$$- \int \frac{\Delta(\psi)}{\Delta(\psi)} d\psi \\ F'(\psi) = e, \quad (35)$$

a condição (34) é satisfeita e a rede é isotermica.

Vamos deduzir as expressões de algumas propriedades geodésicas da superfície  $\Sigma$  com  $ds^2$  isotermos. Diferenciando exteriormente as (2) obtemos :

$$dw^1 = \frac{1}{2} q_v (du \times dv), \quad dw^2 = - \frac{1}{2} q_u (du \times dv) \quad (36)$$

ou, com as (2)

$$dw^1 = q_v (w^1 \times w^2), \quad dw^2 = - q (w^1 \times w^2) \quad (37)$$

Tomemos os elementos lineares das linhas da rede na forma clássica:

$$\partial s_u = -\frac{1}{q} \partial u, \quad \partial s_v = -\frac{1}{q} \partial v \quad (38)$$

As (22, 14) com as (37) e a aplicação das (13, 3) darão, sob várias formas, idênticas entre si, as curvaturas geodésicas das linhas da rede isotermica, a saber:

$$g_1 = q_v = -\frac{\partial q}{\partial v} = (\ln q)_2 = -\frac{\partial \ln q}{\partial s_v} \quad (39)$$

$$g_2 = -q_u = -\frac{\partial q}{\partial u} = -(\ln q)_1 = -\frac{\partial \ln q}{\partial s_u} -$$

A (22, 12) pode, agora, tomar a forma

$$w_3 = \frac{1}{w} [(\ln q)_1 w^2 - (\ln q)_2 w^1] \quad (40)$$

Da última de (22, 9) segue

$$K = \frac{d [(\ln q)_1 w^2 - (\ln q)_2 w^1]}{w^1 x w^2}, \quad (41)$$

e da (33, 24)

$$K = \Delta (\ln q) \quad (42)$$

A derivação das (39) com as (13, 4) dá:

$$g_{1,2} = (\ln q)_{2,2} = q \frac{\partial^2 q}{\partial v^2}, \quad g_{2,1} = -(\ln q)_{1,1} = -q \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} \quad (43)$$

Segue da (22, 18) que

$$K = q \left[ \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial v^2} \right] - \left[ \left( \frac{\partial q}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial q}{\partial v} \right)^2 \right]. \quad (44)$$

Esta importante, expressão da curvatura gaussiana também segue da (42) com a (34, 27). Ela pode ainda receber a forma

$$K = q^2 \left( \frac{\partial^2 \ln q}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln q}{\partial v^2} \right)$$

ou

$$K = q^2 \Delta \ln q \quad (46)$$

Em (42),  $\Delta(\ln q)$  é o beltramiano de  $\ln q$  e em (46)  $\Delta \ln q$ , (sem o parentesis), é o laplaciano. No caso de um plano  $q = 1$  e os dois operadores se identificam.

### § 35. GEODÉSICAS DE REVOLUÇÃO

Consideremos a superfície de revolução

$$P = P(r, \lambda) = \begin{cases} x = r \cos \lambda \\ y = r \sin \lambda \\ z = -z(r) \end{cases} \quad (1)$$

Os meridianos são as linhas  $\lambda = \text{const.}$  e os paralelos as linhas  $r = \text{const.}$

Para o vector (21, 4) teremos

$$dP = (\cos \lambda, \sin \lambda, -z') dr + (-\sin \lambda, \cos \lambda, 0) r d\lambda \quad (2)$$

$$P_r \cdot P_\lambda = 0 \quad (3)$$

Os meridianos e paralelos formam uma rede ortogonal R. Se tomarmos para triedro móvel  $A_1, A_2, A_3 = A_1 \times A_2$ , respectivamente, os vectores unitários da tangente ao meridiano, da tangente ao paralelo e da normal no ponto P, obtemos :

$$A_1 = \left( 1 + z'^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (\cos \lambda, \sin \lambda, -z') \quad (4)$$

$$A_2 = * (-\sin \lambda, \cos \lambda, 0) \quad (5)$$

$$A_3 = \left( 1 + z'^2 \right)^{\frac{1}{2}} (z' \cos \lambda, z' \sin \lambda, 1) \quad (6)$$

A diferenciação de  $A_3$  nos dará

$$dA_3 = \frac{z''}{1 + z'^2} dr A_1 + \frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}} d\lambda A_2 \quad (7)$$

Com as (21, 3) obtemos os pfaffianos :

$w^1 = \sqrt{1 + z'^2} dr$	$w^2 = r d\lambda$
$w_1 = -\frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}} d\lambda$	$w_2 = \frac{z''}{1 + z'^2} dr$

(8) (9)

Para  $w_3$  o cálculo seguinte é mais interessante :

Das (8) seguem :

$$dw^1 = 0, \quad dw^2 = dr \times d\lambda. \quad (10)$$

O elemento de área segue da (22, 6)

$$\sigma = r \sqrt{1 + z'^2} (dr \times d\lambda). \quad (11)$$

As curvaturas geodésicas dos meridianos e paralelos seguem das (22, 14)

$$g_1 = 0, \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} \quad (12)$$

Finalmente da (22, 12) segue

$w_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} d\lambda$

(13)

A primeira das (24, 25), em sua forma (24, 8), nos dá para a linhas de curvatura a equação

$$dr d\lambda [-z' (1 + z'^2) + r z''] = 0 \quad (14)$$

Em geral o coeficiente de  $dr d\lambda$  é distinto de zero e a equação diferencial se reduz a

$$dr \cdot d\lambda = 0, \quad (15)$$

as linhas de curvatura são, portanto, os meridianos ( $\lambda = \text{const.}$ ) e os paralelos ( $r = \text{const.}$ ).

Se a (15) não é nula então o colchete da (14) é zero e a integração daria como resultado uma esfera : todos os seus pontos serão circulares (umbílicos) e as linhas de curvatura indeterminadas. Como conclusão : meridianos e pa

ralelos formam rede principal. Então

$$c_3 = 0 \quad (16)$$

Façamos :

$$M = k^{-1} = \frac{1}{r} \quad \text{raio de curvatura da secção meridiana. Seccão de azimute } \theta = 0.$$

$$N = k^{-2} = \frac{2}{r^2} \quad \text{raio de curvatura da secção normal à secção meridiana.}$$

$$\text{Secção de azimute } \theta = 90^\circ$$

As (26, 16) dão imediatamente :

$M = - \frac{\sqrt{(1 + z')^2}}{z}$	$N = - \frac{r \sqrt{1 + z'}^2}{z}$
-------------------------------------	-------------------------------------

(17)

As curvaturas gaussiana e média seguem imediatamente da (26, 15).

A métrica segue da (22, 2)

$$ds^2 = (1 + z')^2 dr^2 + r^2 d\lambda^2 \quad (18)$$

Com as mudanças de parâmetros definidas pelas relações :

$$(1 + z')^2 dr^2 = dm^2 = r^2 d\lambda^2, \quad (19)$$

obtemos, respectivamente, o  $ds^2$  geodésico e o  $ds^2$  isotermof

$$ds^2 = dm^2 + r^2 d\lambda^2, \quad ds^2 = r^2 (d\lambda^2 + d\lambda'^2), \quad (20)$$

obtemos, respectivamente, o  $ds^2$  geodésico e o  $ds^2$  isotermos

$$ds^2 = dm^2 + r^2 d\lambda^2 , \quad ds^2 = r^2 (d\zeta^2 + d\lambda^2), \quad (20)$$

onde  $m$  é arco do meridiano contado a partir de um paralelo fixo e  $\zeta$  a chamada latitude isométrica.

Vamos agora introduzir a latitude  $\varphi$  : ângulo do vector  $\mathbf{A}_3$  com o plano do equador.

Segue da (6)

$$\cos \varphi = (1 + z'^2)^{\frac{1}{2}} z' \cos \lambda, (z' \sin \lambda, -1) \cdot (\cos \lambda, \sin \lambda, 0) \quad (21)$$

$$\cos \varphi = -\frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}}, \tan \varphi = \frac{1}{z'}, \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} \quad (22)$$

Segue

$$\sin \varphi \frac{d\varphi}{dr} = \frac{z'}{\sqrt{(1 + z'^2)^3}}, \quad (23)$$

e as (17) se escrevem :

$M = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{dr}{d\varphi}$	$N = \frac{r}{\cos \varphi}$
---	------------------------------

(24)

Os pf. das (8), (9) e (13), nas variáveis  $m$  e  $\varphi$ , passam a ser os seguintes :

$w^1$	$w^2$	$w_1^*$	$w_2$	$w_3$
$dm$	$r d\lambda$	$\sqrt{1 - \frac{r^2}{m^2}} dm$	$\frac{r_m}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{m^2}}} dm$	$r_m d\lambda$
$M d\phi$	$N \cos \varphi d\lambda$	$\cos \varphi d\lambda$	$- d\phi$	$- \sin \varphi d\lambda$

(25)

(26)

(27)

(28)

(29)

Para a primeira e segunda colunas, em função do azimute  $\theta$  do elemento de linha  $w = ds$ , temos segundo as (22, 22) :

$$\boxed{w^1 = ds \cdot \cos \theta \quad w^2 = ds \cdot \sin \theta} \quad (30)$$

ou ainda :

$$\frac{dm}{ds} = \cos \theta, \quad r \frac{d\lambda}{ds} = \sin \theta \quad (31)$$

A derivação da segunda nos dá

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\cos \theta} \left( r \frac{d^2 \lambda}{ds^2} + \frac{dr}{ds} \frac{d\lambda}{ds} \right). \quad (32)$$

Com a primeira das (29) obtemos :

$$\frac{w_3}{w} = \frac{dr}{dm} - \frac{d\lambda}{ds} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dm} - \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{dr}{ds} - \frac{d\lambda}{ds} \right) \quad (33)$$

A curvatura geodésica segue da última de (24, 11)

$$g = \frac{1}{\cos \theta} \left( r \frac{d^2 \lambda}{ds^2} + 2 \frac{dr}{ds} \frac{d\lambda}{ds} \right), \quad (34)$$

que, igualada a zero, segundo as (31, 3), dá a equação das linhas geodésicas.

É importante notar que devemos rejeitar a solução indeterminada  $\infty$   $\times 0$ , obtida para  $\theta = 90^\circ$  e  $dm = 0$ .

Façamos, por exemplo :

$$m = B_0 = \text{const.} \quad r = p \quad (35)$$

o que nos daria um paralelo qualquer da superfície. Ora, é evidente a priori que um paralelo não pode ser uma geodésica senão quando seu plano (osculador) corta a superfície em ângulo reto, passando então o raio do paralelo, em geral, por um maximum ou por minimum.

Rejeitando  $\theta = 90^\circ$ , ou se quizermos, aceitando excepcionalmente a solução

$$m = B_0 = 0, \quad r = a, \quad (36)$$

temos para equação diferencial das geodésicas

$$r \frac{d^2 \lambda}{ds^2} + 2 \frac{dr}{ds} \frac{d\lambda}{ds} = 0, \quad (37)$$

que se escreve ainda

$$\frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\lambda}{ds} \right) = 0. \quad (38)$$

Finalmente, com a segunda das (31), teremos :

$r^2 \frac{d\lambda}{ds} = r \sin \theta = a \sin \theta \frac{E}{E} = h = \text{const.}$

(39)

$s$  = arco da geodésica ;

$a$  = raio do paralelo equatorial ;

$\theta$  = azimute da geodésica ;

$\theta_E$  = azimute equatorial da geodésica ;

$h$  = constante de Clairant, A.C. (1 713 - 1 765) .

As (19) e a última das (22) dão

$$\frac{dr}{dm} = - \sin \varphi \quad (40)$$

Com a diferenciação da (39) obtemos a relação

$$d\theta = \sin \varphi \cdot d\lambda = 0 \quad (41)$$

As (30) com as (39) dão :

$w^1 = \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} ds$	$w^2 = \frac{h}{r} ds ,$
---------------------------------------	--------------------------

(42)

que igualadas com as primeiras das (25) e (26), dão :

$$ds = \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} dm , \quad d\lambda = \frac{h}{r \sqrt{r^2 - h^2}} dm \quad (43)$$

de onde :

$s = \int \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} dm$	$\lambda = \lambda_0 \pm h \int \frac{1}{r \sqrt{r^2 - h^2}} dm$
--	--

(44)

A curva traçada sobre uma superfície de revolução, que corta os meridianos consecutivos, sob o mesmo azimute (rumo) constante é a loxodromia. Segue das (30), (25) e (26) que será

$$\frac{\frac{w^2}{1}}{w} = \tan \theta = r \frac{d \lambda}{dm} = \frac{N \cos \varphi}{M} \frac{d \lambda}{d \varphi} , \quad (45)$$

ou ainda com as (19)

$$d\lambda = \tan \theta \cdot d\varphi = \tan \theta \cdot \frac{M}{N} \sec \varphi d\varphi \quad (46)$$

As curvas integrais serão

$$\lambda - \lambda_0 = \tan \theta \cdot \varphi \quad (47)$$

onde a latitude isotermica (isométrica) é

$$\varphi = \int_0^\varphi \frac{M}{N} \sec \varphi d\varphi \quad (48)$$

### § 36. O ELIPSOIDE INTERNACIONAL.

Se nas eq. (35, 1) fizermos

$$r = a \cos \beta$$

$$z = -b \sin \beta ,$$

(1)

com:

$$a = 6378388 \text{ m}$$

$$e = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{297,0} \quad (\text{achatamento})$$

$\beta$  = latitude reduzida (anomalia excêntrica) : ângulo do raio vetor do círculo principal da elipse meridiana.  
(1),

$$F(r, z) = \frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0 , \quad (2)$$

com o plano do equador ,

teremos o elipsóide de referência internacional.

A diferenciação das (1) permite relacionar este parâmetro  $\beta$  com a latitude  $\phi$  mediante as (35, 22)

$$\frac{1}{z'} = -\frac{a}{b} \tan \beta = \tan \phi \quad (3)$$

Seguem, agora, funções clássicas usuais no estudo do elipsóide de referência

$$w^2 = 1 - e^2 \sin^2 \phi \quad , \quad v^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \phi \quad (4)$$

$$w^2 = 1 - e^2 \cos^2 \beta \quad , \quad v^2 = 1 + e'^2 \sin^2 \beta . \quad (5)$$

As excentricidades  $e$  (primeira) e  $e'$  (segunda) são definidas pelas relações :

$$e^2 a^2 = e'^2 b^2 = a^2 - b^2 , \quad (6)$$

de onde :

$$\frac{a}{b} = \sqrt{1 + e'^2} \quad , \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \quad (7)$$

Façamos ainda :

$$c = \frac{a^2}{b} = a \sqrt{1 + e'^2} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{b}{1 - e^2} . \quad (8)$$

Resultam as relações seguintes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{w^2}{v^2} &= \frac{1 - e^2}{1} = \frac{1}{1 + e'^2} = \frac{-2}{v^2} \\ \frac{w}{v} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{1}{v} \\ wv &= 1 = v \bar{w} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Da (3) obtemos :

$$z' = \frac{b}{a} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} ; \quad (10)$$

$$\sqrt{1 + z'^2} = \frac{v}{\sin \beta} ; \quad (11)$$

$$z'' = - \frac{b}{a} \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{d \beta}{dr} \quad (12)$$

Da primeira das (1) segue

$$dr = - a \sin \beta d \beta . \quad (13)$$

Os pf. das (35, 8), (35, 9) e (35, 13) ou das (35, 25) a (35, 29) se escrevem agora :

$w^1$	$w^2$	$w_1$	$w_2$	$w_3$
$-aw d\beta$	$a \cos \beta d\lambda$	$-\frac{b}{a} \frac{\cos \beta}{\bar{w}} d\lambda - \frac{b}{a} \frac{d\beta}{\sin \beta}$		$\frac{\sin \beta}{\bar{w}} d\lambda$
$\frac{a(1-e^2) d\varphi}{w^3}$	$\frac{a \cos \varphi}{w} d\lambda$	$\cos \varphi d\lambda$	$-d\varphi$	$-\sin \varphi d\lambda$

(14)

(15)

(16)

(17)

(18)

As (35, 24) se escrevem :

$M = \frac{a(1-e^2)}{w^3} = - \frac{c}{v^3}$	$N = - \frac{a}{w} = - \frac{c}{v}$
--	-------------------------------------

(19)

Finalmente, obtemos uma expressão finita para  $\mathcal{L}$  integrando a (35, 48).

Partindo de

$$\frac{M}{N} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}, \quad (20)$$

podemos escrever

$$\frac{M \sec \varphi d\varphi}{N} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{e^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - e \frac{d(e \sin \varphi)}{1 - (e \sin \varphi)^2}$$

A integral do primeiro termo tem por valor

$$\ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (21)$$

e a integral do segundo termo

$$\frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \quad (22)$$

Resulta

$$\mathcal{L} = \int_0^\varphi \frac{M}{N} \sec \varphi d\varphi = \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right] \quad (23)$$

$e$  = base dos logarítmicos neperianos.

No caso da esfera a excentricidade é nula e a grandeza correspondente

$$\mathcal{L}_1 = \int_0^\varphi \sec \varphi d\varphi = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (24)$$

é chamada latitude crescente ou variável Mercator, Gerhard Krämer (1512-?).

Ela é o gundermaniano inverso da latitude  $\varphi$ , i. e.

$$\mathcal{L}_1 = \text{gd}^{-1} \varphi = \sinh^{-1} \tan \varphi. \quad (25)$$

Para o cálculo numérico das integrais (35, 44) v. nossa tese /21/.

## 4. CARTOGRAFIA RACIONAL

### § 41. GENERALIDADES

Se existir uma correspondência pontual um-a-um entre duas superfícies  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  diremos que elas estão representadas uma sobre a outra e escreveremos

$$\Sigma / \tilde{\Sigma} , \quad (1)$$

(leia: "Σ sobre Σ") e onde :

$\Sigma$  = superfície objetiva

$\tilde{\Sigma}$  = superfície imagem.

Se

$$P = P(u, v) , \quad \tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (2)$$

são os vectores-radar das duas superfícies, a representação, a mais geral, ficará determinada pelas equações de transformação admissível :

$$\tilde{u} = \tilde{u}(u, v) , \quad \tilde{v} = \tilde{v}(u, v). \quad (3)$$

Poderemos, então, introduzir as (3) na segunda das (2) e usar, quando convier, na  $\tilde{\Sigma}$ , os mesmos parâmetros usados na  $\Sigma$ , e, com isso, pontos correspondentes terão as mesmas coordenadas curvilineas e as equações paramétricas resultantes :

$$P = P(u, v) , \quad \tilde{P} = \tilde{P}(u, v) , \quad (4)$$

cumprirão dupla finalidade :

- (i) representam analiticamente as superfícies ;
- (ii) determinam a representação ;

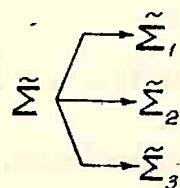
As (3) ou (4) são as equações gerais da representação.

Consideremos em particular :

- $\Sigma^*$  = região da superfície topográfica da Terra, p. ex., um país;
- $\Sigma$  = região correspondente de uma superfície de referência, convenientemente escolhida, para o planeta Terra, p. ex., região do elipsóide de referência internacional;
- $\tilde{\Sigma}$  = região de um plano.

Diremos que  $\tilde{\Sigma}$  é a representação plana ou plano do país  $\Sigma^*$  na representação  $\Sigma^* / \tilde{\Sigma}$ .

Segundo as "Recomendações" da Primeira Reunião Brasileira de Consulta sobre Cartografia, outubro de 1958, São Paulo, podemos classificar  $\tilde{\Sigma}$  em três categorias



$\Sigmã_1$  : Mapa - O termo mapa indica a representação plana, em escala geralmente bastante reduzida, de uma área da superfície da Terra definida por limites naturais, políticos ou administrativos.

$\Sigmã_2$  : Carta - O termo carta é utilizado para indicar as folhas resultantes da representação sistemática de uma área de terra ou de mar. Os limites da área de terrenos representada em cada folha são constituidos por linhas convencionais, que facilitam a ligação cômoda e contínua com folhas contíguas (meridianos e paralelos), ou simples linhas retas). As escalas utilizadas nas cartas são em geral maiores que a de 1 : 1 000 000.

$\Sigmã_3$  : Planta - O termo planta pode, por um lado, significar folha em escala grande (1:5000 ou maior) ou por outro lado indicar a representação do levantamento de uma área restrita, com objetivo especí

fico. Nos dois casos não se deve considerar a curvatura da Terra tomando-se como limite máximo de representação a extensão do terreno onde não se fazem sentir os efeitos dessa curvatura.

Cartas ou plantas cadastrais são representações em escala grande, executadas dentro de um padrão de precisão préviamente estabelecido e utilizadas para mostrar os verdadeiros limites e usos das propriedades. Podem ser dispendidos os detalhes naturais e artificiais e a altimetria.

Na elaboração da carta de um país devemos separar duas séries de operações, a saber :

(i) representação  $\Sigma^*/\Sigma$  (Geodésia),

i. é., projeção, segundo as normais ao elipsóide de referência, dos pontos do país  $\Sigma^*$ .

Sobre  $\Sigma$  serão efetuados todos os cálculos correspondentes às observações geodésico-astronômicas realizadas em cada ponto.

As dificuldades essenciais da Geodésia provém do fato de que o geodeta opera sobre o geoide e calcula sobre o elipsóide.

O geoide é a superfície equipotencial do campo da gravidade que passa pelo ponto cuja cota é admitida como cota zero.

O campo da gravidade é dado pela soma

$$g = F + f , \quad (5)$$

onde os vectores significam :

$F$  = atração newtoniana devida à massa da Terra ;

$f$  = centrifuga devida à rotação diurna da Terra ;

As operações geodésicas são imprescindíveis, pois que, basear uma carta sobre um conjunto de pontos determinados astronomicamente equivale a confundir, para a região considerada, o elipsóide de referência e o geoide.

(ii) representação  $\Sigma / \tilde{\Sigma}$  (Cartografia),

i.é., construção da carta propriamente dita.

