

Roseli Fernandez
IME-USP

Estudando os trabalhos [R-1] e [R-2], nos quais M.M. Rao apresenta uma caracterização do dual de um espaço de Orlicz, sentimos a necessidade, por não estarem claras para nós algumas de suas demonstrações, de integrar em relação a medidas definidas em ideais. Isto deu origem a este trabalho, que faz parte de nossa dissertação de Mestrado [F], e que foi baseado nos tópicos relativos à integração em relação a medidas finitamente aditivas, apresentados por Dunford e Schwartz em [DS].

As provas dos resultados a seguir estão em [F].

§1. Medidas definidas em ideais

Aqui X denotará um conjunto qualquer, A uma álgebra de subconjuntos de X e H será um subconjunto não vazio de A tal que

- (i) H é um anel de subconjuntos de X ;
- (ii) se $E \in A$ e $F \in H$, então $E \cap F \in H$.

Este conjunto H será chamado ideal de A e este nome é justificado pelo fato de que A com a diferença simétrica como operação de adição, e a intersecção como operação de multiplicação é um anel comutativo, e H é um ideal de A .

(1.1) Definição. Dizemos que uma função G de H em $[-\infty, \infty]$, é uma medida em H se, e somente se,

- (i) $G(\emptyset) = 0$;
- (ii) se $F_1, F_2 \in H$ e $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, então $G(F_1 \cup F_2) = G(F_1) + G(F_2)$.

Segue de (ii) que $G(H) \subset]-\infty, \infty]$ ou $G(H) \subset [-\infty, \infty[$.

Para $E \in X$, denotaremos por $\mathcal{D}(H, E)$ o conjunto das seqüências finitas $(F_1, F_2, \dots, F_n)$, de elementos dois a dois disjuntos de H , tais

que $\bigcup_{i=1}^n F_i \subset E$.

A menos de menção em contrário, G será uma medida em H .

(1.2) Definição. A função $v(G, \cdot)$ de H em $[0, \infty]$ definida por

$$v(G, F) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |G(F_i)| : (F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{D}(H, F) \right\},$$

é chamada variação total de G . Se

$$\sup \{v(G, F) : F \in H\} < \infty,$$

dizemos que G é de variação limitada.

(1.3) Proposição. Tem-se

(i) $v(G, \cdot)$ é uma medida em H ;

(ii) para todo $F \in H$ vale que

$$v(G, F) \leq 2 \inf \{k \in [0, \infty] : |G(E)| \leq k \text{ para todo } E \in H\},$$

com a convenção que $\inf \emptyset = \infty$;

(iii) se G é não-negativa, então $v(G, \cdot) = G$;

(iv) $v(v(G, \cdot), \cdot) = v(G, \cdot)$.

(1.4) Definição. A igualdade

$$v^*(G, E) = \inf \{v(G, F) : E \subset F \text{ e } F \in H\}$$

define uma função $v^*(G, \cdot)$ no conjunto das partes de X . Convencionamos que $\inf \emptyset = \infty$.

Verifica-se facilmente que $v^*(G, \cdot)$ é uma medida exterior, isto é,

(i) $v^*(G, \emptyset) = 0$;

(ii) se $E_1, E_2 \subset X$ e $E_1 \subset E_2$, então $v^*(G, E_1) \leq v^*(G, E_2)$;

(iii) se $E_1, E_2 \subset X$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,

$$\text{então } v^*(G, E_1 \cup E_2) \leq v^*(G, E_1) + v^*(G, E_2).$$

A menos de menção em contrário, as funções serão de X em $\mathbb{R}$.

(1.5) Definição. Dizemos que uma seqüência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, converge em G-medida para uma função f se, e somente se, para todo $\delta \in]0, \infty[$ tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v^*(G, \{x \in X: |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0.$$

Como consequência de (1.5) temos o resultado abaixo que é relevante para adaptar as demonstrações encontradas em [DS].

(1.6) Observação. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções que converge em G-medida para uma função f , então dados $\epsilon, \delta \in]0, \infty[$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$, existe $F_n \in H$ satisfazendo

$$v(G, F_n) < \epsilon \text{ e } \|f_n - f\|_{F_n} \leq \delta.$$

(1.7) Definição. Dizemos que uma função f é H-simples se, e somente se, existem $(F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{D}(H, X)$ e $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $f = \sum_{i=1}^n c_i \xi_{F_i}$.