O número de sistemas de representação que se pode considerar dentro de uma categoria é muito elevado. Cada sistema apresenta vantagens e inconvenientes particulares e se adapta melhor ou pior à finalidade para a qual a carta considerada foi estabelecida e ao país do qual ela é imagem.

A Cartografia pode ser estudada sob os seguintes aspectos : histórico, empírico, artístico e racional.

Vamos focalizar a parte da Cartografia Racional que mais interessa à Geodésia.

#### § 42. CATEGORIAS DE REPRESENTAÇÃO

Podemos considerar as seguintes categorias de representação (41,1) :

I. Representação conforme, na qual são conservados os valores dos ângulos traçados sobre a superfície.

II. Representação equivalente ou de igual-área, na qual são conservadas as razões das áreas.

III. Representação afilática, na qual não se verificam as propriedades anteriores.

IV. Representação geodésica, que conserva as geodésicas.

V. Representação isométrica, na qual são conservados os ângulos e as distâncias.

A representação geodésica, de pouco interesse para a Geodésia clássica, é, hoje, de capital importância devido, principalmente, às triangulações com grandes geodésicas, baseadas nos processos eletrônicos para medição de distâncias - geodimetros e telurômetros ou utilização das observações de occultação de estrélas pela lua.

Em /21/, apoiados em /26/, fizemos referência à possibilidade de uma trigonometria elipsóidica ou geodésica que completa o estudo da representação geodésica, cujo teorema fundamental, devido a Dini, U. e publicado a primeira vez em /18/, diz :

Duas superfícies podem ser representadas geodesicamente uma sobre outra, sem isometria ou semelhança, i.e., de modo que a cada ponto de uma corresponda um ponto da outra e às geodésicas de uma correspondam as geodésicas da outra, no caso em que suas primeiras formas fundamentais, mediante as coordenadas correspondentes (u, v) possam tomar a forma de Dini.

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2) \quad , \quad \tilde{ds}^2 = \left( \frac{1}{V} - \frac{1}{U} \right) \left( \frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V} \right) \quad (1)$$

É importante notar que a denominação trigonometria geodésica ou elipsóidica se refere à geometria global, em grande, e não local, i.e., dos pequenos triângulos, já brilhantemente tratada pelos ilustres matemáticos Levi-Civita e Tonolo, citados na Bibliografia de nossa tese /21/ - Geodésicas e Áreas.

#### § 43. REPRESENTAÇÃO ISOMÉTRICA

Se as (41, 3) são tais que

$$\frac{\tilde{ds}}{ds} = 1 \quad , \quad (1)$$

então a (41, 1) se diz representação isométrica.

A condição característica é, portanto, que as superfícies tenham um mesmo  $ds^2$ .

Os seguintes elementos se conservam na representação :

As curvaturas gaussianas de  $\Sigma$  e  $\tilde{\Sigma}$  em dois pontos homólogos  $P$ ,  $\tilde{P}$  são as mesmas (§ 22).

Os ângulos de duas curvas, em seus pontos de intersecção, são os mesmos que os ângulos de suas homólogas.

A curvatura geodésica em  $P$  de uma curva a  $C$  de  $\Sigma$  é igual à curvatura geodésica da curva homóloga  $C$  de  $\tilde{\Sigma}$  no ponto  $\tilde{P}$  homólogo de  $P$ .

A curva correspondente sobre  $\tilde{\Sigma}$  a uma geodésica de  $\Sigma$  é uma geodésica de  $\tilde{\Sigma}$ .

As superfícies com curvatura gaussiana constante são as mais importantes para a Cartografia. Consideremos uma tal superfície com seu  $ds^2$  posto sob forma geodésica (31, 17).

$$ds^2 = dm^2 + G d\lambda^2, \quad (2)$$

ou

$$ds^2 = dm^2 + r^2 d\lambda^2, \quad (3)$$

com as relações (31, 19) e (31, 20), a saber :

$$r(0, \lambda) = 0 \quad (4)$$

e

$$\frac{r_m}{m}(0, \lambda) = 1. \quad (5)$$

Teremos, da (3), os pfaffianos :

$$w^1 = dm, \quad w^2 = rd\lambda. \quad (6)$$

Diferenciando exteriormente vem :

$$dw^1 = 0, \quad dw^2 = r_m (dm \times d\lambda) \quad (7)$$

O elemento de área segue da (22, 6)

$$\sigma = r \quad (dm \times d\lambda) \quad (8)$$

As curvaturas geodésicas das linhas paramétricas seguem das (22, 14);

$$g_1 = 0, \quad g_2 = \frac{r_m}{r} \quad (9)$$

Da (22, 12) segue

$$w_3 = r_m d\lambda \quad (10)$$

O elemento de área da imagem esférica segue da (22, 8)

$$\sigma^0 = - dw_3 = - r_{mm} (dm \times d\lambda) \quad (11)$$

Finalmente, da (22, 9), segue a seguinte relação para a curvatura gaussiana

$$r_{mm} + K \cdot r = 0 \quad (12)$$

E' uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes em  $r$ .

Escolhidas as constantes mediante as condições (4) e (5) resultam as expressões seguintes :

$$r = m, \quad \text{se} \quad K = 0$$

$$r = R \sin\left(\frac{m}{R}\right), \quad \text{se} \quad K = + \frac{1}{R^2} \quad (13)$$

$$r = R \sinh\left(\frac{m}{R}\right), \quad \text{se} \quad K = - \frac{1}{R^2}$$

O  $ds^2$  de uma superfície com curvatura gaussiana constante pode ser posto sob a forma

$$dm^2 + m^2 d\lambda^2, \quad dm^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{m}{R}\right) d\lambda^2, \quad dm^2 + R^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{m}{R}\right) d\lambda^2, \quad (14)$$

segundo seja a curvatura gaussiana nula, positiva, negativa.

O primeiro desses  $ds^2$  é o  $ds^2$  de um plano em coordenadas polares  $(m, \lambda)$ ; o segundo é o  $ds^2$  de uma esfera de raio  $R$ , o terceiro é o  $ds^2$  da superfície que Darboux denominou pseudoesfera, que é a mais simples das superfícies de revolução com curvatura gaussiana negativa.

Podemos, agora, concluir

$K = 0$  então  $\Sigma$  é isométrica ao plano

$K = \text{const.} > 0$  então  $\Sigma$  é isométrica à esfera

$K = \text{const.} < 0$  então  $\Sigma$  é isométrica à pseudoesfera.

Em geral, não sabemos encontrar todas as superfícies isométricas a uma superfície dada, qualquer, contudo, o nosso problema é mais simples, pois à Cartografia interessa encontrar todas as superfícies isométricas ao plano, ou seja, as superfícies com  $ds^2$  euclidiano.

Tomemos o  $ds^2$  do plano sob a forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (14)$$

Comparando com a (3) segue da (12) que, para o plano  $K = 0$ .

O teorema egregium ensina que para ser uma superfície isométrica ao plano, é necessário que a curvatura gaussiana seja nula em todo ponto da superfície, pois que a curvatura gaussiana de um plano é nula.

Para abreviar, mesmo com alguma perda de rigor analítico, apoie--mos na seguinte consideração geométrica:

Se a curvatura gaussiana  $K$  de uma superfície é nula, então segue da (22, 9) que, para  $\sigma^0 \neq 0$ , é nula a área da imagem esférica, i. é.

$$\sigma^0 = 0. \quad (15)$$

Isto significa que a área <sup>se</sup> contraiu, reduzindo-se a uma linha (ou ponto), ou ainda, que o vector  $A_3$ , normal à superfície, suposto sempre não nulo, é também o plano tangente, dependem apenas de um parâmetro;  $\Sigma$  é portanto, uma superfície desenvolvível, (cilindros, cônes e desenvolvíveis tangenciais).

Resta provar que, inversamente, a curvatura gaussiana de uma superfície desenvolvível é nula.

(i) Os cilindros

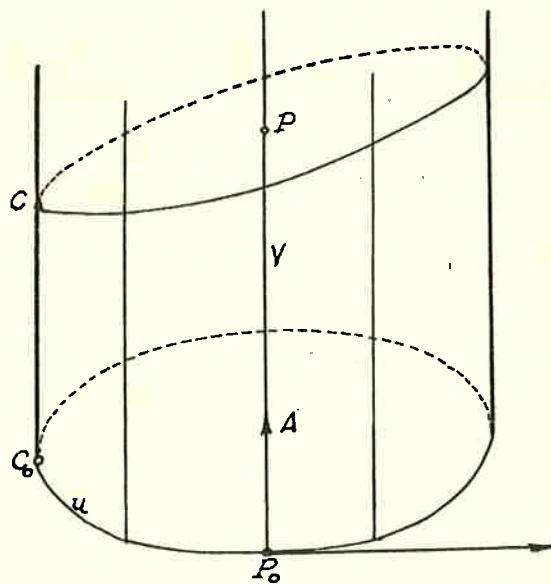


fig. 14

O lugar das retas paralelas a uma direção fixa e apoiadas sobre uma curva  $C$  é um cilindro (fig. 14).

Seja  $C_0$  o traço da superfície sobre um plano perpendicular às geratrizes e  $P$  um ponto de  $\Sigma$ . A geratriz de  $P$  encontra  $C_0$  em  $P_0$  e podemos escrever.

$$P = P(u, v) = P_0(u) + vA, \quad (16)$$

onde  $A$  é um vector unitário paralelo às geratrizes. Segue da (16)

$$dP = P_0 u du + dv \cdot A \quad (17)$$

de onde

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \quad (18)$$

i.e., métrica euclidiana e curvatura gaussiana nula.

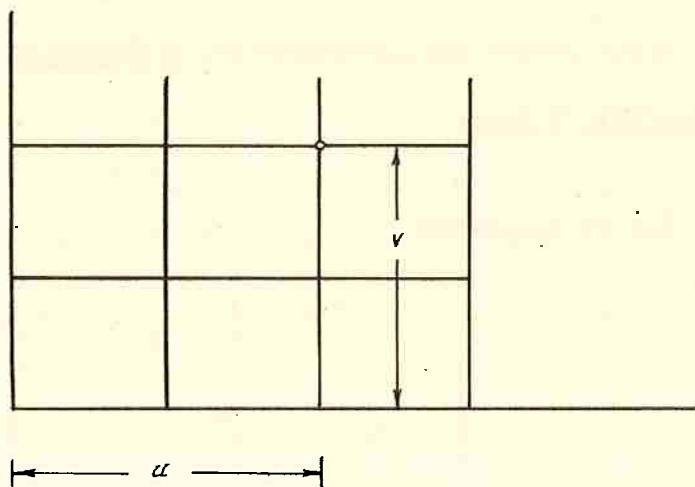


fig. 15

As equações da representação plana seriam : (fig. 15).

$$X = u, \quad Y = v \quad (19)$$

(ii) Os cones

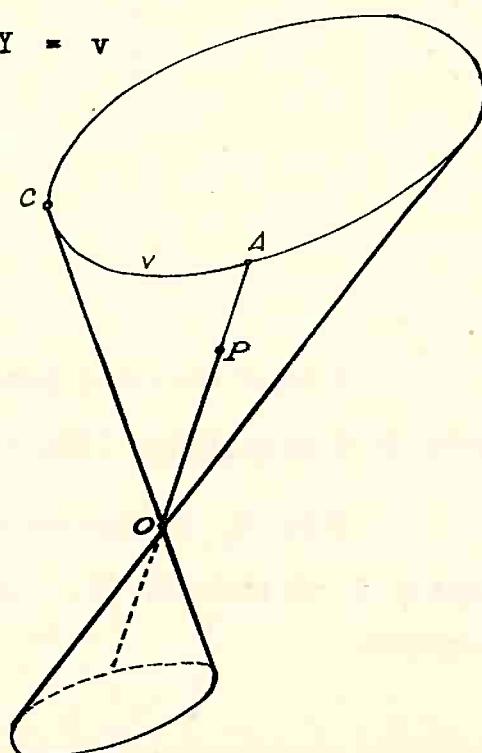


fig. 16

Um cône  $\Sigma$  é gerado por uma reta variável que passa por um ponto fixo  $O$  e que desliza ao longo de uma curva  $C$ .

E' cômodo tomar para curva  $C$  a intersecção do cone e de uma esfera de raio unitário e centro  $O$ . Teremos

$$P = P(u, v) = u A(v), \quad (20)$$

de onde

$$dP = u \, d \, v \, A^* + A \, du \quad , \quad (21)$$

tomamos  $v$  abscissa curvilínea do ponto  $A$  sobre  $C$ , portanto  $A^*$  é unitário.

Segue da (21) que

$$ds^2 = du^2 + u^2 dv^2 \quad (22)$$

Comparando com a (2) segue da (12) que, para o cone  $K = 0$ .

### (iii) A desenvolvível tangencial

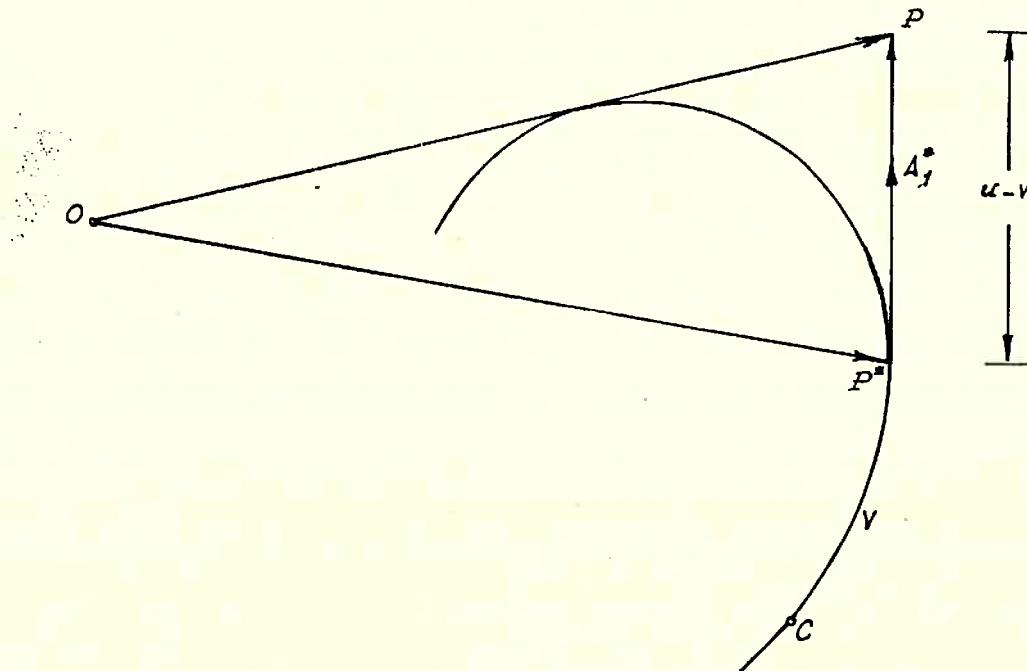


fig. 17

Consideremos uma superfície desenvolvível tangencial  $\Sigma$  que pode ser definida por uma aresta de retrocesso  $C$  descrita pelo vector-radar  $P^* = P^*(v)$ ,  $v$  designando a abcissa curvilínea.

O vector-radar de  $\Sigma$  se escreve

$$P = P(u, v) = P^* + (u - v) A_1^* \quad (23)$$

Diferenciando e tendo em vista as (23, 30) e (23, 32) obtemos

$$dP = du A_1^* + k(u - v) dv A_2^* , \quad (24)$$

com os pfaffianos :

$$w^1 = du , \quad w^2 = k(u - v) dv \quad (25)$$

Seguem :

$$dw^1 = 0 , \quad dw^2 = k(du \times dv) \quad (26)$$

$$\sigma = w^1 \times w^2 = k(u - v)(du \times dv) \quad (27)$$

$$g_1 = 0 , \quad g_2 = \frac{1}{u - v} , \quad w_3 = k dv \quad (28)$$

$$\sigma^0 = - dw_3 = - 0 \quad (29)$$

Finalmente,  $K = 0$ . A métrica segue de (24)

$$ds^2 = du^2 + k^2(u - v)^2 dv^2 . \quad (30)$$

Conclusão:

As únicas superfícies isométricas ao plano são as superfícies desenvolvíveis e, inversamente, toda superfície desenvolvível é isométrica ao plano.

Da primeira das (26, 15) com as notações das (35, 17) segue para o  $K$  de revolução

$$K = \frac{1}{M N} \neq 0 \quad (31)$$

Conclusão:

A representação plana do elipsóide internacional (é, em geral, de qualquer variedade bidimensional riemanniana, não euclidiana), não é isométrica.

Ao invés da (1) teremos, em geral, a razão

$$\frac{dS}{ds} = \lambda(\varphi, \lambda, \theta) \neq 1 \quad (32)$$

que recebe o nome de módulo de deformação linear.

O elipsóide de revolução não é, portanto, sujeito a desenvolvimento sem rasgos nem dobras; sua representação plana padece necessariamente de deformação.

O estudo da representação isométrica sugere um outro critério de classificação dos sistemas de representação, segundo o esquema :

$$\Sigma^* / \Sigma / \Sigma_i / \tilde{\Sigma} \quad (33)$$

onde :

$\Sigma_i$  = superfície desenvolvível intermediária: cilindro, cône, plano, resultando as representações ou projeções cilíndricas, cônicas e horizontais.

§ 44. TEORIA DE DEFORMAÇÃO

É importante o teorema seguinte :

Em toda representação real (41, 1), não conforme, existem duas re-des ortogonais únicas que se correspondem :

(Tissot : Nouvelles Annales de Math., 17, 1 878, p. 151).

Consideremos, sobre  $\Sigma$ , os elementos de linha :

$$dP_1 = P_u du_1 + P_v dv_1, \quad dP_2 = P_u du_2 + P_v dv_2. \quad (1)$$

A condição de ortogonalidade no ponto  $P(u, v)$ , com vistas à tabuada (28, 3) se escreve:

$$dP_1 \cdot dP_2 = Edu_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + Gdv_1 dv_2 = 0 \quad (2)$$

Façamos

$$\frac{du}{dv} = m. \quad (3)$$

A (2) se escreve

$$Em_1 m_2 + F(m_1 + m_2) + G = 0. \quad (4)$$

A mesma condição no ponto imagem  $\tilde{P}(u, v)$  se escreve

$$\tilde{E}m_1 m_2 + \tilde{F}(m_1 + m_2) + \tilde{G} = 0. \quad (5)$$

Para a existência de solução não trivial na incógnita  $m_2$ , p.ex., deve ser nulo o determinante do sistema de equações (4) e (5), i.e.

$$\begin{vmatrix} Em + F & Fm + G \\ \tilde{E}m + \tilde{F} & \tilde{F}m + \tilde{G} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

O sub-índice 1 foi suprimido devido à simetria e assim, tanto  $m_1$  como  $m_2$  devem satisfazer à mesma equação quadrática (6).

(i) A (6) se anula identicamente, i.e. :

$$\frac{\tilde{E}}{E} = -\frac{\tilde{F}}{F} = -\frac{\tilde{G}}{G} = \lambda \quad (7)$$

Da condição de igualdade dos dois ângulos retos resultou que a (6) deve verificar-se para todas as direções (3) e da (7) resulta facilmente a relação

$$\frac{ds}{ds} = \lambda(u, v), \quad (8)$$

i.e., o módulo de deformação linear é independente da direção (3) e só depende de  $u$  e  $v$ .

Reciprocamente, ao verificar-se a (8), entre ângulos quaisquer  $\theta$ ,  $\tilde{\theta}$ , formados pelos elementos correspondentes  $ds_1$ ,  $ds_2$ ,  $d\tilde{s}_1$ ,  $d\tilde{s}_2$ , se verificará a equação

$$\cos \tilde{\theta} = \frac{E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2}{ds_1 \cdot ds_2} = \cos \theta. \quad (9)$$

Fica demonstrado o teorema :

A condição característica para que uma representação seja conforme é que exista proporcionalidade entre os elementos de arco  $ds$ ,  $ds$ , correspondentes a pontos homólogos.

Podemos também exprimir esta propriedade dizendo que uma figura pequena (p.ex., um triângulo) em um ponto de uma das superfícies é aproximadamente semelhante à figura que lhe corresponde na representação e a semelhança é tanto mais aproximada quanto menor seja o tamanho das figuras.

Uma condição característica para que uma representação seja conforme é que exista semelhança "no muito pequeno".

Uma representação plana conforme de uma pequena região de um país, próxima a um ponto é, portanto, fiel no que se refere a ângulos e aproximada em relação às distâncias. A representação pode oferecer uma imagem muito alterada da região em grande.

No caso de existir a (8), para cada rede ortogonal sobre  $\Sigma$  corres-

ponderá uma rede, também ortogonal, sobre  $\tilde{\Sigma}$ .

(ii) A (6) não se anula identicamente, i.e.

$$ds \neq \Delta(u, v) \cdot ds. \quad (10)$$

A (6) se escreve

$$(EF - \tilde{E}F) m^2 + (EG - \tilde{E}G) m + (FG - \tilde{F}G) = 0, \quad (11)$$

O discriminante desta equação, a saber

$$(EG - \tilde{E}G)^2 - 4(EF - \tilde{E}F)(FG - \tilde{F}G),$$

com as redes ortogonais, (2) e sua análoga com til, se reduz a

$$(EG - \tilde{E}G)^2 > 0. \quad (12)$$

Logo, as raízes de (11) são reais.