(1.8) Definição. Dizemos que uma função f é G-mensurável se, e somente se, existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções H-simples que converge em G-medida para f .

§2. Integração

(2.1) Definição. Dizemos que uma função H-simples f , é G-integrável se, e somente se, para todo $c \in \mathbb{R}$ com $c \neq 0$ tem-se $v(G, f^{-1}(\{c\})) < \infty$.

Observemos que, se f é H-simples, $c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, então $f^{-1}(\{c\}) \in H$.

Com (2.1) obtemos a observação abaixo, que também é importante para adaptar as demonstrações encontradas em [DS].

(2.2) Observação. Se f é uma função H -simples e G -integrável, então existe $F \in H$ tal que $v(G, F) < \infty$ e $f \xi_F^c = 0$.

(2.3) Definição. Seja f uma função H -simples e G -integrável. Se $f = \sum_{i=1}^n c_i \xi_{F_i}$ onde $(F_1, F_2, \dots, F_n) \in \mathcal{D}(H, X)$ e $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ de finimos a integral de f (relativa a G) sobre $E \in A$ por

$$\int_E f dG = \sum_{i=1}^n c_i G(E \cap F_i).$$

Convencionamos que $0 \cdot \infty = 0$.

É fácil verificar que a definição acima independe da representação de f .

Observemos que a função nula g é H -simples, G -integrável e a integral sobre $E \in A$ é zero, pois $g = 0 \xi_\emptyset$.

(2.4) Proposição. Se f é uma função H -simples e G -integrável, então

(i) f e $|f|$ são $v(G, \cdot)$ -integráveis;

(ii) se $E \in A$, então $f \xi_E$ é G -integrável e

$$\int_E f dG = \int_X f \xi_E dG;$$

(iii) $\int_X |f| dv(G, \cdot) \geq 0$;

(iv) $|\int_X f dG| \leq \int_X |f| dv(G, \cdot)$;

(v) se g é uma função H -simples e G -integrável, então para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a função $\alpha f + \beta g$ é H -simples, G -integrável e

$$\int_X (\alpha f + \beta g) dG = \alpha \int_X f dG + \beta \int_X g dG;$$

(vi) se $E_1, E_2 \in A$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, então

$$\int_{E_1 \cup E_2} f dG = \int_{E_1} f dG + \int_{E_2} f dG;$$

(vii) se $E \in A$, então $\int_E |f| dv(G, \cdot) \leq \int_X |f| dv(G, \cdot);$

(viii) dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que se $F \in H$
e $v(G, F) < \delta$ então $\int_F |f| dv(G, \cdot) < \epsilon.$

Ainda vale que, se $\lambda(E) = \int_E f dG$ para $E \in A$, então

(ix) λ é uma medida finita em A ;

(x) $v(\lambda, E) = \int_E |f| dv(G, \cdot).$

Com o resultado abaixo diremos quando uma função é G -integrável.

(2.5) Proposição. Se $(f_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências de funções H -simples e G -integráveis, que convergem em G -medida para a mesma função f e, se ainda para $j \in \{1, 2\}$ tem-se

(i) $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_X |f_n^j - f_m^j| dv(G, \cdot) = 0,$

então

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n^1 dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n^2 dG.$

(2.6) Definição. Uma função f é G -integrável se, e somente se, existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções H -simples e G -integráveis, tal que

(i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f ;

$$(ii) \lim_{m,n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m| dv(G,.) = 0.$$

Se f é G -integrável, definimos a integral de f (relativa a G) sobre $E \in \mathcal{A}$ por

$$\int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG.$$

(2.7) Definição. Dizemos que uma propriedade P vale G -quase sempre em X (escrevemos $\langle G\text{-q.s.} \rangle$) se o conjunto E dos pontos de X para os quais P não está definida ou P não é verdadeira é tal que $v^+(G, E) = 0$.

Lembrando (2.4) e (2.6) obtemos o seguinte resultado.

(2.8) Proposição. Se f é uma função G -integrável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções H -simples e G -integráveis satisfazendo (2.6.i) e (2.6.ii), então

(i) os sete primeiros itens de (2.4) são verdadeiros para funções G -integráveis, observando que

$$\int_X |f| dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| dG;$$

$$\int_X f dv(G,.) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dv(G,.);$$

$$\int_X |f| dv(G,.) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| dv(G,.).$$

Ainda tem-se

(ii) se g é uma função G -integrável e $|f| \leq |g|$ $\langle G\text{-q.s.} \rangle$, então

$$\int_X |f| dv(G,.) \leq \int_X |g| dv(G,.);$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| dv(G, \cdot) = 0.$$

Com (2.9) vemos que os três últimos itens de (2.4) também são verdadeiros para funções G-integráveis.

(2.9) Proposição. Se f é uma função G-integrável e $\lambda(E) = \int_E f dG$, para $E \in A$, então

(i) λ é uma medida finita em A ;

$$(ii) v(\lambda, E) = \int_E |f| dv(G, \cdot), \text{ para } E \in A;$$

(iii) dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que,

$$\text{se } F \in H \text{ e } v(G, F) < \delta, \text{ então } v(\lambda, F) = \int_F |f| dv(G, \cdot) < \epsilon.$$

Ainda tem-se

(iv) dado $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $F_\epsilon \in H$ com $v(G, F_\epsilon) < \infty$ e tal que $v(\lambda, F_\epsilon^c) = \int_{F_\epsilon^c} |f| dv(G, \cdot) < \epsilon$;

$$(v) \int_X |f| dv(G, \cdot) = 0 \text{ se, e somente se, para todo}$$

$\delta \in]0, \infty[$ vale que $v^*(G, \{x \in X: |f(x)| > \delta\}) = 0$.

(2.10) Proposição. Sejam f e g funções G-mensuráveis. Se g é G-integrável e $|f| \leq |g|$ <G-q.s.>, então

(i) f é G-integrável.

Além disso, existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções H-simples e G-integráveis, com $|f_n| \leq 2|f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que converge em $\bar{G}$ -medida para f , e que para $E \in A$ tem-se

$$(ii) \int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG.$$

Segue de (2.10) que f é G -integrável se, e somente se, $|f|$ é G -integrável.

A seguir fornecemos condições necessárias e suficientes para f ser G -integrável.

(2.11) Proposição. Se f é uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções G -integráveis, então f é G -integrável e

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| dv(G, \cdot) = 0$ se, e somente se, são verdadeiras as seguintes asserções:

- (i) a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f ;
- (ii) para todo $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que se $F \in H$ e $v(G, F) < \delta$, então $\int_F |f_n| dv(G, \cdot) < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) para todo $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $F_\epsilon \in H$ tal que $v(G, F_\epsilon) < \epsilon$ e $\int_{F_\epsilon^c} |f_n| dv(G, \cdot) < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como consequência de (2.11) obtemos o resultado abaixo, que é conhecido como o Teorema de Vitali.

(2.12) Proposição. Sejam f uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções G -integráveis satisfazendo (2.11.i), (2.11.ii) e (2.11.iii), então f é G -integrável e para todo $E \in A$ tem-se

$$\int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG.$$

O teorema seguinte segue de (2.12).

(2.13) Teorema. (Teorema da "Convergência Dominada"). Sejam f uma função e $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções G -mensuráveis que converge em G -medida para f . Se g é uma função G -integrável, com $|f_n| \leq |g|$ G -q.s. para todo $n \in \mathbb{N}$, então

- (i) f é G -integrável;
- (ii) para todo $E \in \mathcal{A}$ tem-se

$$\int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG.$$

A proposição abaixo é interessante.

(2.14) Proposição. Se $\tilde{G}$ é uma medida em $\mathcal{A}$ que é uma extensão de G e f é uma função G -integrável, então f é $\tilde{G}$ -integrável, e para todo $E \in \mathcal{A}$ tem-se

$$\int_E f dG = \int_E f d\tilde{G},$$

sendo que a integral relativa a $\tilde{G}$ coincide com a dada por Dunford e Schwartz em [DS], pois $\tilde{G}$ está definida em $\mathcal{A}$.