Chamaremos redes ortogonais principais as duas redes que se correspondem na representação e a elas faremos corresponder as linhas principais  $u$  ( $v = \text{const.}$ ),  $v$  ( $u = \text{const.}$ ). Então, da (28, 21)

$$F = \tilde{F} = 0, \quad (13)$$

e os  $ds^2$  da  $\Sigma$  (objetiva) e da  $\tilde{\Sigma}$  (imagem) serão respectivamente :

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2, \quad \tilde{ds}^2 = \tilde{E} du^2 + \tilde{G} dv^2, \quad (14)$$

com os pfaffianos :

$$w^1 = \sqrt{E} du, \quad w^2 = \sqrt{G} dv \quad (15)$$

$$\tilde{w}^1 = \sqrt{\tilde{E}} du, \quad \tilde{w}^2 = \sqrt{\tilde{G}} dv. \quad (16)$$

O módulo de deformação linear se escreve então

$$\Delta = \frac{ds}{ds} = \frac{\tilde{w}}{w}, \quad (17)$$

e, em geral

$$\lambda = \lambda(u, v, \frac{dv}{du}). \quad (18)$$

Se elevarmos ao quadrado a (17) e introduzirmos o azimute  $\theta$  do elemento linear ds emitido do ponto P (u, v), segue das (22, 23).

$$\lambda^2 = \frac{\tilde{w}_1^2}{w^2} \cos^2 \theta + \frac{\tilde{w}_2^2}{w^2} \sin^2 \theta. \quad (19)$$

Façamos

$$\lambda_1 = \frac{\tilde{w}_1}{w} = \sqrt{\frac{E}{E}} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\tilde{w}_2}{w} = \sqrt{\frac{G}{G}}, \quad (20)$$

que são os modulos principais de deformação linear.

$\lambda_1$  : na direção da linha u ( $v = \text{const.}$ ), corresponde ao azimute  $\theta = 0$ ;

$\lambda_2$  : na direção da linha v ( $u = \text{const.}$ ), corresponde ao azimute  $\theta = 90^\circ$ .

A (19) toma a forma normal

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 \cos^2 \theta + \lambda_2^2 \sin^2 \theta. \quad (21)$$

E' uma lei simples que mostra a variação do modulo de deformação linear ao variar o azimute.

Para as direções principais temos ainda :

$$\tilde{w}^1 = \lambda_1 w \cos \theta, \quad \tilde{w}^2 = \lambda_2 w \sin \theta. \quad (22)$$

Segue

$$\frac{\tilde{w}_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\tilde{w}_2^2}{\lambda_2^2} = w^2, \quad (23)$$

e obtemos a conclusão :

A imagem de um círculo infinitesimal com raio  $w$  é uma elipse com os semi-eixos  $\lambda_1 w$ ,  $\lambda_2 w$ .

Se fizermos :

$$\frac{\lambda_1}{w} = x, \quad \frac{\lambda_2}{w} = y, \quad (24)$$

então a (23) se escreve :

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} = 1 \quad (25)$$

Esta cônica, que representa uma imagem ampliada da elipse infinitesimal chama-se indicatriz de Tissot. Seu eixo maior  $2\lambda_1$  coincide com primeira direção principal de deformação e seu eixo menor  $2\lambda_2$  com a segunda direção principal de deformação.

As linhas principais são, portanto, linhas de deformação extremas.  
(fig. 18)

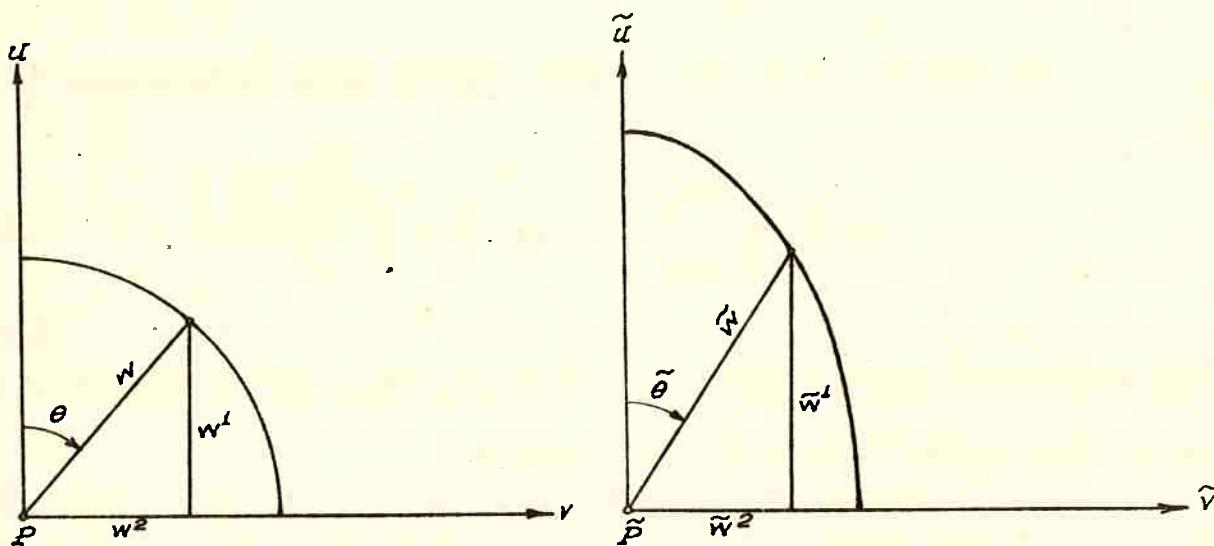


fig. 18

As relações :

$$\begin{aligned} w^1 &= w \cos \theta & w^2 &= w \sin \theta \\ \tilde{w}^1 &= \tilde{w} \cos \tilde{\theta} & \tilde{w}^2 &= \tilde{w} \sin \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (26)$$

combinadas com as (20) dão facilmente :

$$\frac{\tan \theta}{\tan \tilde{\theta}} = \frac{\wedge_1}{\wedge_2} \quad (27)$$

$$\frac{\sin(\theta + \tilde{\theta})}{\sin(\theta - \tilde{\theta})} = \frac{\wedge_1 + \wedge_2}{\wedge_1 - \wedge_2} \quad (28)$$

A deformação angular é dada pelo ângulo

$$\omega = \theta - \tilde{\theta} \quad (29)$$

Quando  $\theta$  cresce de 0 a  $90^\circ$ ,  $\omega$  cresce de 0 a um maximum, em seguida decresce e retoma o valor zero. A (28) mostra que o maximum de  $\omega$  se realiza quando

$$\theta_0 + \tilde{\theta}_0 = 90^\circ \quad (30)$$

Os ângulos  $\theta_0$  e  $\tilde{\theta}_0$  são pois complementares, logo, segundo a (27)

$$\tan \theta_0 = \sqrt{\frac{\wedge_1}{\wedge_2}}, \quad \tan \tilde{\theta}_0 = \sqrt{\frac{\wedge_2}{\wedge_1}}, \quad (31)$$

fórmulas que dão os ângulos sobre a superfície objetiva e sobre a superfície imagem correspondentes à máxima deformação angular.

De (28) segue

$$\sin \omega_0 = \frac{\wedge_1 - \wedge_2}{\wedge_1 + \wedge_2} \quad (32)$$

ou ainda

$$\tan \omega_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \quad (33)$$

Com (32) ou (33) calculamos a deformação angular máxima em uma representação qualquer.

Para o módulo de deformação superficial teremos

$$f = \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} = \frac{\tilde{w}^1 \times \tilde{w}^2}{w^1 \times w^2} = \frac{\sqrt{E G}}{\sqrt{E G}} \quad (34)$$

i. e.,

$$f = \lambda_1 \lambda_2 \quad (35)$$

A deformação linear elementar tem por valor

$$\tilde{w} - w = (\lambda - 1) w = (\lambda - 1) ds. \quad (36)$$

Deixemos, por um instante, o caso das representações gerais para estudar mais a fundo aquele que é de maior interesse para a Geodésia, o caso das representações conformes. O problema é o seguinte: Como se realiza da maneira mais geral a representação conforme  $\Sigma / \tilde{\Sigma}$ ?

Para resolvê-lo partamos da observação de que as equações (34, 18) que ligam duas soluções conjugadas do beltramiano (34, 12)

$$\Delta(u) = 0 \quad (37)$$

para a superfície  $\Sigma$  permanecem inalteradas quando passamos para a  $\tilde{\Sigma}$  numa representação conforme.

De fato, basta introduzir a proporcionalidade (7), característica para as representações conformes, nas citadas equações (34, 18) para concluirmos de sua invariança.

Então, todo par de soluções conjugadas da (37) para  $\Sigma$  muda, pela

representação conforme  $\tilde{\Sigma}$  em um par análogo. Com a noção de variável complexa introduzida no § 34, podemos ainda dizer :

Se as duas superfícies  $\Sigma$ ,  $\tilde{\Sigma}$  estão em representação conforme, toda variável complexa de uma é uma variável complexa para a outra.

Isto posto, suponhamos que sobre  $\Sigma$  conhecemos um duplo sistema isotermo  $(\mathcal{L}, \lambda)$ , onde  $\mathcal{L}$  e  $\lambda$  têm, aqui, significação genérica, com

$$ds^2 = \frac{1}{q^2} (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2), \quad (38)$$

e da mesma forma sobre  $\tilde{\Sigma}$  um sistema análogo com

$$ds^2 = \frac{1}{\tilde{q}^2} (dx^2 + dy^2), \quad (39)$$

continuando a supor, apesar da notação,  $\tilde{\Sigma}$  qualquer.

A  $\mathcal{L} + i\lambda$  é uma variável complexa sobre  $\Sigma$  e  $x + iy$  é uma variável complexa sobre  $\tilde{\Sigma}$ .

Se tivermos, então uma representação conforme  $\Sigma / \tilde{\Sigma}$ , deverão ser  $x, y$  funções tais de  $\mathcal{L}, \lambda$  que  $x + iy$  seja ainda variável complexa sobre  $\Sigma$ . Segundo o resultado expresso pela (34, 19), devemos ter portanto

$$x + iy = f(\mathcal{L} + i\lambda) \text{ ou } x + iy = f(\mathcal{L} - i\lambda) \quad (40)$$

onde  $f$  é o símbolo de uma função (arbitrária) de variável complexa, i.e.,  $x, y$  deverão satisfazer, como vimos no § 34, às equações de Cauchy-Riemann.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \mathcal{L}} &= \pm \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \pm \frac{\partial y}{\partial \mathcal{L}} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Mas vice-versa, se estas relações têm lugar, o  $ds^2$  calculado em co

ordenadas  $\lambda$ ,  $\lambda$  se torna

$$ds^2 = -\frac{1}{q^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] (d\lambda^2 + d\lambda^2), \quad (42)$$

e resultando proporcional ao  $ds^2$

$$\frac{ds^2}{ds^2} = -\frac{q^2}{q^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \quad (43)$$

a representação é de fato conforme.

Concluimos portanto : Para construir todas as representações conformes de uma superfície  $\Sigma$  sobre uma outra  $\tilde{\Sigma}$  procura-se uma variável complexa  $\lambda + i\lambda$  da primeira, e uma variável complexa  $X + iY$  da segunda e faz-se:

$$X + iY = f(\lambda + i\lambda), \quad (44)$$

onde f é o símbolo de uma função arbitrária.

Vemos, portanto, que a solução do problema proposto requer o conhecimento das redes isotermas sobre uma e sobre outra superfície.

Assim, se de  $\Sigma$  conhecemos um e portanto, todos os sistemas isotermos, saberemos representá-la, na forma mais geral, conformemente sobre um plano.

Quanto ao duplo sinal da (44) a significação é a seguinte : orientadas as duas páginas de cada superfície, um deles dará uma representação conforme isogonal, i.e., os ângulos são conservados em grandeza e em sentido, e o outro corresponderá à representação conforme com conservação dos ângulos em grandeza mas em sentido invertido.

### § 45. REPRESENTAÇÃO GERAL DE REVOLUÇÃO

No § 44 as superfícies foram referidas às redes ortogonais principais e os raciocínios apoiados no conceito, generalizado às superfícies por Beltrami, de variável complexa sobre a superfície.

Na prática,  $\Sigma$  é um fuso de  $6^\circ$  de amplitude tomado sobre o elipsóide de referência, portanto pequeno em relação ao elipsóide, em seu conjunto, e  $\tilde{\Sigma}$  um plano.

Isto posto, vamos construir a representação plana geral das superfícies de revolução, em particular, do elipsóide de referência, de maneira independente e apoiados nas hipóteses seguintes :

$\Sigma$  : será assimilado a um plano complexo de Gauss, tangente ao elipsóide no centro de representação, porém, dotado de métrica, de revolução ;

$\tilde{\Sigma}$  : será considerado um plano euclidiano ;

- os infinitésimos serão assimilados a "muito pequenos".

Com isto, teremos dois planos complexos, com os respectivos diagramas de Argand, J.R. (1768 - 1822) e sentimos, a priori, que o tratamento analítico baseado nos vectores complexos ou vectores girantes deverá ser simples e eficaz.

Consideremos, no ponto  $P(\varphi, \lambda)$ , do elipsóide, o vector complexo

$$dz = w^1 + i w^2, \quad (1)$$

como ilustra o diagrama (fig. 19).

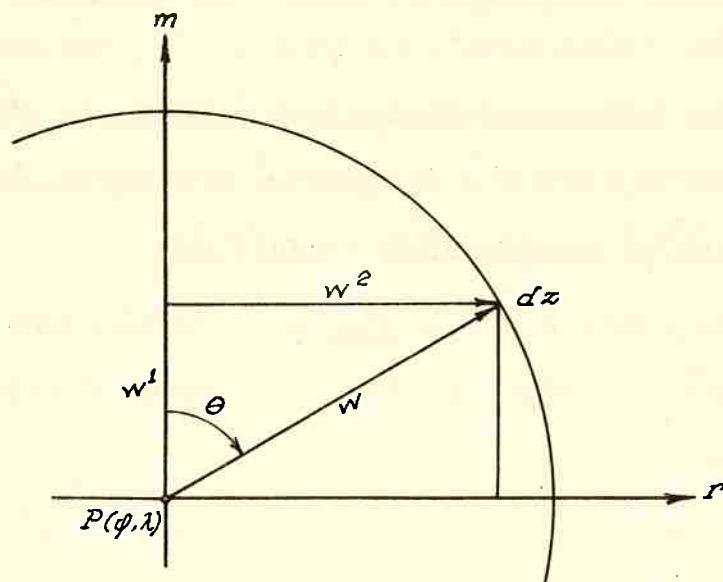


fig. 19

Teremos

$$w^1 = w \cos \theta, \quad w^2 = w \sin \theta \quad (2)$$

$$dz = w (\cos \theta + i \sin \theta) = w e^{i\theta}, \quad (3)$$

que é a forma polar de  $dz$ , na qual seu módulo é

$$w = ds = \sqrt{w^1^2 + w^2^2} \quad (4)$$

e

$$\theta = \tan^{-1} \frac{w^2}{w^1} \quad (5)$$

seu azimute (qualquer determinação  $\theta + 2 k\pi$  também serve como argumento).

Com a variação de  $\theta$  o vector girante

$$\frac{dz}{ds} = e^{i\theta} \quad (6)$$

descreverá um circulo unidade.

Quando este vector (6) varrer um sector-circular de amplitude  $\theta$  sobre  $\Sigma$ , o seu vector-girante homólogo varrerá sobre o plano  $\tilde{\Sigma}$  um sector de-limitado por uma "certa-curva", com amplitude  $\tilde{\theta}$ , contada a partir da transformada plana do meridiano (fig. 20).

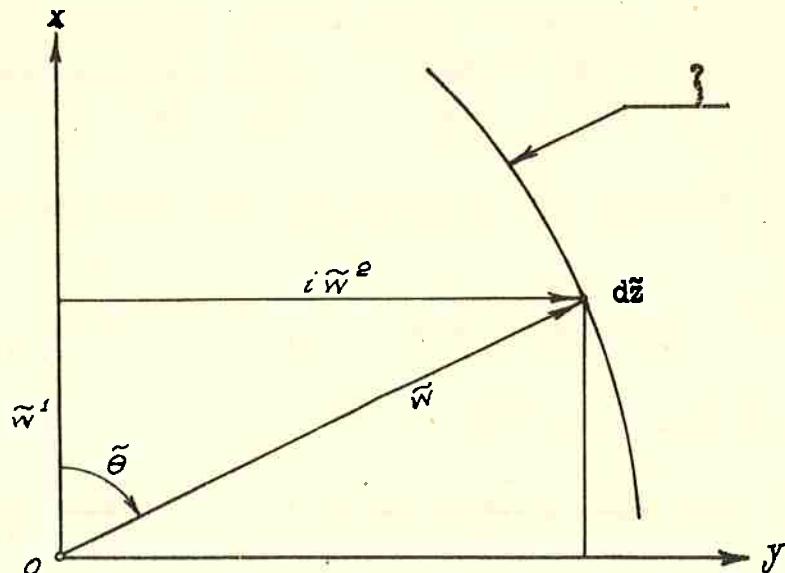


fig. 20

Aqui :

$$\tilde{w}^1 = \tilde{w} \cos \tilde{\theta} \quad , \quad \tilde{w}^2 = \tilde{w} \sin \tilde{\theta} \quad (7)$$

Segue

$$\frac{d\tilde{z}}{ds} = \frac{\tilde{w}^1}{\tilde{w}} + i \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{w}} = \frac{\tilde{w}}{\tilde{w}} (\cos \tilde{\theta} + i \sin \tilde{\theta}) . \quad (8)$$

Introduzindo o módulo de deformação linear

$$\lambda = \frac{ds}{d\tilde{s}} = \frac{\tilde{w}}{w} \quad , \quad (9)$$

resulta

$$\frac{d\tilde{z}}{ds} = \lambda e^{i\tilde{\theta}} \quad (10)$$

Tomemos, agora, as equações gerais da representação :

$$x = x(\varphi, \lambda) \quad , \quad y = y(\varphi, \lambda) \quad (11)$$

Segue :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}}{ds} &= \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} - \\ &- \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} + i \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{ds} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Ora, com  $ds^2$  de revolução, como vimos nas (35, 25) e (35, 26), temos :

$$w^1 = dm = M d\varphi \quad , \quad w^2 = r d\lambda = N \cos \varphi d\lambda \quad (13)$$

que, junto às (2), se escrevem :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{M} \cos \theta \quad , \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{N \cos \varphi} \sin \theta \quad (14)$$

Façamos para abreviar :

$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{1}{M} = P$	$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{1}{N \cos \varphi} = Q$
---	--

(15)

$\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{1}{M} = R$	$\frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{N \cos \varphi} = S$
---	--

(16)

Finalmente, o vector girante (10), que domina todo o estudo da representação, se escreverá

$$\lambda e^{i\tilde{\theta}} = P \cos \theta + Q \sin \theta + i(R \cos \theta + S \sin \theta) \quad (17)$$

Vamos agora transformá-lo na soma de dois vectores girantes, para

isso suponhamos

$$\theta = \omega t , \quad (18)$$

onde

$\omega$  = velocidade angular constante do vector girante de revolução (6).

$t$  = parâmetro real tempo.

Se escrevermos a (17) sob a forma

$$\underline{\Lambda} e^{i\theta} = (A + iB)(\cos \omega t + i \sin \omega t) + (C + iD)(\cos \omega t - i \sin \omega t), \quad (19)$$

da identificação resultam :

$$2A = P + S, \quad 2B = R - Q, \quad 2C = P - S, \quad 2D = R + Q. \quad (20)$$

Façamos

$$A + iB = p e^{i\alpha}, \quad C + iD = q e^{i\beta} \quad (21)$$

onde :

$$p = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad q = \sqrt{C^2 + D^2} \quad (22)$$

e

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{B}{A}, \quad \beta = \tan^{-1} \frac{D}{C} \quad (23)$$

Logo

$$\underline{\Lambda} e^{i\theta} = p e^{i(\alpha + \omega t)} + q e^{i(\beta - \omega t)} \quad (24)$$

Podendo  $t$  tomar todos os valores reais fixamos aquele  $t_0$  tal que resulte ser

$$\alpha + \omega t_0 = \beta - \omega t_0 \quad (25)$$

i.e.,

$$t_0 = \frac{\beta - \alpha}{2\omega} \quad (26)$$

Façamos girar os eixos (x, y) do ângulo

$$\gamma = \alpha + \omega t_0 = \beta - \omega t_0 = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (27)$$

Se  $\frac{d\tilde{z}}{ds}$  é o novo afixo de  $\frac{dz}{ds}$  nos novos eixos (X, Y), será

$$\frac{d\tilde{z}}{ds} = \frac{dz}{ds} e^{i\gamma}, \quad (28)$$

e com a equação (24)

$$\begin{aligned} i(\tilde{\theta} - \gamma) &= i(\alpha + \omega t - \gamma) = i(\beta - \omega t - \gamma) \\ \wedge e &= pe + qe \end{aligned} \quad (29)$$

ou, devido às (27)

$$\wedge e = pe + qe^{-i\omega(t-t_0)} \quad (30)$$

Introduzindo o novo parâmetro real

$$t^* = t - t_0, \quad (31)$$

e fazendo :

$$\tilde{\theta}^* = \tilde{\theta} - \gamma \quad (32)$$

i.é.

$$\tilde{\theta}^* = \tilde{\theta} - \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (33)$$

e também

$$\theta^* = \theta + \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (34)$$

a (30) se escreverá

$$\wedge e^{i\theta^*} = pe^{i\theta^*} + qe^{-i\theta^*} \quad (35)$$

Com a separação do real e do imaginário obtemos :

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \cos \tilde{\theta}^* = (p + q) \cos \theta^* \\ y = \lambda \sin \tilde{\theta}^* = (p - q) \sin \theta^* \end{array} \right\} \quad (36)$$

Façamos

$$p + q = \lambda_1, \quad p - q = \lambda_2, \quad (37)$$

então

$$x = \lambda \cos \tilde{\theta}^* = \lambda_1 \cos \theta^*, \quad y = \lambda \sin \tilde{\theta}^* = \lambda_2 \sin \theta^* \quad (38)$$

de onde :

$$\frac{x}{\lambda_1} = \cos \theta^*, \quad \frac{y}{\lambda_2} = \sin \theta^* \quad (39)$$

Finalmente :

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} = 1 \quad (40)$$

Esta é, precisamente, a equação de uma elipse de semi-eixos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , referida aos seus eixos.