Notemos que, se G é uma medida em H e de variação limitada, então existe uma extensão $\tilde{G}$ de G em $\mathcal{A}$. De fato, se $G_1 = \frac{1}{2} (G + v(G, \cdot))$ e $G_2 = \frac{1}{2} (v(G, \cdot) - G)$, então G_1 e G_2 são medidas em H não-negativas, $G = G_1 - G_2$, $v(G, \cdot) = G_1 + G_2$, e a medida $\tilde{G}$ definida em $\mathcal{A}$ pela igualdade

$$\tilde{G}(E) = \sup \{G_1(F) : F \subseteq E \text{ e } F \in H\} - \sup \{G_2(F) : F \subseteq E \text{ e } F \in H\},$$

é uma extensão de G .

§3. Um exemplo

A teoria de integração acima foi essencial para a obtenção de uma caracterização do dual de um espaço de Orlicz $L_A(X, \mathcal{E}, \mu)$, que foi o nosso objetivo em [F]. A seguir mostramos que para medidas G , definidas em determinados ideais, toda $f \in L_A(X, \mathcal{E}, \mu)$ é G -integrá-

vel. Para isto lembramos os seguintes conceitos.

Dizemos que uma função A de $[0, \infty[$ em $[0, \infty]$, é uma função de Young se, existe uma função p de $[0, \infty[$ em $[0, \infty]$, não-decrescente, com $0 < p(t_0) < \infty$ para algum $t_0 \neq 0$ e tal que

$$A(u) = \int_0^u p(t)dt, \text{ para todo } u \in [0, \infty[.$$

As funções $A_1 = 0$ e $A_2 = \infty \chi_{]0, \infty[}$ não são funções de Young.

Denotando por $\bar{A}$ a função de $[0, \infty[$ em $[0, \infty]$ dada por

$$\bar{A}(u) = \sup\{uv - A(v) : v \in [0, \infty[\},$$

prova-se que $\bar{A}$ é uma função de Young e $\bar{\bar{A}} = A$. Esta função $\bar{A}$ é chamada função de Young complementar de A .

Daqui para frente A será uma função de Young, $\bar{A}$ a função de Young complementar de A ,

$$a = \sup\{u \in [0, \infty[: A(u) = 0\} \text{ e } b = \inf\{u \in [0, \infty[: A(u) = \infty\}.$$

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida positiva que não tem átomos de medida infinita, isto é, Σ é uma σ -álgebra de subconjuntos de X , μ é uma medida σ -aditiva definida em Σ e com valores em $[0, \infty]$ e se $E \in \Sigma$ e $\mu(E) = \infty$, então existe $F \in \Sigma$, $F \subset E$ e tal que $0 < \mu(F) < \infty$.

A menos de menção em contrário as funções são de X em $\mathbb{R}$, e a terminologia e a notação são como em [H]. A integral em relação a μ é a habitual.

Observemos ainda o seguinte.

(i) Se uma propriedade P vale μ -q.s. (isto é, o conjunto E dos pontos de X para os quais P não está definida ou P não é verdadeira é tal que $E \in \Sigma$ e $\mu(E) = 0$), então P vale μ -q.s.. A recíproca é verdadeira se, e somente se, o espaço de medida (X, Σ, μ) for completo.

(ii) Se $f \in L_1(X, \Sigma, \mu)$, então f é μ -integrável e a integral dada em (2.6) coincide com a habitual.

O espaço de Orlicz $L_A(X, \Sigma, \mu)$ é o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial das funções f , definidas em X e com valores em $\mathbb{R}$, mensuráveis, tais que,

para algum $k \in]0, \infty[$, que depende de f , se tenha $\int_X A(k|f|) d\mu < \infty$. Este espaço será denotado simplesmente por L_A .

O espaço L_A com a topologia proveniente da semi-norma $\|\cdot\|_A$, sendo

$$\|f\|_A = \inf\{k \in]0, \infty[: \int_X A(\frac{|f|}{k}) d\mu \leq 1\},$$

é um espaço vetorial topológico completo.

Para alcançar nosso objetivo é importante observar que

- (i) se $E \in \Sigma$ e $\mu(E) < \infty$, então $\xi_E \in L_A$;
- (ii) se $E \in \Sigma$, $\mu(E) = \infty$ e $a > 0$, então $\xi_E \in L_A$;
- (iii) se $E \in \Sigma$, $\mu(E) = \infty$ e $a = 0$, então $\xi_E \notin L_A$.