Convém notar que no caso particular

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad (41)$$

as (38) coincidem com as equações paramétricas de um círculo,

Se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , o parâmetro  $\theta^*$  que aparece nas (38) não é o ângulo que o vector  $\lambda \cdot 0$  forma com o eixo  $x$  (como no caso do círculo) mas sim

a anomalia excentrica indicada no desenho (fig. 21).

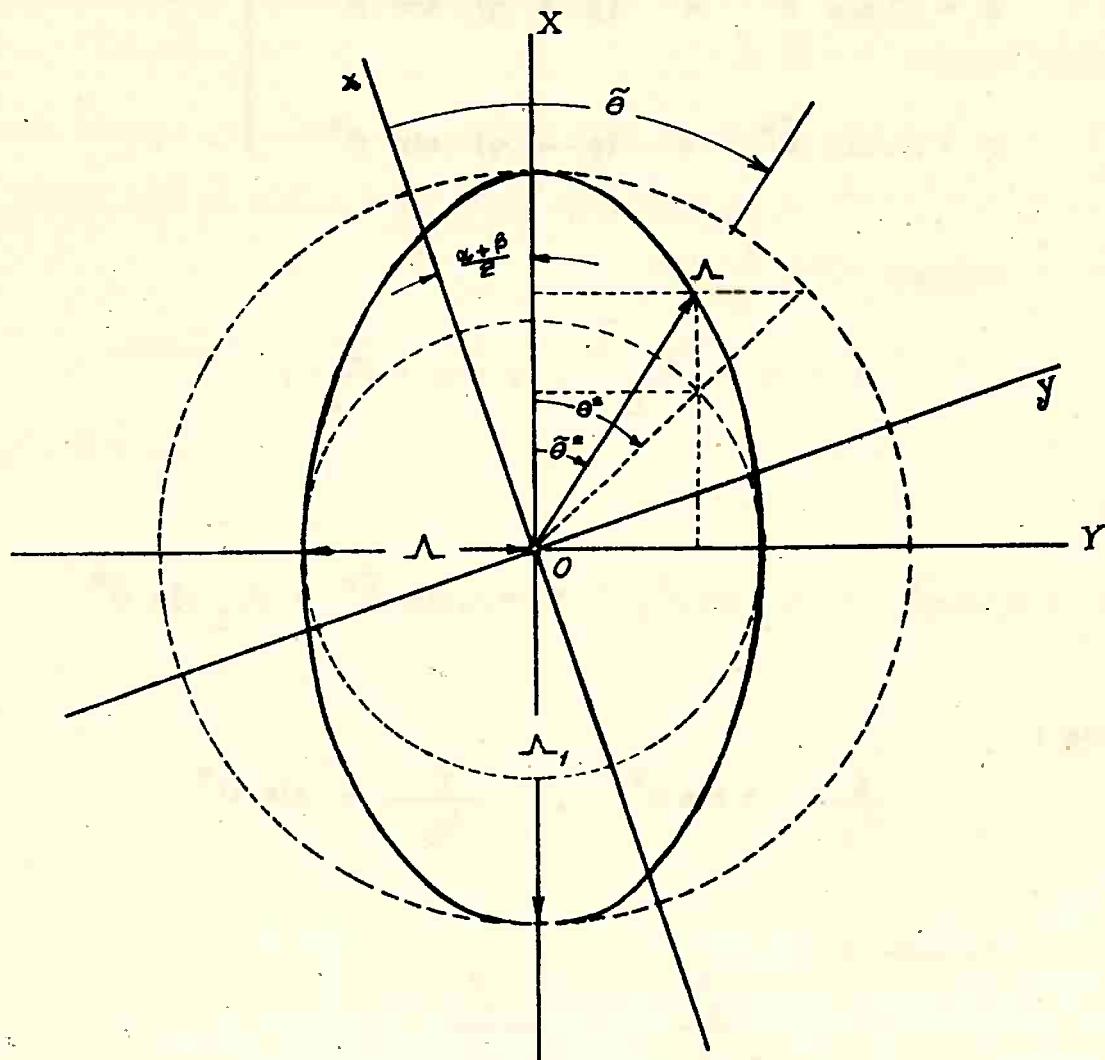


fig. 21

A figura, além de ilustrar uma construção simples da elipse, por meios, ajuda a interpretar as equações deduzidas para concluirmos :

1º) A deformação linear elementar (44, 36) tem por valor

$$(\lambda - 1) ds , \quad (42)$$

e é portanto de primeira ordem, em geral;

## 2º) Como

$$\wedge = \wedge(\varphi, \lambda; \theta) , \quad (43)$$

ela é função da posição do ponto  $P(\varphi, \lambda)$  e, em geral, do azimute  $\theta$  de  $ds$ ;

3º) A um círculo de raio muito-pequeno  $w = ds$ , de centro  $P$ , traçado sobre o elipsóide, corresponde na representação plana, uma elipse de raio vetor muito-pequeno  $\tilde{w} = d\tilde{s}$ ;

4º) A um círculo de raio unidade, de centro  $P$ , traçado sobre o elipsóide, corresponde na representação plana, uma elipse de raio vetor  $\Lambda$ , imagem ampliada da elipse anterior.

Esta elipse é denominada elipse indicatriz de Tissot.

5º) O módulo de deformação  $\Lambda$  é maximum  $\Lambda_1$  ou minimum  $\Lambda_2$  para duas direções perpendiculares entre si sobre o elipsóide :

$$\theta_1 \text{ com } \theta^* = \tilde{\theta}^* = 0^\circ, \quad \theta_2 \text{ com } \theta^* = \tilde{\theta}^* = 90^\circ.$$

A essas duas direções correspondem, na representação plana geral (não conforme), um sistema único de direções igualmente perpendiculares entre si:

$$\tilde{\theta}_1 \text{ com } \tilde{\theta}^* = 0^\circ, \quad \tilde{\theta}_2 \text{ com } \tilde{\theta}^* = 90^\circ.$$

Temos aqui o teorema de Tissot (§ 44).

São as chamadas direções principais de deformação e coincidem com os eixos da elipse das deformações

6º)

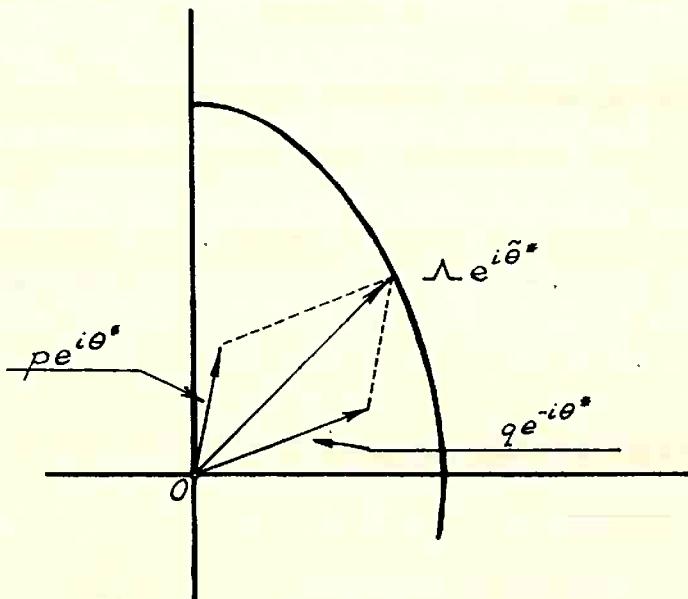


fig. 22

A equação (35) permite concluir que a elipse das deformações pode ser gerada mediante dois vectores girantes emitidos de um ponto fixo 0 e que giram em torno de 0 com velocidades angulares constantes e opostas (fig. 22).

7º) Com as (15), (16), (20), (22) e (37) obtemos os módulos principais de deformação linear, ou seja :

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{(P+S)^2 + (R-Q)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(P-S)^2 + (R+Q)^2} \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{(P+S)^2 + (R-Q)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{(P-S)^2 + (R+Q)^2}\end{aligned}\quad (43)$$

Com as (15), (16), (20) e (23) obtemos :

$$\tan \alpha = \frac{R-Q}{P+S}, \quad \tan \beta = \frac{R+Q}{P-S} \quad (44)$$

8º) Considerando, agora, as duas superfícies referidas às direções principais ( $x = X$ ) podemos nas (38) suprimir os asteriscos e obter

$$\tan \tilde{\theta} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \tan \theta, \quad (45)$$

que é a relação (44, 27).

A deformação angular é dada pela (44, 29) e a deformação angular máxima pela (44, 32) ou pela (44, 33).

A (44, 32) com as fórmulas deste parágrafo se escreve ainda :

$$\omega_0 = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} = \sqrt{\frac{(R-Q)^2 + (R+Q)^2}{(P+S)^2 + (P-S)^2}} \quad (46)$$

A deformação superficial (44, 35) pode ser definida pela seguinte razão de áreas

$$f = \frac{\text{indicatriz de Tissot}}{\text{circulo unidade}} = \frac{\pi \Lambda_1 \Lambda_2}{\pi} = \Lambda_1 \Lambda_2 \quad (47)$$

### § 46. REPRESENTAÇÃO CONFORME

Da teoria exposta no § 45, podemos obter todas as propriedades características da representação conforme já deduzidas no § 44.

De fato, a (45, 46), por exemplo, para deformação angular nula, nos dará

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad (1)$$

Assim, quando o vector girante (45, 6) descrever o círculo unidade, o seu vector girante correspondente (45, 35) não mais descreverá uma elipse, pois que da (45, 37) segue  $q = o$  e  $p = \lambda$ , mas sim um círculo de raio  $\lambda$ .

A correspondência entre êsses vectores poderá ser escrita

$$e^{i\theta} / \lambda e^{i\tilde{\theta}} \quad (2)$$

O módulo de deformação linear, e, portanto, as alterações de comprimentos são os mesmos para qualquer direção ( $\theta = \tilde{\theta}$ ) e dependem apenas do ponto.

Com as (45, 43) e as (1) obtemos :

$$P = S, \quad Q = -R \quad (3)$$

ou ainda, com as (45, 15) e (45, 16)

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{N \cos \phi}{M} = \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\frac{N \cos \phi}{M} = -\frac{\partial y}{\partial \phi} \quad (4)$$

Finalmente, com a (36, 23)

$$d\phi = -\frac{M}{N \cos \phi} d\lambda \quad (5)$$

segue o sistema de Cauchy-Riemann (44, 41) com todas as suas importantes consequências já nossas conhecidas.

A conclusão mais importante reside na possibilidade de definir a função analítica  $f$  de (44, 44) por um desenvolvimento, geralmente limitado, de uma série inteira imaginária.

Com as (3) nas (45, 15) e (45, 16), as (1) combinadas com as (45, 43) dão para o módulo de deformação linear, grandeza a mais importante da teoria da representação conforme,

$$\Lambda = \frac{1}{N} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} \quad (6)$$

ou ainda

$$\Lambda = \frac{1}{N \cos \varphi} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2} \quad (7)$$

O número dos sistemas conformes é, em princípio, infinito como vimos no § 44, "in fine".

Praticamente, o número das soluções simples é, ao contrário, muito limitado.

A restrição é obtida exigindo-se dos sistemas conformes duas características principais, a saber :

1º) Menor módulo de deformação linear, levando-se em conta a forma e a extensão do país a ser representado;

2º) Maior raio de curvatura das transformadas das linhas geodésicas do elipsóide.

Esses elementos variam para um sistema determinado :

a) com a posição da região considerada em relação aos elementos centrais do sistema (ponto central ou eixo da projeção) : um e outro crescem em geral rapidamente quando se afasta desses elementos centrais ;

b) com o comprimento do lado finito considerado.

A segunda característica, pequena curvatura da transformada permite tomar a corda pelo arco, principalmente para os topógrafos, agrimensores e artilheiros.

#### § 47. REPRESENTAÇÃO EQUIVALENTE

A utilização prática de um mapa pode exigir duas características principais, a saber :

- (i) conservar as áreas que se possam comparar em todo o mapa ;
- (ii) possuir pequeno erro de escala.

Num mapa do mundo, com essas características, u'a moeda colocada sobre a América do Sul cobrirá a mesma área que a mesma moeda colocada sobre a Groelândia, por exemplo.

Claro é que a conservação das áreas seria obtida a expensas de não conservar a exatidão da forma.

A representação de igual-área é útil, em particular, à Geografia política e à Geografia económica : mapa destinado a representar tal ou qual raça humana, tal ou qual religião, tal ou qual cultura sobre a superfície do globo, ou, pelo menos, de um continente.

A representação conhecida com o nome de SANSON - FLAMSTEED, ou de igual-área sinusoidal, tem sido preferida para os mapas da América do Sul e da África, por se adaptar bem à forma desses continentes.

Cumpre notar, todavia, que surgem diferenças sensíveis de concepção de um geógrafo para outro quanto à representação, em escala bastante reduzida de tal ou qual parte da terra.

Vamos focalizar, aqui, apenas a propriedade característica da representação de igual-área, ponto de partida para o seu estudo completo.

Se na (45, 47) tivermos

$$\Lambda_1 \Lambda_2 = 1 , \quad (1)$$

haverá, então, conservação das áreas, (sem conservação das formas), de duas figuras homólogas e a representação se diz equivalente ou de igual-área.

Com as (45, 43) a (1) se escreve

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} = 1 . \quad (2)$$

Com as (45, 15) e as (45, 16) a (2) será :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \lambda)} = MN \cos \varphi = a^2 \cdot \frac{(1-e^2)^2 \cos^2 \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^2} \quad (3)$$

onde, para abreviar, empregamos a notação usual de determinante funcional ou já cobriano.

Finalmente

$$\boxed{\frac{\partial(x, y)}{\partial(\mu, \lambda)} = a^2} , \quad (4)$$

onde

$$\mu = \frac{1}{2} (1 - e^2) \left( \frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right) . \quad (5)$$

## 5. SISTEMA UTM

### § 51. GENERALIDADES

Dentre os sistemas de representação conforme, um dos mais utilizados é o sistema de representação por fusos, dito : sistema de Gauss.

É conhecido frequentemente com o nome de sistema de Gauss-Krüger devido às fórmulas de transformação logarítmicas de Krüger. Os países anglo saxões empregam de preferência a denominação de Mercator - Transverse.

O Sistema U T M (Universal Transverse Mercator) é um sistema geral de representação por fusos de  $6^\circ$ , recomendado pela União Geodésica e Geofísica Internacional.

A partir de 1932 o Serviço Geográfico do Exército (hoje, Diretoria do Serviço Geográfico) adotou o sistema Mercator-Transverse, segundo fusos de  $3^\circ$  de amplitude, i.e.: 1 1/2 gráus para cada banda do meridiano central.

Esses fusos, em número de 16, tinham para eixos de referência o e-quadror, comum a todos, e os meridianos de longitude W. Gr.  $28^\circ 30'$ ,  $31^\circ 30'$ ,  $34^\circ 30'$ , etc. procedendo daí por diante de 3 em 3 gráus. Não era usado coeficiente de redução de escala, bem como não eram acrescidas constantes aos valores calculados das coordenadas dos pontos.

Dois nomes ilustres da Cartografia Nacional, o gen. Polli Coelho, da D.S.G., do Exército e o prof. Hugueney de Mattos da E.N.E.U.B. e do C.N.G., defendem a adoção de sistemas parciais (fusos) de  $6^\circ$  de amplitude, para substituir os de  $3^\circ$  e foi assim que, a partir de 1943, a D.S.G. passou, a adotar fusos tendo como meridianos centrais os meridianos de longitude W. Gr. múltiplos de  $6^\circ$  a saber:  $36^\circ$ ,  $42^\circ$ ,  $48^\circ$ , etc.. Para coeficiente de redução de escala foi tomado o número:

$$K_o = 1 - \frac{1}{1500} = 0,9993333 \dots$$

A questão da amplitude conveniente aos fusos deu margem a discussões, razão porque vamos emitir nosso parecer a respeito.

Tomemos em /7/ a fórmula usada pelo "Instituto Geográfico Militare Italiano"

$$\begin{aligned} \log (x - \delta') &= 2 \log \lambda'' + T_0 + T_2 + T_4 + \dots \\ \log y &= \log \lambda'' + T_1 + T_3 + T_5 + \dots \end{aligned}$$

Considerando valores de  $\lambda$  inferiores a  $2^\circ$  os últimos termos das duas séries, i.e., os termos  $T_4$  e  $T_5$ , são desprezíveis e com isto, considerando uma zona de superfície que se estende de  $1^\circ 30'$  para W. e  $1^\circ 30'$  para

E. do meridiano central, resultam fórmulas trinômias muito cômodas para o cálculo.

Cabia, portanto, razão à D.S.G., nos idos de 1932, ao adotar fusos de 3° de amplitude, pois economizava-se tempo sem prejuízo da precisão e atendia-se ao princípio de que a precisão suficiente é a exatidão da prática.

Mais tarde, o aperfeiçoamento das máquinas de calcular, com a consequente facilidade e rapidez na construção de tabelas numéricas, relegando até a segundo plano o cálculo logarítmico, impôs a adoção de fusos com maior amplitude. A rapidez do cálculo nada sofre e a redução do número de sistemas que o Brasil abrange faz sentir a grande vantagem.

Confirmado a decisão de 1943, a D.S.G. deu mais um exemplo de disciplina, agora científica, acolhendo, em secção de 6 de setembro de 1955, com simpatia e interesse, o sistema internacional de representação recomendado pela União Geodésica e Geofísica Internacional - o sistema U T M.

A Cartografia, no Brasil, é assunto palpitante neste momento. Em outubro de 1958 foi realizada a Primeira Reunião Brasileira de Consulta sobre Cartografia, em São Paulo, e em agosto próximo, deste ano de 1959, será realizada em Curitiba a Segunda Reunião Brasileira de Consulta sobre Cartografia. O nosso país necessita com urgência de uma rede de triangulação completa e de sua carta elaborada no sistema U T M.

O seguinte extrato é da citada Primeira Reunião:

Considerando a conveniência de padronização das cartas terrestres, já obtidas nas cartas náuticas e aeronáuticas;

Considerando as recomendações da União Geodésica e Geofísica Internacional e do Instituto Pan-Americano de Geografia e História, já adotadas por diversos países, inclusive o Brasil, por iniciativas da Diretoria do Serviço Geográfico do Exército, do Conselho Nacional de Geografia e do Instituto Geográfico e Geológico do Estado de São Paulo.

Considerando a inconveniência de ser uma planta regional localizada em

dois fusos do sistema U T M ou, mesmo, muito afastada do meridiano central do fuso;

Considerando a possibilidade de adaptações conformes de uma projeção sobre outra, com a precisão que se desejar;

**RECOMENDA :**

Tôdas as organizações que realizam trabalhos sistemáticos de mapeamento, em escala, de 1: 250 000 ou maiores, adotem o sistema U T M de projeção e quadriculagem, recomendado pela União Geodésica Internacional e pelo Instituto Pan Americano de Geografia e História, embora, na elaboração de uma plana regional possa ser adotado um sistema de representação conforme que melhor se adapte à região. As coordenadas dos vértices de triangulações de 1<sup>a</sup>. e 2<sup>a</sup>. ordens que servirem de base a tais plantas sejam publicadas no sistema escolhido e no U T M.

**§ 52. ESPECIFICAÇÕES DO SISTEMA U T M**

São as seguintes as especificações do sistema Universal Transverse Mercator :

a) representação conforme de Gauss ;

b) decomposição em sistemas parciais, correspondentes aos fusos ou zonas de 6° de amplitude, limitados pelos meridianos múltiplos desse valor.

Os fusos coïcidem em princípio com aqueles da Carta Internacional ao Milionésimo ;

c) limitação dos sistemas até as latitudes de 80° ; para as calotas polares recomenda-se a representação estereográfica ;

d) adoção do elipsóide internacional para a América do Sul, a Europa, a China e a Austrália;

e) coeficiente de redução de escala

$$K_o = 0,9996 \quad . \quad (1)$$

f) origem das coordenadas, em cada sistema, no cruzamento do equador com o meridiano central, acrescidas as constantes 10 milhões de metros (só para o hemisfério sul) e 500 000 metros. Não são usadas as letras X ou Y para indicação das coordenadas; acrescenta-se a letra N ou a letra E ao valor numérico, sem sinal, da coordenada, significando para norte ou para este.

g) numeração dos fusos (ou zonas) segundo o critério adotado para a Carta Internacional ao Milionésimo, isto é, de 1 a 60, a contar do antimeridiano de Greenwich, para este. A figura 23, extraída de /33/, que, por sua vez

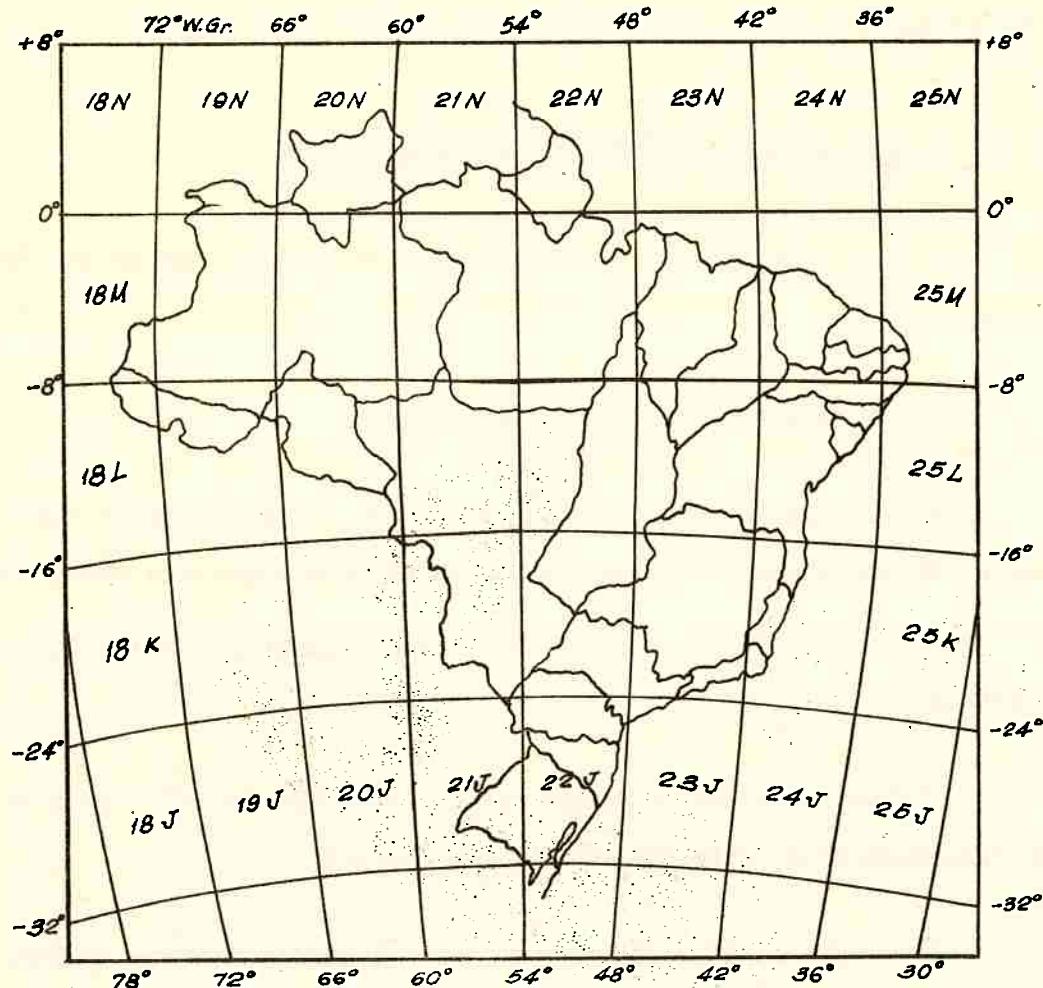


fig. 23

a reproduz do artigo "O sistema U T M e a quadricula universal das cartas militares", do ten. cel. Luiz Abreu, Anuário 1951 - 1952 da D S G, mostra a numeração dos fusos, ou zonas, que abrangem território brasileiro, isto é, do 18 ao 25.

### § 53 EQUAÇÕES DA CARTA

Apoiados na conclusão do § 44 partimos da função analítica (44, 44) :

$$x + i y = f(\lambda + i \lambda) . \quad (1)$$

Ora, as funções analíticas gozam da propriedade característica seguinte : Se  $f(z)$  é uma função analítica em um certo domínio  $D$ , então existe sempre uma, e sómente uma, série de potências.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(z_0) (z - z_0)^r , \quad (2)$$

que é convergente em uma certa vizinhança de  $z_0$  e nela representa a função  $f(z)$ ; o círculo de convergência sendo o maior dos círculos de centro  $z_0$  em cujos pontos, sem exceção,  $f(z)$  é contínua e diferenciável. (Desenvolvimento de Taylor).

Este teorema, aplicado à função (1), em uma vizinhança do ponto  $(\lambda, 0) = (\lambda, 0)$ , após separação do real do imaginário, dá :

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} f^{(2)}(\lambda) + \frac{\lambda^4}{24} f^{(4)}(\lambda) - \frac{\lambda^6}{720} f^{(6)}(\lambda) + \dots \\ y &= \lambda f^{(1)}(\lambda) - \frac{\lambda^3}{6} f^{(3)}(\lambda) + \frac{\lambda^5}{120} f^{(5)}(\lambda) - \frac{\lambda^7}{5040} f^{(7)}(\lambda) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

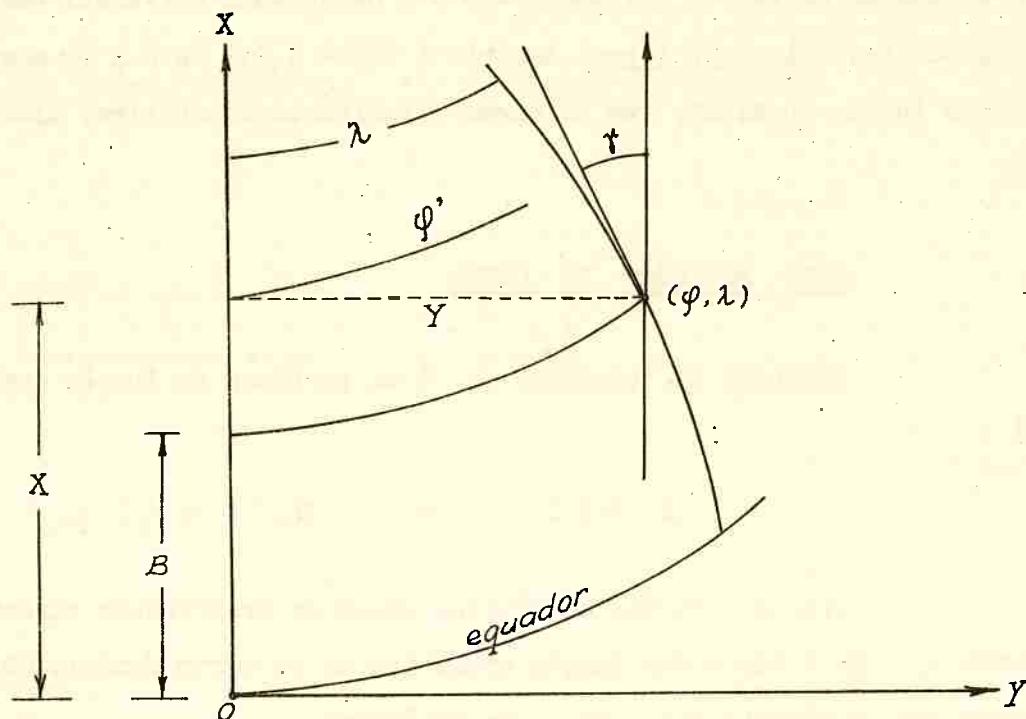


fig. 24

As equações (3) se prestam bem à representação do fuso de  $6^\circ$ ,  $3^\circ$  para E. e  $3^\circ$  para W. do meridiano central. De fato, para  $\lambda \approx 1/20$  rd  $\approx 10000''$ , o termo de segunda ordem valerá  $1/400$  rd  $\approx 500''$ ; o termo de sexta ordem  $1/64000000$  rd  $\approx 0,003''$  e aquêle de sétima ordem  $1/1280000000$   $\approx 0,00015''$ .

A partir do princípio : representar os comprimentos sem deformação sobre o meridiano central do fuso, considerado como meridiano origem, teremos sóbre esse meridiano : (fig. 24).

$$x = f(\lambda) = B [\varphi(\lambda)] = \int dm = - \int M d\varphi; \quad y = 0. \quad (4)$$

Para as derivadas sucessivas teremos :

$$f^{(r)}(\lambda) = \frac{d^r B}{d\lambda^r} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d^{r-1} B}{d\lambda^{r-1}} \right) \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (5)$$

$$(r = 1, 2, \dots)$$

As (46, 5) e (4) com as (36, 19) dão :

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{v^2}{r} \cos \varphi, \quad \frac{dB}{d\lambda} = \frac{c}{v} \cos \varphi \quad (6)$$

Façamos :

$t = \tan \varphi$	$n = e' \cos \varphi$
--------------------	-----------------------

(7)

de onde :

$$\frac{dt}{d\varphi} = 1 + t^2; \quad \frac{d}{d\varphi} n^r = - r n^r t \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{v}{r} = - \frac{n^2 t}{v}; \quad \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{v} = \frac{n^2 t}{v^3} \quad (9)$$

Com estas relações obtemos facilmente as derivadas sucessivas (5), a saber :

$$f^{(1)} = N \cos \varphi$$

$$f^{(2)} = - N \cos \varphi \sin \varphi$$

$$f^{(3)} = - N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + n^2)$$

$$f^{(4)} = N \cos^3 \varphi \sin \varphi (5 - t^2 + 9 n^2 + 4 n^4)$$

$$f^{(5)} = N \cos^5 \varphi (5 - 18 t^2 + t^4 + 14 n^2 - 58 n^2 t^2 + \dots)$$

$$f^{(6)} = - N \cos^5 \varphi \sin \varphi (61 - 58 t^2 + t^4 + \dots)$$

As equações da carta (3) tomarão a forma :

$x^* = (I) + (II)p^2 + (III)p^4 + A_6$
--

(10)

$y^* = (IV)p + (V)p^3 + B_5$
------------------------------

onde :

$$p = 10^{-4} \lambda''$$

(11)

Com

- 15

$$\text{arc } l'' = 10.4848136811; \log \text{arc } l'' = 6,6855748668$$

$$\rho = \rho'' = 2062648062471; \log \rho'' = 5,3144251332,$$

e a introdução do coeficiente de redução de escala (52, 1) :  $K_o = 0,9996$ , tere-mos :

$$(I) = K_o B$$

$$(II) = K_o \cdot 10^8 \cdot \frac{N}{2} \cdot \cos \varphi \sin \varphi$$

$$(III) = K_o \cdot 10^{16} \cdot \frac{N}{24} \cdot \cos^3 \varphi \sin \varphi [5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4]$$

$$(IV) = K_o \cdot 10^4 \cdot \frac{N}{\rho} \cos \varphi$$

$$(V) = K_o \cdot 10^{12} \cdot \frac{N}{6} \cdot \cos^3 \varphi [1 - t^2 + n^2]$$

$$B_5 = K_o \cdot 10^{20} \cdot \frac{N}{120\rho^5} \cos^3 \varphi [5 - 18t^2 + t^4 + 14n^2 - 58n^2t^2 + \dots] p^5$$

$$A_6 = K_o \cdot 10^{24} \cdot \frac{N}{720\rho^6} \cos^5 \varphi \sin \varphi [61 - 58t^2 + t^4 + 270n^2 - 330n^2t^2 + \dots] p^6$$

Para o cálculo final à máquina as (10) devem ser escritas sob a forma :

$$x' = [(III)p^2 + (II)] p^2 + (I) + A_6$$

(12)

$$y' = [(V) p^2 + (IV)] p + B_5 .$$

Notas:-

a) Para o cálculo logarítmico recomendamos o excelente trabalho /23/ do prof. Hugueney de Mattos;

b) Os termos (!) e (!!) em  $B_5$  e  $A_6$  são :

$$(!) = 13 n^4 - 64 n^4 t^2 + 4 n^6 - 24 n^6 t^2 ;$$

$$(!! ) = 445 n^4 - 680 n^4 t^2 + 326 n^6 - 600 n^6 t^2 + 88 n^8 - 192 n^8 t^2 .$$

c) Para o cálculo direto do arco de meridiano B, a partir do e-quadror, pode ser utilizada a expressão seguinte, preparada para o elipsóide internacional :

$$\begin{aligned} B &= 111136,5366554 \cdot \varphi^\circ \\ &- 16107,03468 \cdot \sin 2\varphi \\ &+ 16,97621 \cdot \sin 4\varphi \\ &- 0,02227 \cdot \sin 6\varphi \\ &+ 0,00003 \cdot \sin 8\varphi \end{aligned}$$

d) Para facilitar a pesquisa mais aturada e precisa dos valores desprezados podemos escrever :

$$B_5^* = B_5 + (?), \quad A_6^* = A_6 + (??), \quad (13)$$

onde :

$$\begin{aligned} (?) &= K_0 \cdot 10^{28} \cdot \frac{N}{5040 \varphi^7} \cdot \cos^7 \varphi [61 - 479 t^2 + 179 t^4 - t^6 + \\ &+ 331 n^2 - 3298 n^2 t^2 + 1771 n^2 t^4 + 715 n^4 - 8655 n^4 t^2 + \\ &+ 6080 n^4 t^4 + 769 n^6 - 10964 n^6 t^2 + 9480 n^6 t^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 412 n^8 - 6760 n^8 t^2 + 6912 n^8 t^4 + 88 n^{10} - 1632 n^{10} t^2 \\
 & + 1920 n^{10} t^4 ] p^7 + \\
 & k_o \cdot 10^{36} \frac{N}{322880 \rho^9} \cdot \cos^9 \varphi [ 1385 - 19028 t^2 + 18270 t^4 - \\
 & - 1636 t^6 + t^8 + \underline{\text{termos em } n} ] p^9.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (??) = & k_o \cdot 10^{32} \cdot \frac{N}{40320 \rho^8} \cos^7 \varphi \sin \varphi [ 1385 - 3111 t^2 + 543 t^4 - \\
 & - t^6 + \underline{\text{termos em } n} ] p^7.
 \end{aligned}$$

Vamos estudar, agora, a inversão das equações da carta : dada as coordenadas  $X, Y$  de um ponto do plano determinar as coordenadas  $\varphi, \lambda$  do ponto elipsóidico correspondente.

Partimos da função analítica inversa da (1)

$$\mathcal{A} + i \lambda = g(X + i Y), \quad (14)$$

contínua e diferenciável na vizinhança do ponto  $X, Y = 0$ .

Designemos por  $\varphi'$  a latitude correspondente a um arco de meridiano no contado a partir do equador e que seria igual a  $X$ . Este valor é obtido por interpolação inversa na tábua dos elementos do elipsóide, que dá diretamente os arcos  $B$  em função de  $\varphi$ .

O desenvolvimento (3) será aqui :

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{A} &= g(X) - \frac{Y^2}{2} g''(X) + \frac{Y^4}{24} g^{(4)}(X) - \frac{Y^6}{720} g^{(6)}(X) + \dots \\
 \lambda &= Y g'(X) - \frac{Y^3}{6} g^{(3)}(X) + \frac{Y^5}{120} g^{(5)}(X) - \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

e sobre o meridiano considerado teremos :

$$\mathcal{A} = g(X) = \mathcal{A}' [\varphi(m)] = \mathcal{A}' [\varphi(B)] ; \lambda = 0 \quad (16)$$

As derivadas sucessivas serão

$$g^{(r)}(B) = \frac{d^r \mathcal{L}}{d B^r} = \frac{d}{d \phi} \left( \frac{d^{r-1} \mathcal{L}}{d B^{r-1}} \right) \frac{d \phi}{d B} \quad (17)$$

Com a inversão das (6) procedemos como anteriormente para o cálculo das derivadas sucessivas e obtemos : (subtendendo-se as plicas).

$$g^{(1)} = \frac{1}{N \cos \phi}$$

$$g^{(2)} = \frac{1}{N^2 \cos \phi} t$$

$$g^{(3)} = \frac{1}{N^3 \cos \phi} (1 + 2 t^2 + n^2)$$

$$g^{(4)} = \frac{1}{N^4 \cos \phi} t (5 + 6 t^2 + n^2 - 4 n^4)$$

$$g^{(5)} = \frac{1}{N^5 \cos \phi} (5 + 28 t^2 + 24 t^4 + 6 n^2 + 8 n^2 t^2 + !)$$

$$g^{(6)} = \frac{1}{N^6 \cos \phi} t (61 + 180 t^2 + 120 t^4 + !!),$$

onde os termos desprezados são :

$$(!) = 4 n^4 t^2 - 3 n^4 + \dots$$

$$(!!) = 48 n^2 t^2 + 56 n^2 + \dots$$

As equações inversas da carta tomarão a forma :

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}' = (\text{VII}^*) q^2 - (\text{VIII}^*) q^4 + D_6^*$$

(18)

$$\lambda = (\text{IX}) q - (\text{X}) q^3 + E_5$$

onde

$$q = 10^{-6} Y' = 10^{-6} Y K_0$$

(19)

$$(VII^*) = \frac{P \cdot 10^{12}}{2 K_0 N^{12} \cos \varphi} t'$$

$$(VIII^*) = \frac{P \cdot 10^{24}}{24 K_0^4 N^{14} \cos \varphi} t' (5 + 6 t'^2 + n'^2 - 4 n'^4)$$

$$(IX) = \frac{P \cdot 10^6}{K_0 N^4 \cos \varphi}$$

$$(X) = \frac{P \cdot 10^{18}}{6 K_0^3 N^3 \cos \varphi} (1 + 2 t'^2 + n'^2)$$

$$E_5 = \frac{P \cdot 10^{30} \cdot q^5}{120 K_0^5 N^5 \cos \varphi} (5 + 28 t'^2 + 24 t'^4 + 6 n'^2 + 8 n'^2 t'^2)$$

$$D_6^* = \frac{P \cdot 10^{36} \cdot q^6}{720 K_0^6 N^6 \cos \varphi} t' (61 + 180 t'^2 + 120 t'^4),$$

Devemos considerar agora dois casos segundo dispomos ou não dispomos de tábuas de latitudes isométricas.

### 1º Caso

- (i) Obtido  $\varphi'$ , com  $X'$  como argumento, a tábuas nos dará  $\lambda$ ;
- (ii) Com as (18) calcularemos  $\lambda$  e  $\lambda$ ;
- (iii) Com  $\lambda$  obtemos  $\varphi$  mediante uma interpolação inversa nas tábuas.

## 2º) Caso

Tomemos o desenvolvimento em série fazendo intervir o argumento médio  $(x_0 + \frac{h}{2})$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f = hf' \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) + \frac{h^3}{24} f''' \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) + \dots \quad (20)$$

que, para a latitude  $\phi$ , limitado ao primeiro termo, e tendo em vista a primeira das (6), se escreve

$$\Delta \phi = \Delta \lambda \left( \frac{d \phi}{d \lambda} \right) = \Delta \lambda [v^2 \cos \phi] \frac{\phi + \phi'}{2} \quad (21)$$

lembrando que

$$\Delta \phi = \phi' - \phi, \quad (22)$$

$\phi$  sendo a latitude procurada e  $\phi'$  a latitude conhecida correspondente a um arco de meridiano de comprimento  $X$  contado a partir do equador.

Somos forçados a calcular o fator corretivo mediante duas aproximações sucessivas, a primeira efetuada a partir do único valor conhecido que é  $\phi'$ :

$$\Delta \phi_1 \cdot \text{arc } 1'' = [(VII^*) q^2 - (VIII^*) q^4 + D_6^*] v'^2 \cos \phi', \quad (23)$$

visto ser

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda' = \phi' - \phi, \quad (24)$$

dado pela primeira das (25).

Conhecido  $\Delta \phi_1 = \phi' - \phi_1$  podemos introduzir o argumento médio  $\frac{\phi' + \phi_1}{2} = \phi' - \frac{\Delta \phi_1}{2}$ . Podemos escrever agora

$$\Delta \phi = \Delta \lambda_1 [v^2 \cos \phi]_m = \Delta \phi_1 \cdot \frac{\frac{v_m^2}{2} \cos \frac{\phi_m}{2}}{v' \cos \phi'} \quad (25)$$

Ora

$$\cos \phi_m \approx \cos \phi' + \frac{\Delta \phi_1}{2} \sin \phi' ; \quad v_m^2 \approx (1 + e'^2 \cos^2 \phi') \left( 1 + \frac{\Delta \phi_1}{2} e'^2 \sin 2\phi' \right)$$

e assim

$$\Delta \phi = \Delta \phi_1 \left[ 1 + \frac{\Delta \phi_1}{2} \tan \phi' \right] \left[ 1 + \frac{\Delta \phi_1}{2} e'^2 \sin 2\phi' \right], \quad (26)$$

que se transforma, finalmente, em

$$\Delta \phi \approx \Delta \phi_1 \left[ 1 + \frac{\Delta \phi_1 \operatorname{arc} l'' v^4 \tan \phi'}{2} \right]. \quad (27)$$

Substituindo  $\Delta \phi_1$  pela sua expressão (23), efetuando os produtos e ordenando-os segundo as potências crescentes de  $q$  encontraremos a expressão final da forma

$\phi = \phi' - (\text{VII}) q^2 + (\text{VIII}) q^4 + D_6$

(28)

onde :

$$(\text{VII}) = \frac{\rho \cdot 10^{12}}{2K_0^2 N^2} t' (1 + n'^2)$$

$$(\text{VIII}) = \frac{\rho \cdot 10^{24}}{24K_0^4 N^4} t' (5 + 3 t'^2 + 6 n'^2 t'^2 - 3 n'^4 - 9 n'^2 \sin \phi')$$

$$D_6 = \frac{\rho \cdot 10^{36} q^6}{720 K_0^6 N^6} t' (61 + 90 t'^2 + 45 t'^4 + 107 n'^2 - 162 n'^2 t'^2 - 45 n'^2 t'^4).$$

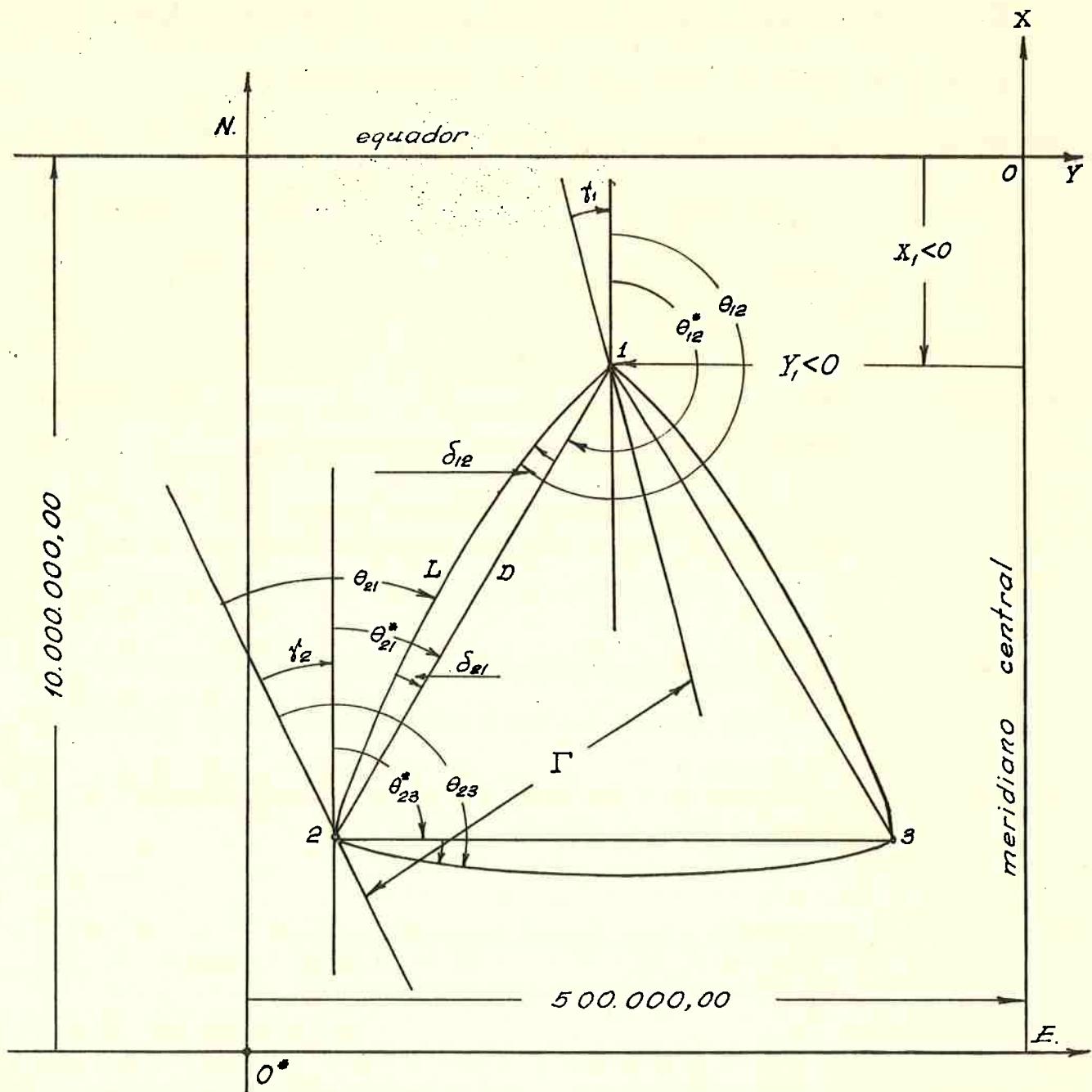
§ 54. TEORIA DAS CORREÇÕES.

fig. 25

Sejam: (fig. 25)

$l_2 - l$  = comprimento de um arco de geodésica, que se confunde com um segmento de secção normal, sobre o elipsóide;

$\bar{l}_2 - L$  = comprimento da transformada plana do arco de geodésica;

$\bar{l}_2 - D$  = comprimento da corda da transformada plana;

$\theta$  = azimute norte do arco de geodésica;

$\theta^*$  = azimute plano da corda (francês: "gisement" ; inglês: bearing ... ; italiano: angolo di direzione ... ; espanhol: situación).