Agora construiremos um espaço de medidas G , de modo que toda $f \in L_A$ seja G -integrável, no sentido do parágrafo anterior.

Lembramos que as demonstrações dos próximos resultados podem ser encontradas em [F].

Denotamos por Σ_1 o conjunto dos $E \in \Sigma$ tais que $\mu(E) < \infty$, por H um ideal de Σ que contém Σ_1 e por G uma medida em H com $G \ll \mu$.

(3.1) Definição. Para $E \in \Sigma$ e $k \in]0, \infty[$ definimos

$$I_{\bar{A}}\left(\frac{G}{k}, E\right) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n \bar{A}\left(\frac{|G(E_i)|}{k\mu(E_i)}\right) \mu(E_i) : (E_1, E_2, \dots, E_n) \in \mathcal{D}(\Sigma_1, E)\right\},$$

com a convenção de que $0/0 = 0$.

(3.2) Definição. Convencionando que $\inf \emptyset = \infty$, denotamos

$$\alpha_G^{\bar{A}} = \inf\left\{k \in]0, \infty[: I_{\bar{A}}\left(\frac{G}{k}, X\right) \leq 1\right\}.$$

Prova-se que se $0 < \alpha_G^{\bar{A}} < \infty$, então $I_{\bar{A}}\left(\frac{G}{\alpha_G^{\bar{A}}}, X\right) \leq 1$.

(3.3) Exemplo. Se $\bar{a} = 0$, $g \in L_{\bar{A}}$ é não-negativa e

$$G(E) = \int_E g d\mu, \text{ para todo } E \in \Sigma,$$

então $G \ll \mu$, $I_{\bar{A}}\left(\frac{G}{k}, E\right) = \int_E \bar{A}\left(\frac{g}{k}\right) d\mu$, para

$E \in \Sigma$ e $k \in]0, \infty[$, e $\alpha_{\bar{A}}^G = \|g\|_{\bar{A}}$.

(3.4) Definição. Seja H ideal de Σ que contém Σ_1 ; no caso em que $a > 0$, seja $H = \Sigma$. Denotaremos por $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ o conjunto das medidas G , definidas em H e com valores em $\mathbb{R}$, tais que

- (i) $G \ll \mu$;
- (ii) $\nu(G, \cdot)$ é uma medida finita em H ;
- (iii) $\alpha_{\bar{A}}^G < \infty$.

Com a proposição abaixo é fácil verificar que $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

(3.5) Proposição. Sejam $G_1, G_2 \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ e $\gamma \in \mathbb{R}$,

então

- (i) $\alpha_{\bar{A}}^{G_1} = 0 \iff G_1(E) = 0$, para $E \in \Sigma_1$;
- (ii) $\alpha_{\bar{A}}^{G_1 + G_2} \leq \alpha_{\bar{A}}^{G_1} + \alpha_{\bar{A}}^{G_2}$;
- (iii) $\alpha_{\bar{A}}^{\gamma G_1} = |\gamma| \alpha_{\bar{A}}^{G_1}$.

Observando que se $b < \infty$, então toda $f \in L_A$ é limitada μ -q.s., que se $b = \infty$ e $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ então G é μ -contínua (isto é, para todo $\epsilon \in]0, \infty[$, existe $\delta \in]0, \infty[$ tal que, se $E \in \Sigma$ e $\mu(E) < \delta$, então $v(G, E) < \epsilon$), e ainda que se $f \in L_A$, então existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples de L_A que converge em μ -medida para f , obtém-se o seguinte.

(3.6) Proposição. Se $f \in L_A$, então existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples de L_A tal que

- (i) $|f_n - f| \leq |f|$ e $|f_n| \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f μ -q.s.

Se f é não-negativa tem-se

- (iii) $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ainda, para toda $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ tem-se

- (iv) f_n é H -simples e G -integrável, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (v) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f .

Para o próximo teorema, com o qual alcançamos nosso objetivo, é necessário (3.7).

(3.7) Proposição. Se $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$, e $f \in L_A$ é simples e não-negativa, então

$$(i) \int_X f dv(G, \cdot) \leq \|f\|_A (2\alpha_{\bar{A}}^G + c),$$

sendo que $c=0$ se $a=0$ ou $\mu(X) < \infty$, e $c=a v(G, X)$ se $a>0$ e $\mu(X) = \infty$.