Não deve ser confundido com o "azimute geodésico projetado", que abolimos para sempre e nem denominado "orientação", em virtude da significação matemática mais geral deste termo. Si azimute plano não convier, sugerimos uma qualquer das denominações: "anomalia" , "situação" ou "ângulo - polar" ;

$\gamma$  = convergência plana no ponto, i.e., ângulo que a paralela ao meridiano central faz com a tangente ao meridiano que passa pelo ponto.

A figura mostra a relação

$$\theta^* + \delta = \theta + \gamma, \quad (1)$$

deverendo a convergência plana  $\gamma$  tomar o sinal + quando o semi-eixo norte do reticulado jazer a W. do meridiano elipsoidal projetado e - no caso contrário. Para o caso da figura 25, portanto,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  devem entrar na (1) precedidos do sinal menos.

$\delta$  = redução angular, i.e., ângulo formado pela tangente à transformada plana com a corda. O seu sinal decorre da (1) e para evitar equívocos podemos formular a seguinte regra: se no sentido azimutal N.-E. encontrarmos primeiro a corda (e depois a transformada) o  $\delta$  é positivo; se, ao contrário, encontrarmos primeiro a transformada (e depois a corda) o  $\delta$  é negativo.

$\Gamma$  = convergência dos meridianos elipsóidicos.

Da figura 25 concluimos:

$$\theta_{12}^* + |\delta_{12}| = \theta_{12} + r_1 \quad \text{e} \quad \theta_{12}^* - 180^\circ - |\delta_{21}| = \theta_{21} + r_2 \quad (2)$$

A convergência dos meridianos elipsóidicos que passam pelas extremidades da geodésica é dada pela diferença

$$\boxed{\Gamma = \theta_{21} - \theta_{12}}, \quad (3)$$

e, pelas (2)

$$\boxed{\Gamma = (r_1 - r_2) - (|\delta_{12}| + |\delta_{21}|) - 180^\circ} \quad (4)$$

Resultado da máxima importância para a Geodésia.

a) Cálculo da curvatura da transformada plana de uma linha geodésica.

Tratemos, inicialmente, o problema geral, i.e., C é uma linha qualquer sobre  $\Sigma$  e  $\tilde{C}$  a sua transformada conforme sobre  $\tilde{\Sigma}$ . Nas expressões (24, 11) das curvaturas geodésicas  $g$  e  $\tilde{g}$  será, então,  $d\theta = d\tilde{\theta}$ , resultando, com a introdução do módulo de deformação linear  $\Lambda$  a relação

$$\tilde{g} = \frac{1}{\Lambda} g - \frac{w_3 - \tilde{w}_3}{w} . \quad (5)$$

Escrevendo, agora, a (34, 40) para  $w_3$  e  $\tilde{w}_3$  e notando que por ser

$$\Lambda = \frac{q}{\tilde{q}} = \frac{\tilde{w}^1}{w^1} = \frac{\tilde{w}^2}{w^2} , \quad (6)$$

seguem das (13, 4) e (13, 3)

$$(\ln \tilde{q})_1 = \frac{1}{\Lambda} (\ln \tilde{q})_1 , \quad (\ln \tilde{q})_2 = \frac{1}{\Lambda} (\ln \tilde{q})_2 , \quad (7)$$

obtemos

$$\frac{w_3 - \tilde{w}_3}{w} = - (\ln \Lambda)_1 \frac{w^2}{\tilde{w}} + (\ln \Lambda)_2 \frac{w^1}{\tilde{w}} \quad (8)$$

Segundo o que vimos no § 33 o numerador da (8) é a componente do grad  $(\ln \Lambda)$  na direção da normal à linha. Então

$$\tilde{g} = \frac{1}{\Lambda} g - \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial n} , \quad (9)$$

n significa aqui a direção normal à linha  $C$ , obtida com um giro de  $90^\circ$  do vetor tangente.

Se  $C$  é uma geodésica, então  $g = 0$  e a (9) dá para a curvatura geodésica ou curvatura ordinária de sua transformada plana conforme.

$$k = - \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial n} = - \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial n} \quad (10)$$

Esta fórmula, de extrema importância na teoria da representação conforme, foi estabelecida pela primeira vez, por Schols em 1886 (Annales de l' Ecole Polytechnique de Delft).

Introduzindo o azimute plano mediante as (22, 22) e tendo em vista as (6) e as (34, 39), a (10), através (8) se escreve

$$k = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cos \theta \right) = \frac{d\theta^*}{ds} \quad (11)$$

b) Cálculo do comprimento da corda transformada plana.

Para uma linha plana ( $t = 0$ ) a (25, 4) se escreve :

$$P(s) = P_1 + s A_1^* + \frac{s^2}{2!} k A_2^* + \frac{s^3}{3!} \left( -k A_1^* + k A_2^* \right) + \dots + \frac{s^4}{4!} \left[ -3 k' k A_1^* + (k'' - k^3) A_2^* \right] + \dots \quad (12)$$

Para o comprimento  $D$  da corda teremos

$$D = \sqrt{[P(L) - P(0)]^2} \quad (13)$$

com

$$P(L) - P(0) = \left( L - \frac{1}{6} k^2 L^3 - \frac{1}{8} k k' L^4 + \dots \right) A_1^* + \left( \frac{1}{2} k L^2 + \frac{1}{6} k' L^3 - \frac{1}{24} [k^3 - k''] L^4 + \dots \right) A_2^* \quad (14)$$

Logo

$$D = L - \frac{1}{24} k^2 L^3 - \frac{1}{24} k k' L^4 + \dots$$

(15)

Podemos, nesta fórmula, substituir o valor  $k_1$  pelo valor  $k_{1/2}$

da curvatura que corresponderia ao ponto situado no meio de  $\tilde{P}_1 \tilde{P}_2$

$$k_{(1/2)} = k + \frac{1}{2} k' L + \dots \quad (16)$$

A substituição dá, após o desaparecimento dos termos em  $L^4$

$$D = L - \frac{1}{24} \left[ k_{(1/2)} \right]^2 L^3 + \text{termos em } L^5 \quad (17)$$

c) Calculo do ângulo  $\delta_0$  entre a tangente à transformada e a corda.

Ele pode ser deduzido mediante o produto vectorial

$$\sin \delta_0 = \frac{1}{D} \left| \begin{smallmatrix} A_1^* (0) & \times & [P(L) - P(0)] \end{smallmatrix} \right| \quad (18)$$

onde, da (15)

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{L} \left( 1 + \frac{1}{24} k^2 L^2 + \frac{1}{24} k k' L^3 + \dots \right) \quad (19)$$

Com isto será, após os cálculos efetuados

$$\sin \delta_0 = \frac{1}{2} k L + \frac{1}{6} k' L^2 + \frac{1}{24} \left( k'' - \frac{1}{2} k^3 \right) L^3 + \dots \quad (20)$$

lembando sempre que todos os coeficientes das potências de L devem ser tomados no ponto  $\tilde{P}_1$ .

Ora

$$\delta_0 = \sin^{-1} \sin \delta_0 = \sin \delta_0 + \frac{1}{6} \sin^3 \delta_0 + \frac{3}{40} \sin^5 \delta_0 + \dots, \quad (21)$$

com o que obtemos finalmente

$$\delta_0 = \frac{1}{2} k L + \frac{1}{6} k' L^2 + \frac{1}{24} k'' L^3 + \dots \quad (22)$$

Podemos, nesta fórmula, substituir o valor  $k$  pelo valor  $k_{(1/3)}$  da curvatura que corresponderia a um ponto situado no primeiro terço do elemento  $\tilde{P}_1 \tilde{P}_2$

$$k_{(1/3)} = k + \frac{1}{3} k' L + \frac{1}{18} k'' L^2 + \dots \quad (23)$$

A substituição dá

$$\delta_0 = \frac{1}{2} k_{(1/3)} L + \frac{1}{72} k'' L^3 + \dots \quad (24)$$

Na grande maioria dos problemas é suficiente tomar

$$\delta_0 \approx \delta = \frac{1}{2} k_{(1/3)} L. \quad (25)$$

Uma vez que a grandeza conhecida diretamente não é  $L$ , mas sim  $l$  ou  $D$ , devemos exprimir  $L$  por meio de  $l$  ou  $D$ .

Mediante o método dos coeficientes indeterminados segue da (15)

$$L = D + \frac{1}{24} k^2 D^3 + \dots$$

(26)

Quanto a  $L$  em função de  $l$ , se  $ds$  é o elemento linear do elipsóide e  $d\tilde{s} = ds$  o elemento linear do plano, teremos :

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^L \frac{1}{\lambda} ds = \int_0^L \left[ \frac{1}{\lambda} + \left( \frac{1}{\lambda} \right)' s + \left( \frac{1}{\lambda} \right)^{''} \frac{s^2}{2} + \dots \right] ds \\
 &= \frac{1}{\lambda} L + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} \right)' L^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^{''} L^3 + \dots \\
 &= \frac{1}{\lambda} L - \frac{1}{2} \frac{\lambda'}{\lambda^2} L^2 - \frac{1}{6} \frac{\lambda \lambda'' - \lambda'^2}{\lambda^3} L^3 + \dots \quad (27)
 \end{aligned}$$

Daqui resulta:

$$L = \lambda l + \frac{1}{2} \lambda \lambda' l^2 + \frac{1}{6} (\lambda^2 \lambda'' + \lambda \lambda'^2) l^3 + \dots \quad (28)$$

e

$$l = \frac{1}{\lambda} L - \frac{1}{2} \frac{\lambda'}{\lambda^2} L^2 - \frac{1}{6} \frac{\lambda \lambda'' - \lambda'^2}{\lambda^3} L^3 + \dots \quad (29)$$

As fórmulas anteriores exigem o cálculo das grandezas

$$k, k', k'', \dots \quad e \quad \lambda, \lambda', \lambda'',$$

onde as plicas indicam derivação em relação ao comprimento  $S$  do arco da transformada plana de nossa linha geodésica.

Ora, se  $f$  é um campo escalar qualquer com significação ao longo de  $S$ , então

$$df = f \tilde{w}^1 + f \tilde{w}^2 = f_1 ds \cos \theta^* + f_2 ds \sin \theta^*, \quad (30)$$

ou em notação clássica

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta^* + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta^*. \quad (31)$$

Para as derivadas sucessivas devemos conhecer também  $\frac{d\theta^*}{ds}$ , cujo valor temos em (11), i. é.

$$\frac{d\theta^*}{ds} = k = \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \sin \theta^* - \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \cos \theta^* \right). \quad (32)$$

Teremos:

$$\begin{aligned} \Lambda' &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \cos \theta^* + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \sin \theta^* \\ \Lambda'' &= \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} \cos^2 \theta^* + 2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} \sin \theta^* \cos \theta^* + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} \sin^2 \theta^* \\ &= \frac{1}{\Lambda} \left[ \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \right)^2 \sin^2 \theta^* - 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \sin \theta^* \cos \theta^* + \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right)^2 \cos^2 \theta^* \right] \end{aligned} \quad (33)$$

A conclusão importante é que todas as propriedades podem ser expressas em termos do módulo de deformação linear e de suas derivadas.

### § 55 CONVERGÊNCIA PLANA.

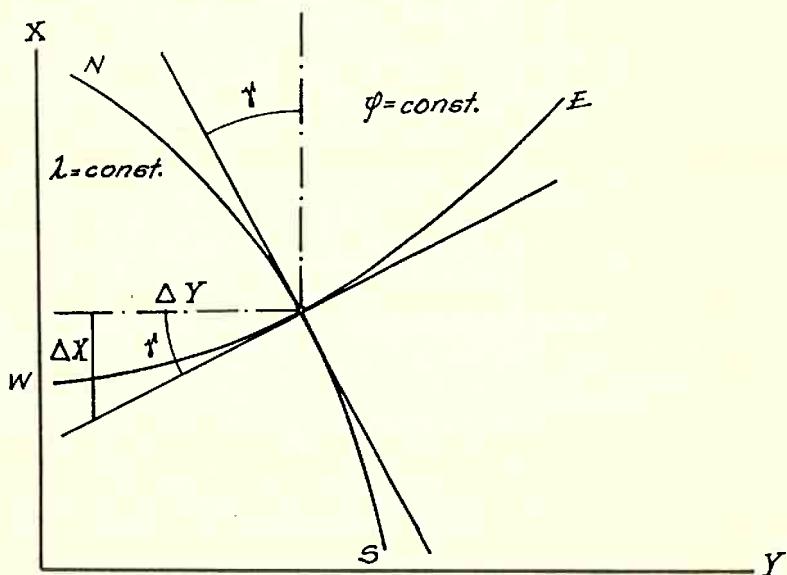


fig. 26

Para  $\lambda = \text{const.}$  as equações gerais da representação nos dão as equações paramétricas do meridiano:

$$x = x(\varphi), \quad y = y(\varphi). \quad (1)$$

Analogamente, para  $\varphi = \text{const.}$  teremos as trajetórias ortogonais dos meridianos, i. e., as equações paramétricas dos paralelos:

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda). \quad (2)$$

A convergência plana, em um certo ponto, é o ângulo entre a transformada plana do meridiano e a linha norte do reticulado que por ela passa. Teremos (fig. 26):

$$\tan \gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{d\lambda}}{\frac{dy}{d\lambda}} = \frac{\frac{d\lambda}{d\varphi}}{\frac{d\varphi}{d\lambda}}. \quad (3)$$

Com a derivação das equações da carta obtemos:

$$\frac{dx}{d\lambda} = \lambda N \cos \varphi \sin \varphi \left[ 1 + (3) \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{6} + (a) \frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{120} \right] \quad (4)$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = N \cos \varphi \left[ 1 + (5) \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2} + (b) \frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{24} \right]. \quad (5)$$

onde (3), (a), (5), (b) são, respectivamente, os coeficientes em t e n que figuram nas funções (III),  $A_6$ , (V),  $B_5$ .

Segue, agora, da (3) e das (4) e (5) que

$$\tan \varphi = \lambda \sin \varphi \left\{ 1 + [ (3) - 3(5) ] \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{6} + \right. \\ \left. + [ (a) - 5(b) - 10(3)(5) + 30(5)^2 ] \frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{120} \right\}. \quad (6)$$

Efetuando as operações indicadas sobre os citados coeficientes, com abandono dos termos em  $n$  no coeficiente de  $\lambda^5$ , encontramos

$$\tan \varphi = \lambda \sin \varphi \left[ 1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{3} (1 + t^2 + 3n^2 + 2n^4) + \frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{15} (2 + 4t^2 + 2t^4) \right]. \quad (7)$$

Se fizermos  $\varphi = \tan^{-1} x$  no desenvolvimento

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad (8)$$

resulta

$$\varphi = \tan^{-1} x = \frac{1}{3} \tan^3 \varphi + \frac{1}{5} \tan^5 \varphi - \dots. \quad (9)$$

Mas :

$$-\frac{1}{3} \tan^3 \varphi = \lambda \sin \varphi \left[ -\frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{3} \cdot t^2 - \frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{15} \cdot 5t^2(1+t^2) \right] \quad (10)$$

$$+\frac{1}{5} \tan^5 \varphi = \lambda \sin \varphi \left[ -\frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{15} \cdot 3t^4 \right] \quad (11)$$

Finalmente, a (9) dá

$$\varphi = \lambda \sin \varphi \left[ 1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{3} (1 + 3n^2 + 2n^4) + \frac{\lambda^4 \cos^4 \varphi}{15} (2 - t^2) \right] \quad (12)$$

ou ainda :

$$t'' = [(XII) + (XIII) p^2] p + c_5 \quad (13)$$

onde :

$$p = 10^{-4} \cdot \lambda$$

$$(XII) = 10^4 \cdot \sin \varphi$$

$$(XIII) = \frac{10^{12}}{3p^2} \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3n^2 + 2n^4)$$

$$c_5 = \frac{10^{20}}{15p^4} \cdot \sin \varphi \cdot \cos^4 \varphi (2 - t^2) \cdot p^5$$

Para a Geodésia é mais interessante a expressão da convergência plana em função da abscissa  $Y$ .

Para  $\lambda = \text{const.}$  temos igualmente as equações paramétricas dos paralelos e da equação

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{dX} dX + \frac{d\lambda}{dY} dY = 0, \quad (14)$$

junto com as (3) e as equações de Cauchy-Riemann, resulta :

$$\tan \lambda = \frac{dX}{dY} = - \frac{\frac{dY}{d\lambda}}{\frac{dX}{d\lambda}} = - \frac{dY}{dX} \quad (15)$$

Com a derivação das equações inversas da carta obtemos :

$$-\frac{d\beta}{dy} = y g^{(2)} - \frac{y^3}{6} g^{(4)} + \frac{y^5}{120} g^{(6)} \quad (16)$$

$$\frac{d\lambda}{dy} = g^{(1)} - \frac{y^2}{2} g^{(3)} + \frac{y^4}{24} g^{(5)} \quad (17)$$

Efetuando a divisão resulta

$$\tan \beta = AY + \frac{y^3}{6} (3AB - C) + \frac{y^5}{120} (E - 5AD + 30AB^2 - 10BC), \quad (18)$$

onde :

$$A = \frac{g^{(2)}}{g^{(1)}}, \quad B = \frac{g^{(3)}}{g^{(1)}}, \quad C = \frac{g^{(4)}}{g^{(1)}}, \quad D = \frac{g^{(5)}}{g^{(1)}}, \quad E = \frac{g^{(6)}}{g^{(1)}}. \quad (19)$$

Após o cálculo desses valores e desprezando os termos em  $n$  em  $y^5$ , obtemos :

$$\tan \beta = \frac{t^1}{N} Y - \frac{t^1}{3} \left(\frac{Y}{N}\right)^3 (1 - n^2 - 2n^4) + \frac{t^1}{15} \left(\frac{Y}{N}\right)^5 \cdot 2 \quad (20)$$

ou

$$\tan \beta = t^1 \left(\frac{Y}{N}\right) \left[1 - \left(\frac{Y}{N}\right)^2 \frac{1}{3} (1 - n^2 - 2n^4) + \left(\frac{Y}{N}\right)^4 \frac{2}{15}\right] \quad (21)$$

Ora

$$-\frac{1}{3} \tan^3 \beta = -\frac{1}{3} t^1 \left(\frac{Y}{N}\right)^3 \left[1 - \left(\frac{Y}{N}\right)^2 (1 - n^2 - 2n^4) + \left(\frac{Y}{N}\right)^4 \frac{2}{5}\right] \quad (22)$$

$$+\frac{1}{5} \tan^5 \beta = -\frac{1}{5} t^1 \left(\frac{Y}{N}\right)^5 \quad (23)$$

Levando essas expressões na (9) resulta

$$\boxed{t = t^1 \frac{Y}{N} - \frac{t^1}{3} \left(\frac{Y}{N}\right)^3 (1 + t^1^2 - n^2 - 2n^4) + \frac{t^1}{15} \left(\frac{Y}{N}\right)^5 (2 + 5t^1^2 + 3t^1^4)}, \quad (24)$$

ou ainda :

$$\gamma'' = [ (XV) - (XVI) q^2 ] q + F_5 , \quad (25)$$

onde :

$$q = 10^{-6} \cdot r'$$

$$(XV) = \frac{10 \cdot \rho}{K_0^6} t'$$

$$(XVI) = \frac{10^{18} \rho}{3K_0^3 N} t' (1 + t'^2 - n'^2 - 2 n'^4)$$

$$F_5 = \frac{10^{30} \rho q^5}{15 K_0^5 N^5} t' (2 + 5 t'^2 + 3 t'^4)$$

### § 56. MÓDULO DE DEFORMAÇÃO LINEAR

Das (46, 7) e (55, 3) segue

$$\lambda = \frac{1}{N \cos \phi} \cdot \frac{dy}{d\lambda} \sqrt{1 + \tan^2 \gamma} , \quad (1)$$

ou, dentro da precisão suficiente

$$\lambda = \frac{1}{N \cos \phi} \cdot \frac{dy}{d\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} \tan^2 \gamma \right) . \quad (2)$$

Desprezando termos em  $t$  e  $n$  nas potências de grau superior a dois, as (55, 5) e (55, 7) permitem escrever :

$$\frac{1}{N \cos \phi} - \frac{dy}{d\lambda} = 1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \phi}{2} (1 - t^2 + n^2) + \frac{\lambda^4 \cos^4 \phi}{24} \cdot 5 \quad (3)$$

$$1 + \frac{1}{2} \tan^2 t = 1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \phi}{2} t^2 \quad . \quad (4)$$

Multiplicando membro a membro vem

$$\lambda = 1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \phi}{2} (1 + n^2) + \frac{\lambda^4 \cos^4 \phi}{24} \cdot 5 . \quad (5)$$

Da segunda das (53, 15) segue

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \phi} - \frac{y^3}{6 N^3 \cos \phi} , \quad (6)$$

de onde :

$$\lambda^2 = \frac{y^2}{N^2 \cos^2 \phi} = \frac{y^4}{3 N^4 \cos^2 \phi} \quad (7)$$

$$\lambda^4 = \frac{y^4}{N^4 \cos^4 \phi} , \quad (8)$$

que, levadas na (5) dão

$$\lambda = 1 + \frac{y^2}{2 N^2} (1 + n^2) + \frac{y^4}{24 N^4} \quad (9)$$

Finalmente

$$\Lambda = 1 + (\text{XVIII}) \tilde{q}^2 + 0,00003 \tilde{q}^4 , \quad (10)$$

onde:

$$(\text{XVIII}) = \frac{10^{12} \cdot (1 + n^2)}{2 N^2} = \frac{10^{12}}{2 N M}$$

$$\tilde{q} = 10^{-6} \cdot Y$$

Nota

A teoria do § 54 mostrou o papel fundamental do módulo de deformação linear em toda a representação conforme. Vamos por isso escrever uma expressão mais completa de  $\Lambda$ , com a qual podemos partir, por exemplo, para a dedução de uma fórmula suficientemente precisa para o cálculo do comprimento de uma grande geodésica em termos das coordenadas planas de suas extremidades, problema que ganha atualidade cada vez maior, conforme mostramos em nossa tese /21/.