(3.8) Teorema. Se $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$, $f \in L_A$ é não-negativa e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções simples de L_A como em (3.6), então a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz (2.11.i), (2.11.ii) e (2.11.iii).

Aplicando (3.6) e (3.8) a $f_+ = \max\{f, 0\}$ e a $f_- = \max\{-f, 0\}$, lem branco (2.12) e (3.7) obtemos o seguinte resultado.

(3.9) Corolário. Se $f \in L_A$, então existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funções simples de L_A tal que

$$(i) \quad |f - f_n| \leq |f| \quad \text{e} \quad |f_n| \leq |f|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{converge para } f \quad \text{u-q.s.}$$

Ainda, para todo $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ tem-se

(iii) f_n é H -simples (1.7) e G -integrável (2.1), para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iv) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em G -medida para f ;

(v) f é G -integrável (2.6) e para todo $E \in \Sigma$ tem-se

$$\int_E f dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dG;$$

$$(vi) \quad \left| \int_X f dG \right| \leq \int_X |f| d\nu(G, \cdot) \leq \|f\|_A (2\alpha_{\bar{A}} + c) \quad \text{, sendo } c$$

como em (3.7).

Como consequência de (3.9) temos (3.10).

(3.10) Proposição. Se $G_1, G_2 \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$, $f \in L_A$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $E \in \Sigma$, então

$$(i) \quad \int_E f d(G_1 + G_2) = \int_E f dG_1 + \int_E f dG_2;$$

$$(ii) \quad \int_E f d(\gamma G_1) = \gamma \int_E f dG_1.$$

Com (3.11) o espaço $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ é um espaço semi-normado.

(3.11) Proposição. Se $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$ e

$$\|G\|_{\bar{A}} = \sup \left\{ \left| \int_X f dG \right| : f \in L_A \text{ e } \|f\|_A \leq 1 \right\},$$

então $\|\cdot\|_{\bar{A}}$ é uma semi-norma em $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$.

(3.12) Proposição. Se $a=0$ ou $\mu(X) < \infty$, então $\alpha_{(\cdot)}^{\bar{A}}$ e $\|\cdot\|_{\bar{A}}$ são normas equivalentes em $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma_1)$. Se $a>0$ e $b<\infty$, então $\|\cdot\|_{\bar{A}}$ e $v(\cdot, X)$ são normas equivalentes em $G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, \Sigma)$.

Para finalizar verificaremos que existem medidas G não-nulas satisfazendo (3.4.i), (3.4.ii) e (3.4.iii).

Sejam A uma função de Young e H o ideal de Σ tal que $H = \Sigma_1$ se $a=0$, e $H = \Sigma$ se $a>0$. Observando que $\xi_E \in L_A$ se, e somente se, $E \in H$, temos a seguinte proposição.

(3.13) Proposição. Se $x^* \in (L_A)^*$ e G é a função definida em H por $G(E) = x^*(\xi_E)$, então

- (i) G é uma medida finita em H ;
- (ii) $G < \mu$;
- (iii) $v(G, E) \leq 2 \|x^*\| \cdot \|\xi_E\|_A$, para todo $E \in H$;
- (iv) $v(G, \cdot)$ é uma medida finita em H ;
- (v) $\alpha_G^{\bar{A}} \leq \|x^*\| < \infty$;
- (vi) $G \in G_{\bar{A}}(X, \Sigma, \mu, H)$.

REFERÊNCIAS

- [DS] Dunford, N. & Schwartz, J.T. General theory. In: ———— *Linear Operators*. New York, Interscience, 1967, v1.
- [F] Fernandez, Roseli. *Caracterização do dual de um espaço de Orlicz*. São Paulo, 1986, 221 p. Dissertação de Mestrado, IME-USP.
- [H] Hönig, C.S. *A integral de Lebesgue e suas aplicações*. Rio de Janeiro, IMPA, 1977, 298 p. (Trabalho apresentado no 11º Colóquio

Brasileiro de Matemática).

- [R-1] Rao M.M. Linear functional on Orlicz spaces: *Nieuw Arch. Wisk.*, 12 (2): 77—98, 1964.
- [R-2] Rao M.M. Linear functionals on Orlicz spaces: general theory. *Pacific J. Math.*, 25 (3): 553-584, 1968.