Ei-la

$$\begin{aligned} \Lambda = 1 + \frac{Y^2}{2r^2} + \frac{Y^4}{24r^4} (1 + 4n^2 - 24n^2 t^2) + \\ + \frac{Y^6}{720 r^6} (1 + 44n^2 - 552n^2 t^2 + 88n^4 - 1632n^4 t^2 + 1920n^4 t^4) \\ + \frac{Y^8}{40320r^8} (1 + \text{termos em } n) . \end{aligned}$$

A fórmula (10) é suficiente para a redução ao plano de projeção

das bases, ou dos lados de uma poligonação tomando-se para  $\tilde{q}$  e (XVIII) seus valores correspondentes ao meio do lado.

Para um lado 1-2 mais longo, i.e., para tratar elementos finitos devemos tomar para a (XVIII) o seu valor correspondente ainda ao meio do lado, porém efetuar o cálculo com o seguinte valor de  $\tilde{q}^2$ .

$$\tilde{q}^2 = \frac{1}{3} (\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 + \tilde{q}_2^2) \quad (11)$$

Isto resulta, como vamos mostrar, da relação entre o comprimento  $l$  da geodésica e aquele  $L$  do correspondente arco de transformada. Praticamente é licito formular as seguintes simplificações :

(i) Considerar o valor de  $\Lambda$  no meio do lado e tomar na (9)

$$l + \frac{Y^2}{2N^2} = \tilde{\Lambda} ; \quad (12)$$

(ii) Considerar o módulo como função unicamente de  $Y$ ; com isso, com as duas primeiras das (54, 33), com a (12), dão

$$\tilde{\Lambda}^1 = \frac{Y}{N^2} \sin \theta^* , \quad \tilde{\Lambda}^2 = \frac{1}{N^2} \sin^2 \theta^* ; \quad (13)$$

(iii) Considerar

$$L \approx D = \frac{Y_2 - Y_1}{\sin \theta^*} ; \quad (14)$$

(iv) Desprezar termos em  $\frac{1}{N^4}$

A integral (54, 27), calculada para os limites  $-L/2$  e  $+L/2$ ,

dá

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{24} \frac{\lambda \lambda'' - \lambda'^2}{\lambda^3} L^2. \quad (15)$$

Pondo  $\frac{1}{\lambda^3} = 1 - 3 \frac{Y^2}{2N}$  e feitas as substituições obtemos :

$$\frac{1}{L} = 1 - \frac{\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right)^2}{2N^2} - \frac{(Y_2 - Y_1)^2}{24N^2} \quad (16)$$

Finalmente, efetuando e invertendo, resulta

$$\lambda = \frac{L}{1 + \frac{Y_1^2 + Y_1 Y_2 + Y_2^2}{6N^2}}$$

(17)

E' claro que melhoraremos o valor de  $\lambda$  aplicando uma fórmula mais "fina", como a fórmula denominada dos três níveis, i.e., calculamos  $\lambda_1$ ,  $\lambda_m$  e  $\lambda_2$  e tomamos para a redução o valor de  $\lambda$  dado por

$$\lambda = \frac{1}{6} (\lambda_1 + 4\lambda_m + \lambda_2)$$

(18)

Este último método é mais preciso.

A alteração linear sendo nula ao longo do meridiano central, vai crescendo à medida que dele nos afastamos até atingir um valor  $+\lambda_{\max}$  sobre os bordos do fuso.

Multiplicando-se então todas as coordenadas do sistema pelo fa-

tor  $k_o = \frac{\Delta_{\max.}}{2}$  o sistema não cessará de ser conforme e as alterações elementares de comprimento ao invés de crescer de 0 a  $+\Delta_{\max.}$  crescerão de  $-\frac{\Delta_{\max.}}{2}$  a  $+\frac{\Delta_{\max.}}{2}$ , i.e., ficarão em valor absoluto reduzidas de metade. É comodo ainda aplicar  $K_o$  às próprias dimensões do elipsóide, i.e., tomar

$$a' = K_o a$$

O coeficiente  $K_o$  entra assim implicitamente em todos os cálculos.

Evidentemente, não há interesse em reduzir rigorosamente à metade essas deformações.

Adota-se, então, para simplificar os cálculos, um número simples, suficientemente aproximado daquêle que reduziria à metade as deformações.

No sistema UTM adota-se, como vimos, o seguinte coeficiente de redução de escala

$$K_o = 1 - \frac{1}{2500} = 0,9996 .$$

Com a aplicação deste artifício a verdadeira escala de ampliação será  $\Delta / K_o$  ao invés de  $\Delta$ .

Com o objetivo de favorecer uma tal zona da região considerada (em detrimento da periferia) modifica-se, às vezes, o  $K_o$ .

Compreende-se, agora, a razão de empregar-se uma banda de recobrimento de 30° de um fuso sobre o outro.

### § 57. REDUÇÃO ANGULAR

Partimos da (54, 25)

$$\delta = -\frac{1}{2} k_{(1/3)} L . \quad (1)$$

Considerando o módulo apenas função de  $Y$  a (54, 32) dá

$$k = - \frac{1}{\Lambda} - \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} \cos \theta^* \quad (2)$$

Com as (56, 9) e (56, 12) obtemos :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Y} \approx \frac{Y}{N^2} \left( 1 + \frac{r^2}{6N^2} \right), \quad \frac{1}{\Lambda} \approx 1 - \frac{r^2}{2N^2} \quad (3)$$

Tomando a corda pela transformada será

$$L \approx D = \frac{x_2 - x_1}{\cos \theta^*} \quad (4)$$

A (1) se reduzirá à expressão

$$\delta = - \frac{1}{2N^2} (x_2 - x_1) Y_{(1/3)} \left( 1 - \frac{r^2}{3N^2} \right) \quad (5)$$

O coeficiente  $1/3N^2$  é ligeiramente variável com a latitude  $\phi$ , contudo, esta variação é muito fraca e tanto para  $\phi = 0^\circ$  quanto para  $\phi = 60^\circ$ , temos praticamente

$$\frac{1}{3N^2} = 82 \cdot 10^{-16} \quad (6)$$

O ponto que corresponde a  $L/3$  tem abscissa dada por

$$Y_{(1/3)} = \frac{2Y_1 + Y_2}{3} \quad (7)$$

A (5) se escreve então

$$\delta'' = \left( \frac{10^{12}}{2 N^2} \right) \frac{\rho'' \cdot 10^{-12}}{3} (x_1 - x_2) (2y_1 + y_2) (1 - 82 \cdot 10^{16} y^2) \quad (8)$$

Finalmente, escrevemos :

$$\delta = \delta_0 - \delta_0 (82 \cdot 10^{16} y^2) \quad (9)$$

com

$$\delta_0 = 6,8755 \cdot 10^{-8} \text{ (XVIII)} (x_1 - x_2) (2y_1 + y_2) \quad (10)$$

Se  $\delta_{21}$  indicar a redução angular em 2 a (10) mostra que os dois índices 12 e 21 não gozam da propriedade comutativa.

A (9) dá a redução angular com o sinal contrário àquele da convenção que fizemos no § 54. Isto constitue um excelente controle.

A função (XVIII), já encontrada no cálculo do módulo de deformação, varia muito pouco com  $X$ , o que nos permite tomar como argumento para entrar na tábua a média das abscissas correspondente às extremidades do lado considerado.

Para o cálculo da correção damos a seguinte tábua :

$Y$	$82 \cdot 10^{-16} \cdot Y^2$	$Y$	$82 \cdot 10^{-16} \cdot Y^2$
100000	$8 \cdot 10^{-5}$	260000	$55 \cdot 10^{-5}$
125000	13	270000	60
150000	19	280000	65
175000	25	290000	70
200000	32	300000	74
210000	37	310000	80
220000	40	320000	84
230000	43	330000	90
240000	47	340000	95
250000	51	350000	100

Nota

A construção das tâbuas, ábacos e gráficos para as funções aqui empregadas não oferece dificuldade e o trabalho fica muito reduzido observando-se que é fácil estabelecer fórmulas recorrentes para o cálculo. Tâbuas bem detalhadas foram calculadas e publicadas pelo "Army Map Service" dos U.S.A. para os diferentes elipsóides de uso corrente. O sistema U T M, inegavelmente, será adotado por todas as nações cultas.

§ 58. O MELHOR SISTEMA CONFORME PARA DETERMINADA REGIÃO.

A RECOMENDAÇÃO da Primeira Reunião Brasileira de Consulta sobre Cartografia, transcrita no § 51, "in fine" preconiza que na elaboração de uma planta regional pode ser adotado um sistema de representação conforme que melhor se adapte à região.

Trataremos, neste parágrafo, do critério para se tornar possível a escolha de tal sistema.

Retomemos a representação conforme

$$\Sigma / \tilde{\Sigma} \quad (1)$$

Seja

$$ds^2 = \frac{1}{2} (du^2 + dv^2) \quad (2)$$

o  $ds^2$  isotermo da superfície  $\Sigma$  e

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3)$$

o  $ds^2$  do plano, evidentemente isotermo.

Tomando sobre as duas superfícies os mesmos parâmetros, i.e

$$x = u, \quad y = v, \quad (4)$$

resulta das (43, 32) e das (2) e (3) que

$$\Lambda = q \quad (5)$$

As equações diferenciais (34, 44), (34, 45) e (34, 46) se es-  
crevem agora :

$$\Lambda \left[ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} \right] - \left[ \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right)^2 \right] = k, \quad (6)$$

ou

$$\Lambda^2 \left[ \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial y^2} \right] = k \quad (7)$$

ou ainda

$$\Lambda^2 \Delta \ln \Lambda, \quad (8)$$

Trata-se pois de encontrar a solução que atribue ao módulo de deformação linear  $\Lambda$  a menor alteração dentro da região representada.

Ora, uma função continuamente diferenciável pouco varia nas vizinhanças de um seu extremum. O ideal, portanto, é que  $\Lambda$  tenha um extremum em um ponto, o mais central possível da região representada. Precisamente nesse ponto, origem das coordenadas ou centro de representação admitiremos a isometria, i.e.,  $\Lambda = 1$ .

Isto sugere que tomemos para expressão do módulo de deformação linear a série :

$$\Lambda = 1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \dots, \quad (9)$$

onde  $\Lambda_r = \Lambda_r(X, Y)$  é um polinômio homogêneo de grau  $r$  em  $X, Y$ .

Para a curvatura gaussiana  $K$  tomaremos também o desenvolvimento em série :

$$= K_0 + K_1 + K_2 + \dots \quad (10)$$

A (6) se escreve agora

$$(1 + \Lambda_2 + \dots) [\Delta \Lambda_2 + \Delta \Lambda_3 + \Delta \Lambda_4 + \dots] - \left[ \left( \frac{\partial \Lambda_2}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Lambda_2}{\partial Y} \right)^2 + \dots \right] = K_0 + K_1 + K_2 + \dots, \quad (11)$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

Com a comparação dos termos de mesmo grau resultam as equações

sucessivas :

$$\Delta \Lambda_2 = k_0$$

$$\Delta \Lambda_3 = k_1$$

$$\Delta \Lambda_4 = k_2 - \Lambda_2 \cdot \Delta \Lambda_2 + \left( \frac{\partial \Lambda_2}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \Lambda_2}{\partial y} \right)$$

} (12)

Interessa-nos, em particular, a possibilidade de definir  $\Lambda_2$  sem conhecer o desenvolvimento (9).

Sejam A, B, C os coeficientes indeterminados do polinômio homogêneo de grau 2 em X, Y :

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} ( A X^2 + 2 B X Y + C Y^2 ) \quad (13)$$

Esses três coeficientes dependem ainda de duas constantes arbitrárias uma vez que entram na solução da equação de Laplace, primeira das (12).

Consideremos, agora, a superfície

$$z = \Lambda_2 = \Lambda_2 (x, y), \quad (14)$$

disposta de forma que o centro de representação coíncida com a origem de coordenadas e seu plano tangente com o plano XY (fig. 27).

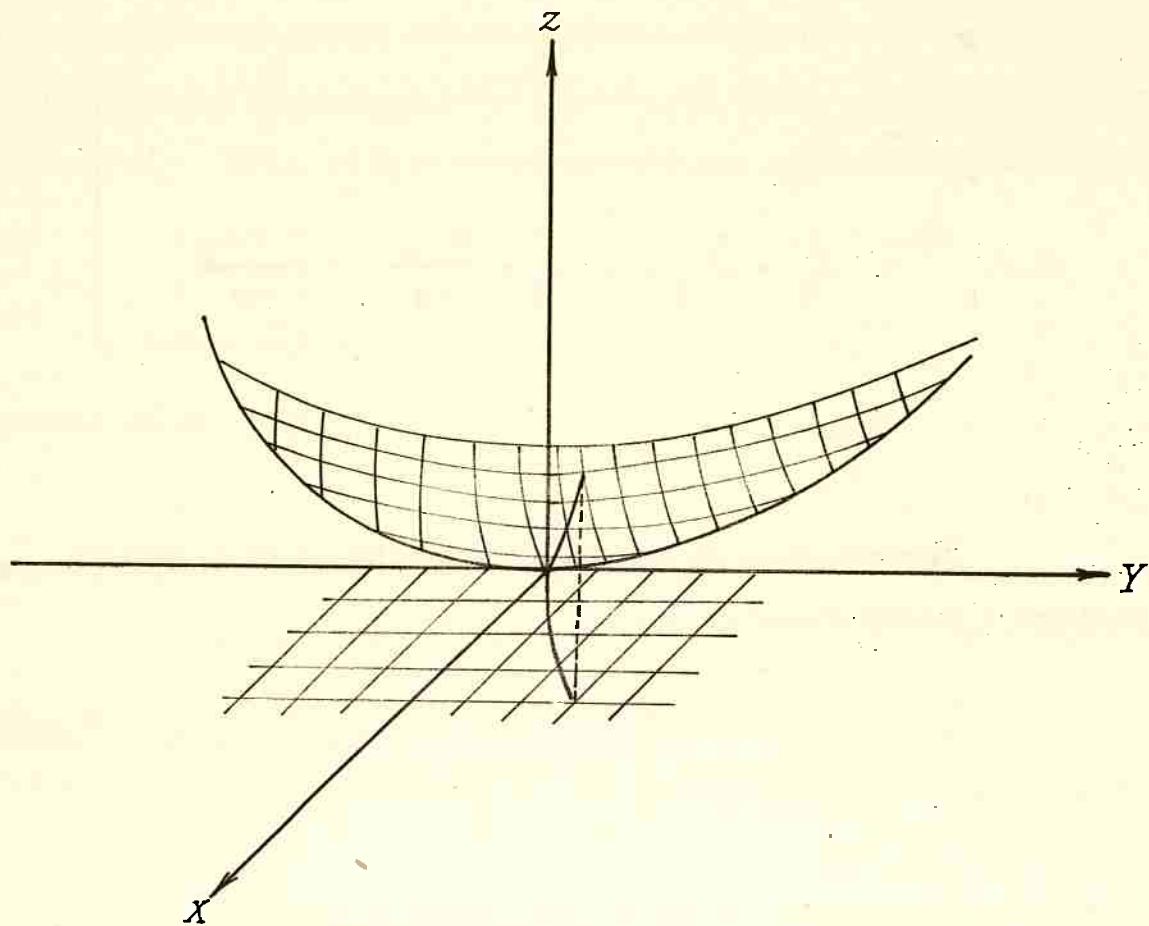


fig. 27

O eixo  $Z \equiv \Lambda_2$  coincide com a normal à superfície no ponto considerado.

A quádrica (14), como mostra a secção  $Z = \text{const.}$ , é

- um parabolóide elíptico, se  $A C - B^2 > 0$
- um parabolóide hiperbólico, se  $A C - B^2 < 0$
- um cilindro tangente ao plano  $XY$ , se  $A C - B^2 = 0$

Para o estudo a priori das alterações, o gen. Laborde considerou os dois primeiros termos do desenvolvimento (9), isto é, com

$$z = \Lambda_2 \approx \Lambda - 1 , \quad (15)$$

chamando-a superfície indicatriz da projeção.

Assim, na representação conforme teremos uma imagem geométrica simples das diversas alterações considerando uma superfície auxiliar, dita superfície indicatriz, obtida levando-se, sobre a normal em cada ponto da superfície imagem, por exemplo, uma ordenada expressa pela (15).

Sobre a superfície assim definida.

- a cota de cada ponto é igual à alteração linear;
- as linhas de nível são linhas isométricas (mesma alteração linear).

Quanto mais aplanada a superfície indicatriz no domínio de aplicação tanto mais fracas serão as variações da alteração linear.

Se o sistema admitir uma linha ao longo da qual as alterações lineares são nulas, corresponderá ao longo desta linha um plano tangente horizontal.

Se cortarmos a superfície indicatriz pelo plano  $z = +h$  ou  $z = -h$  paralelo ao plano tangente e infinitamente vizinho dele, teremos, com  $h = 1/2$ , a cônica

$$2\Lambda_2(x, y) = \pm 1 , \quad (16)$$

de mesma espécie que as curvas de igual deformação linear. É a chamada indicatriz da projeção.

Ela não deve ser confundida com a indicatriz de Tissot, estudada no § 44, que, como vimos, se reduz a um círculo na representação conforme.

Segundo a primeira equação das (12) deve ser

$$\Delta \Lambda_2 = A + C = K_0 \quad (17)$$

Aqui nem aparece  $B$ . Fazemos  $B = 0$ , o que equivale a fazer coincidir os eixos de coordenadas retangulares com os eixos da indicatriz.

Ficamos ainda com um parâmetro livre que podemos introduzir de forma simétrica por meio da equação

$$A - C = n K_0. \quad (18)$$

Com (17) e (18)

$$A = \frac{K_0}{2} (1 + n), \quad C = \frac{K_0}{2} (1 - n). \quad (19)$$

A equação do parabolóide osculador na forma paramétrica ordinária será:

$$P = P(X, Y) = \begin{cases} X \\ Y \\ \frac{1}{2} (AX^2 + CY^2) \end{cases} \quad (20)$$

No ponto  $(0, 0)$  encontramos :

$$\left. \begin{array}{l} E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1 \\ e = A, \quad f = 0, \quad g = C \end{array} \right\} \quad (21)$$

Com isso, obtemos para as curvaturas principais da superfície indicatriz :

$$\frac{e}{E} = A, \quad \frac{g}{G} = C \quad (22)$$

Com (17) concluimos que a curvatura média ( $2H$ ) da superfície indicatriz é igual à curvatura gaussiana da superfície representada.

Com as (19) a equação da indicatriz se escreve

$$\frac{K_o}{2} [(1+n) x^2 + (1-n) y^2] = \pm 1 \quad (23)$$

E' a natureza desta cônica que convém precisar. Distinguimos assim, três tipos principais de projeções, assim denominadas :

- elípticas (ou circulares) : ponto central sobre um "cume" da superfície indicatriz ;
- hiperbólicas : ponto central sobre um "colo" da superfície indicatriz ;
- parabólicas : ponto central sobre uma "linha de festo" ou "cumiada" horizontal (ou um talvegue sem declividade).

Na prática nunca se empregam projeções hiperbólicas, razão por que excluiremos este caso.

Podemos admitir ainda que fazemos o eixo - x coincidir com o eixo menor, com o que podemos limitar  $n$  aos valores do segmento  $0 \leq n \leq 1$ .

Nos casos limites  $n = 0$ , ou  $n = 1$ , respectivamente, a indicatriz é circular ou parabólica e no interior do segmento é sempre elíptica.

Comparando-se a indicatriz

$$\frac{K_o}{2} [(1+n) x^2 + (1-n) y^2] = 1 \quad (24)$$

com a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (25)$$

resulta

$$n = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \quad . \quad (26)$$

Uma vez que as alterações do módulo de deformação longitudinal em

relação ao eixo principal depende do termo principal

$$\Lambda_2 = \frac{K_o}{4} [(1+n)x^2 + (1-n)y^2] , \quad (27)$$

devemos procurar aquela projeção para a qual a máxima soma do termo principal seja a menor possível para a região a ser representada.

O valor do termo principal (27), para um ponto à distância  $D$  da origem, sobre a bissetriz dos eixos da indicatriz, isto é, para

$$x^2 = y^2 = \frac{D^2}{2} \quad (28)$$

$$\Lambda_2 = \frac{K_o D^2}{4} , \quad (29)$$

portanto, independente de  $n$ .

Baseado neste fato, para a determinação a priori da indicatriz ótima à forma da região a ser representada, Tissot na "Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, Paris, 1881", indica o seguinte processo gráfico :

Tome-se de uma carta em pequena escala da região e procure - se dentre todas as elipses aplicáveis nela aquela para a qual o raio vector na bissetriz dos eixos seja o menor. Tissot denominou-a cônica-limite envolvente do país a ser representado, que é hemotética da indicatriz aqui considerada.

O traçado da cônica-limite dá pois, conjuntamente, o ponto central da representação, a direção dos eixos da indicatriz e o parâmetro n.

Se resultar  $n$  muito próximo de 1, ou de 0, emprega-se a representação com a indicatriz circular, ou parabólica.

### § 59. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

#### I. Cálculo das coordenadas planas dos vértices de uma triangulação

Sejam dados :

1º. - A posição elipsoidal de uma das pontas de uma linha básica.

$$l = (\varphi_1, L_1); \quad (1)$$

2º. - A posição elipsoidal da outra ponta, dada em coordenadas polares

$$2 = l \angle \theta; \quad (2)$$

$l$  = segmento de secção normal que se confunde com o arco de geodésica ;

$\theta$  = azimute norte de emissão do arco de geodésica ;

3º. - Os ângulos entre lados, a saber

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \quad (3)$$

4º. - Longitude do meridiano central

$$+ | L_0 | \text{ W. Gr.} \quad (4)$$

Incógnitas :

1º. - As posições planas de todos os vértices

$$i = (x_i, y_i). \quad (5)$$

Calculos preliminares :

## 1º. - Diferença de longitude

$$\lambda = L_o - L \quad (6)$$

## 2º. - Equações da carta

$$X = X(\varphi, \lambda), \quad Y = Y(\varphi, \lambda) \quad (7)$$

i.e. :

$$\begin{aligned} X' &= [(II) + (III) p^2] p^2 + (I) + A_6 \\ Y' &= [(IV) + (V) p^2] p + B_5 \end{aligned} \quad (8)$$

onde :

$$X' = 0,9996 X, \quad Y' = 0,9996 Y \quad (9)$$

$$p = 10^{-4} \cdot \lambda \quad (10)$$

Com o argumento  $\varphi$  entra-se na tábua calculada de minuto em minuto sexagesimal, com diferença tabular para  $l$ , e com simples interpolação linear registram-se os valores das funções: (I), (II), (III) e (V).

Para o termo (IV) é necessário levar em conta as diferenças segundas. A correção correspondente é dada por um gráfico.

Os termos  $B_5$  e  $A_6$  que dependem tanto da latitude como da longitude, mas cujos valores são fracos, são tirados de gráficos.

O fator  $p$  deve ser tomado com oito decimais e  $p^2$  com sete dígitos, de que queiramos conservar a precisão do centímetro nas transformações.

Dispomos, agora, de dois métodos para prosseguir :

(i) Método clássico.

Com o problema do transporte das coordenadas elipsóidicas, que já tratamos em nossa tese /21/, obtemos

$$2 = (\varphi_2, L_2) \quad (11)$$

e, novamente com as (8), obtemos a (5).

Este é o método natural, mais trabalhoso, e que deve servir hoje como "cheque" para algumas linhas.

(ii) Método moderno.

A trigonometria retilínea dá as relações simples seguintes : (fig. 25).

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta^* &= \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \\ D &= (x_2 - x_1) \sec \theta^* = (y_2 - y_1) \cosec \theta^* \\ x_2 &= x_1 + D \cos \theta^*; \quad y_2 = y_1 + D \sin \theta^* \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Temos ainda

$$\boxed{\theta^* + \delta = \theta + \tau} \quad (13)$$

Como não conhecemos  $\theta^*$  e  $D$  aproveitamos a circunstância de ser  $\delta$  um ângulo pequeno, bem como ser  $l$  próximo de  $D$ , para obtermos em primeira aproximação

$$\tilde{x}_2 = x_1 + l \cos(\theta + \tau), \quad \tilde{y}_2 = y_1 + l \sin(\theta + \tau). \quad (14)$$

A convergência plana será calculada em função de  $\varphi$  e  $L$  pela fórmula :

$$r'' = [(XII) + (XIII) p^2] p + c_5 \quad (15)$$

onde :

$$p = 10^{-4} \cdot \lambda .$$

Com o argumento  $\varphi$  entra-se na tábua para registrar (XII), mediante interpolação linear, e (XIII) a simples vista.

O termo  $c_5$  é dado por uma escala gráfica linear em função de  $\lambda$ .

A convergência plana será calculada em função de  $X$  e  $Y$  pela fórmula:

$$r'' = [(XV) - (XVI) q^2] q + F_5 \quad (16)$$

Com o argumento  $\varphi'$  (latitude correspondente a um arco de meridiano de comprimento  $X$ , não reduzido, a partir do equador), entra-se na tábua para registrar as funções (XV) e (XVI).

O termo  $F_5$  é tirado de uma escala gráfica linear em função de

$$q = 10^{-6} \cdot Y' . \quad (17)$$

Na (13),  $r$  entra com o sinal + quando o semi-eixo norte do reticulado jazer a W. do meridiano elipsoidal projetado e - no caso contrário. Como controle, no hemisfério sul,  $r$  recebe o sinal de  $p$  ou o sinal de  $q$ .

Uma vez calculados  $\tilde{x}_2$ ,  $\tilde{y}_2$  passamos ao cálculo do módulo global pela fórmula

$$\Lambda = + [ (XVIII) + 0,00003 \tilde{q}^2 ] \tilde{q}^2 \quad (18)$$

onde

$$\tilde{q}^2 = \frac{1}{3} ( \tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 + \tilde{q}_2^2 ) \quad (19)$$

$$\tilde{q}_1 = 10^{-6} \cdot y_1 \quad , \quad \tilde{q}_2 = 10^{-6} \cdot \tilde{y}_2 \quad (20)$$

Com o argumento

$$\frac{x_1 + \tilde{x}_2}{2} = x_1 + \frac{1 \cos(\theta + t)}{2} \quad (21)$$

entra-se na tábua para registrar (XVIII).

O valor da corda será

$$D \approx L = \lambda \cdot 1 \quad (22)$$

Nas triangulações é sempre desprezível a correção a ser dada a  $L$  para se ter  $D$ , pois que para  $L = 100$  km e  $Y = 300$  km, a correção seria da ordem de apenas 2 mm.

As reduções angulares  $\delta_{12} + \delta_{21}$  são dadas pelas fórmulas:

$$\delta = \delta_0 - \delta_0 (82 \cdot 10^{16} \cdot Y^2) \quad (23)$$

com

$$\delta_0 = 6,8755 \cdot 10^{-8} \text{ (XVIII)} (x_1 - \tilde{x}_2) (2y_1 + \tilde{y}_2) \quad (24)$$

Na (13),  $\delta$  entra com o sinal + quando no sentido azimutal N.-E. encontramos primeiro a corda e depois a transformada e o sinal - no caso contrário. Como controle, no hemisfério sul  $\delta$  recebe o sinal contrário àquele dado algebricamente pela (24).

Obtido o azimute plano  $\theta^*$  as últimas das (12) dão as incógnitas  $x_2$  e  $y_2$ .

O cálculo da convergência plana em 2 é feito pela (16) e a conver-

gência dos meridianos obtida pela fórmula

$$\Gamma = (\ell_1 - \ell_2) - (|\delta_{12}| + |\delta_{21}|) \mp 180^\circ \quad (25)$$

$$\theta_{21} = \theta_{12} + \Gamma \quad (26)$$

Finalmente o azimute elipsoidal do lado seguinte será

$$\theta_{23} = \theta_{21} + \alpha \quad (27)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo dos dois lados, ângulo este que pode girar no sentido crescente ou decrescente dos azimutes e por isto deve ser somado ou subtraído, conforme o caso.

$$3 = 1_{23} \angle \theta_{23} \quad (28)$$

recaímos no problema inicial, em tudo análogo, mediante a simples substituição

$$\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 3 \end{pmatrix}$$

## II Resolução do triângulo geodésico elipsoidal.

Sejam dados :

$$i = (x_i, y_i) \quad , \quad (29)$$

com  $i = 1, 2, 3$ .

Aplicamos as equações inversas da carta.

$$\begin{aligned} \phi &= \phi' + [(VIII) q^2 - (VII)] q^2 + D_6 \\ \lambda &= [(IX) - (X) q^2] q + E_5 \end{aligned} \quad (30)$$

onde :

$$q = 10^{-6} Y' \quad (31)$$

$$X' = 0,9996 X \quad , \quad Y' = 0,9996 Y \quad (32)$$

Com o argumento  $\psi'$  (latitude correspondente a um arco de meridiano de comprimento  $X$ , não reduzido, a partir do equador), entra-se na tábua e com simples interpolação linear registram-se os valores das funções (VII), (VIII) e (IX).

Para o termo (X) é necessário levar em conta as diferenças segundas. A correção correspondente é dada por um ábaco.

Os termos  $D_6$  e  $E_5$  são tirados de gráficos.

No método clássico, com estas coordenadas  $\psi_i$ ,  $\lambda_i$  podemos determinar os comprimentos  $l$  dos arcos das geodésicas que ligam dois a dois os três vértices e os azimutes elipsóidicos relativos, bem como os ângulos do triângulo.

No método moderno devemos proceder da seguinte forma :

a) Com a primeira das (12) calculamos os azimutes planos  $\theta_{12}^*$ ,  $\theta_{23}^*$ ,  $\theta_{31}^*$  das três cordas  $\overline{12}$ ,  $\overline{23}$ ,  $\overline{31}$  das três transformadas.

Por diferença obtemos os três ângulos (retilíneos) e mediante a aplicação das segundas das (12) ou com a fórmula pitagórica

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (33)$$

no caso de dispormos de uma "Barlow's Tables", p.ex., os comprimentos das três cordas. Fica completamente resolvido o triângulo plano.

b) Para cada transformada calculamos com a fórmula (23) as reduções angulares

$$\delta_{i,i+1} \text{ e } \delta_{i+1,i} \text{ com } i = 1,2,3.$$

O excesso esférico do triângulo é evidentemente igual à soma dos seus  $\delta$ , i.e.

$$\epsilon = \sum \delta \quad (34)$$

c) Com a fórmula (18) calculamos os módulos globais de deformação linear  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{23}$ ,  $\lambda_{31}$  relativos às três transformadas.

d) Com a fórmula (16) calculamos as três convergências planas  $\tau_i$ .

Finalmente, com

$$l = \frac{D}{\lambda}, \quad (35)$$

temos os comprimentos dos lados e com

$$\theta = \theta^* + \delta - \tau \quad (36)$$

os azimutes. O triângulo elipsóidico fica completamente resolvido.

### III. Ajustamento dos erros angulares.

Acabamos de ver que é possível calcular as coordenadas planas de uma rede inteira de triangulação.

A este respeito é oportuno lembrar o artigo do ten. céл. Mário Menestrina do I.G.M. italiano, citado em /7/, "Confronto fra le determinazioni delle coordinate geografiche dei vertici di una rete di primo ordine eseguite col procedimento classico e com le formule della rappresentazione piana di Gauss" - Rivista l' Universo, Anno 1 942, nº 8.

Uma vez calculadas as coordenadas planas, o ajustamento dos erros angulares pode ser obtido pela aplicação de dois métodos principais, a saber:

(i) Método de variação de coordenadas ;

(ii) Método de Levallois.

Este último, divulgado no Brasil pelo prof. Hugo Regis dos Reis, com a tese "O Método das Orientações de Levallois", 1952.

Somos de parecer que a tendência moderna, mesmo nas triangulações radar ou no cálculo das grandes geodésicas, é partir sempre das coordenadas

planas calculadas, preferivelmente, no sistema U T M.

Todos êstes cálculos ficam fáceis e rápidos quando se dispõe de uma tábua préviamente calculada para o citado sistema, de uma tábua de senos e co-senos naturais com oito decimais do tipo da "Special Publication N<sup>o</sup>. 231" e de u'a máquina de calcular. Os exemplos numéricos a seguir comprovam o acabamento de afirmar.

### TRIANGULAÇÃO

$\varphi_1$	= - 23° 00' 00,00"	1	= 60 000,000
$L_1$	= + 46° 00' 00,00"	θ <sub>12</sub>	= 225° 00' 00,000"
$L_0$	= + 45° 00' 00,00"	α <sub>23</sub>	= 60° 00' 02,647"

### 1<sup>a</sup> TRANSFORMAÇÃO DIRETA

$\lambda$	= - 1° 00' 00,00"	$- L_0 - L =$	$\lambda$	= 3600,00" $\times 10^{-4}$
$\varphi$	= Argumento na tábua :		$p_2$	= 0,36000000 $\times p$

(I)	= 2 543 553,035	.	(IV)	= 284 682,727
(II)	= 2 696,398	.	(V)	= 78,011
(III)	= 2,180	.	B <sub>5</sub>	= 0,000
A <sub>6</sub>	= 0,000	.		

(II)	= 2 696,398	.	(IV)	= 284 682,727
+ (III) $p^2$	= <u>0,283</u>		+ (V) $p^2$	= <u>10,110</u>
	2 696,681	$\times p^2$		284 692,837 $\times p$
	= 349,490	.	Y'	= 102 489,421
+ (I)	= <u>2 543 553,035</u>	.		
X'	= - 2 543 902,525	$\div 0,9996$	Y'	= - 102 489,421 $\div 0,9996$
X	= - 2 544 920,493	.	Y	= - 102 530,433

## 2º CONVERGÊNCIA PLANA EM 1

$$\begin{array}{lll}
 \text{(XII)} & = 3907,311 & \text{(XIII)} = 3907,311 \\
 \text{(XIII)} & = 2,639 & + (\text{XIII})p^2 = 0,342 \\
 c_5 & = 0,000 & 3907,653 \times p \\
 r_1 & = -23'26,755'' & r_1 = 1406,755'' \\
 \end{array}$$

## 3º COORDENADAS APROXIMADAS

$$\begin{array}{l}
 \theta_{12} = 224^\circ 59'60,000'' \\
 r_1 = -23'26,755'' \\
 \theta_{12}^* + \delta_{12} = 224^\circ 36'33.245
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \cos. & = -0,71191287 \times 1 & \sin & = -0,70226781 \times 1 \\
 \Delta \tilde{x} & = -42,714,772. & \Delta & = -42136,069 \\
 \tilde{x}_1 & = -2.544.920,493. & \tilde{y}_1 & = -102.530.433 \\
 \tilde{x}_2 & = -2.587.635,265. & \tilde{y}_2 & = -144.666,502
 \end{array}$$

## 4º MÓDULO GLOBAL E TRANSFORMADA (CORDA)

$$\begin{array}{lll}
 \tilde{x}_1 & = -2.544.920,493 & \tilde{q}_1 & = 0,102530434 \\
 \Delta \tilde{x} : 2 & = -21.357,386 & \tilde{q}_2 & = 0,144666503 \\
 \tilde{x}_m & = -2.566.277,879 & \\
 (\text{XVIII}) & = 0,01 234 728 & \tilde{q}_1^2 & = 0,01051244 \\
 0,00003 q^2 & = 0,00 000 046 & \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 & = 0,01483272 \\
 & 0,01 234 774 \times \tilde{q}^2 & \tilde{q}_2^2 & = 0,02092840 \\
 & = 0,00 019 046 + 1 & & = 0,04627356 \\
 \Delta & = 1,00 019 046 \times 1 & \tilde{q}^2 & = 0,01542452 \\
 L & = 60.011,428 \approx D. & & \vdots
 \end{array}$$

5<sup>a</sup> REDUÇÕES ANGULARES

$$\begin{aligned}
 \tilde{Y}_2 &= -144.666,502 & Y_1 &= -102.530,433 \\
 +2Y_1 &= \underline{-205.060,866} & 2\tilde{Y}_2 &= \underline{-289.333,004} \\
 &-349.727,368 . (+) & &-391.863.437 . (-) \\
 \tilde{X}_2 - X_1 &= -42.714,772 & X_1 - \tilde{X}_2 &= -42.714,772 \\
 10^{-8} \cdot \text{prod.} &= 149,386 x (\text{XVIII}) & 10^{-8} \cdot \text{prod.} &= 167,384 x (\text{XVIII}) \\
 &= 1,845 x 6,8755 & &= 2,067 x 6,8755 \\
 \delta_0 &= 12,685 x 0,00013 & \delta_0 &= 14,212 x 0,00013 \\
 \text{corr.} &= \underline{-0,002} & \text{corr.} &= \underline{-0,002} \\
 \delta_{12} &= +12,683 . & \delta_{21} &= -14,210 .
 \end{aligned}$$

6<sup>a</sup> AZIMUTES PLANOS (ANOMALIAS)

$$\begin{aligned}
 \theta_{12}^* + \delta_{12} &= 224^{\circ} 36' 33,245'' \\
 \delta_{12} &= \underline{12,683} \\
 \theta_{12}^* &= 224^{\circ} 36' 20,562'' & \theta_{21}^* &= 44^{\circ} 36' 20,562'' \\
 &
 \end{aligned}$$

7<sup>a</sup> COORDENADAS FINAIS

$$\begin{aligned}
 \cos &= -0,71195605 & x & D & \sin &= -0,70222403 & x & D \\
 \Delta x &= -42.725,499 & & & &= -42141,467 \\
 X_1 &= \underline{-2544.920,493} & Y_1 &= \underline{-102530,433} \\
 X_2 &= -2.587.645,992 & Y_2 &= -144671,900 \\
 X_2' &= - & Y_2' &= -144614,031
 \end{aligned}$$

8<sup>a</sup> CONVERGÊNCIA PLANA EM 2.

$$\begin{aligned}
 X_2 &= \text{Argumento na tábua} \\
 (\text{XV}) &= 13 984,712 & (\text{XV}) &= 13 984,712 \\
 (\text{XVI}) &= 135,318 & - (\text{XVI})^2 &= \underline{-2,830} \\
 F_5 &= 0,000 & & & 13 981,882 x q \\
 q &= 0,144 614,031 & r_2' &= 2 021,976 \\
 q^2 &= 0, 02091 322 & r_2'' &= -33' 41,976"
 \end{aligned}$$

## 92 CONVERGENCIA DOS MERIDIANOS ELÍPSOIDICOS

**10º AZIMUTE ELIPSÓIDICO CONJUGADO**

$$\begin{aligned}
 \theta_{12} &= 225^\circ 00' 00,000'' \\
 \Gamma &= \underline{\quad} \quad 9' 48,328'' \\
 180^\circ + \theta_{21} &= 225^\circ 09' 48,328'' \\
 \theta_{21} &= 45^\circ 09' 48,328'' \\
 \end{aligned}$$

**11º AZIMUTE ELÍPSOIDICO SUCESSIVO**

$$\begin{array}{rcl}
 \theta_{21} & = & 45^\circ 09' 48,328 \\
 \alpha_{23} & = & 60^\circ 00' 02,647 \\
 \theta_{23} & = & 105^\circ 09' 50,975
 \end{array}$$

## TRANSFORMAÇÃO INVERSA

23 K 7 456 097,475 S 497 510,579 E.

$$L_0 = + 45^{\circ} 00' 00,00''$$

$$X' = -2\ 543\ 902,525 + 0,9996 \quad Y' = 102\ 489,421 \div 0,9996$$

$$X = -2544920.493 \quad Y = -102530.433$$

$\phi' = -23^{\circ} 00' 11.365''$  = argumento correspondente a  $\chi$

(VII) =	1 082,123	IX =	35 127,640
(VIII) =	12,35	X =	196,558
D <sub>6</sub> =	0,000	E <sub>5</sub> =	0,000
q =	0,102.489,942	q <sup>2</sup> =	0,010 504,188
-(VII) =	- 1 082,123	(IX) =	35 127,640
+(VIII)q <sup>2</sup> =	+ 0,136	-(X)q <sup>2</sup> =	-2,065
	- 1 081,987 x q <sup>2</sup>		35 125.575xq
	- 11,365		3 600,018
φ'   =	<u>23° 00' 11,365"</u>	λ =	1° 00' 00,018
φ   =	23° 00' 00,00"	L <sub>o</sub> =	<u>45° 00' 00,000"</u>
φ =	23° 00' 00,00"	L = +	46° 00' 00,018"

\*\*\*\*\*

### SUMULA

Com apoio no Cálculo Exterior e no clássico Método do Triedro Móvel constrói-se a Geometria Diferencial necessária e suficiente à Geodésia Superior e à Cartografia Racional.

A teoria geral da representação de superfícies é estudada sem o apego a noções empíricas, às vezes ilusórias.

Institui-se um método para o estudo da representação plana de revolução mediante a associação de dois vectores girantes.

Faz-se aplicação da teoria ao Sistema UTM e estabelece-se um critério para a escolha do melhor sistema conforme para determinada região. Finalmente, mostra-se a simplicidade das aplicações do citado Sistema quando se dispõe de tábuas préviamente construídas.

\*\*\*\*\*