rancisco ntonio
F. A. LACAZ NETTO
Prof. Interino da Escola Politécnica da Universidade
de S. Paulo

ELEMENTOS IMAGINÁRIOS IMPRÓPRIOS

Tése de concurso
para a Cátedra de
Complementos de Geometria Analítica e Projetiva
da Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo

Elementos imaginários impróprios

1. Em Geometria, os elementos imaginários podem ser estudados de dois modos: — um *analítico,* "revestimento geométrico de fatos puramente algébricos", outro *sintético,* em que os elementos imaginários são representados por *figuras* reais, no sentido primitivo do termo.

2. Neste trabalho, propômo-nos estudar a teoria dos imaginários impróprios, segundo a *orientação clássica* de *Staudt.*

Limitando-nos ao estudo dos imaginários impróprios, pressupomos os conceitos de *ponto, reta* e *plano complexos,* bem como as definições de *pertinência* e *paralelismo* para esses elementos que, como é sabido, satisfazem os *postulados* de *pertinência.*

3. Nos compêndios, em geral, as propriedades dos elementos imaginários são estudadas *analiticamente;* isto não apresenta, sob o ponto de vista lógico, nenhuma inconveniência, mesmo que se considere o problema com "espírito geométrico" — porque as Geometrias, é este o conceito moderno, têm por objeto o estudo das propriedades das figuras, invariantes com determinados *grupos de transformações,* e não se caracterizam pelo método empregado nas demonstrações dessas propriedades.

Si os métodos não caracterizam as Geometrias, a unidade deles é, no entanto, um *carater de perfeição,* que devemos respeitar.

Tendo em vista, a lacuna que sentimos, em Geometria, no *estudo sintético do imaginarismo* — o fantasma do imaginarismo, na expressão de Steiner, escolhemos este assunto para nossa tese, no concurso para provimento da cadeira número 2, da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Limitamo-nos ao estudo dos imaginários impróprios, porque nosso objetivo principal, neste trabalho, é expor de maneira *sintética*, as propriedades do *círculo absoluto*, das quais resultam de maneira rápida e elegante, as *propriedades métricas das figuras*, como sabemos, relacionadas com a *noção de perpendicularismo*, que estendemos ao espaço complexo, com a introdução do absoluto.

4. **Definições.** Os pontos imaginários definidos por *involuções absolutas* dizem-se *pontos cíclicos*.

Os planos imaginários definidos por *involuções ortogonais*, dizem-se *planos isótropos*. Os planos isótropos tambem são chamados *planos de jazedura* ou *orientação absoluta*.

As retas definidas por *involuções circulares* e as retas de *segunda espécie*, que pertençam a um *ponto cíclico*, dizem-se *retas isótropas*.

As retas isótropas tambem são chamadas retas de *direção absoluta*.

As retas *isótropas impróprias* dizem-se *retas cíclicas*.

Escólio. O *plano impróprio*, no espaço complexo, pode ser considerado um *plano isótropo*, e como tal, *elemento imaginário*.

5. **Teorema.** Na exposição *sintética* dos imaginários impróprios, é de importância capital a seguinte proposição do espaço real: *dada uma involução de planos, elítica e não ortogonal, por todo ponto próprio de seu eixo, passam dois planos*, que cortam a *involução dada, segundo uma involução circular*.

Demonstremos o teorema enunciado.

Seja, com efeito, uma involução I_0 elítica e *não ortogonal*, em torno de uma reta o.

Nesta involução haverá dois planos α e β, *conjugados* e *ortogonais*: — o par comum à involução dada I_0, e à involução ortogonal em torno do mesmo eixo.

Na involução I_0, haverá ainda dois planos γ e δ, *conjugados* e *simétricos em relação aos planos* α e β: — o par comum à involução I_0 e à involução hiperbólica, cujos elementos duplos são α e β.

O grupo $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ é, portanto, *harmônico* e como α e β, *são ortogonais*, eles são os *planos bissetores* dos ângulos formados por γ e δ

Não sendo I_0 ortogonal, os planos γ e δ não podem ser perpendiculares e um dos ângulos formados por α e os planos γ e δ será menor que $\frac{\pi}{4}$; seja, por suposição, o ângulo formado pelos planos α e γ.

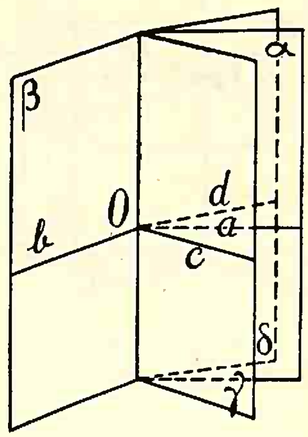

Fig. 1

Pois bem, no plano α, por um ponto 0 do eixo, levantemos a *reta a* perpendicular ao eixo. Si cortarmos agora, os planos considerados, por um plano σ da reta a, como esta reta é perpendicular ao plano β, interseção $b \equiv \beta . \sigma$ será perpendicular à reta a.

Façamos agora $\gamma . \sigma \equiv c$ e $\delta . \sigma \equiv d$; porque o grupo $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ é harmônico, (a, b, c, d) tambem será harmônico.

Como já observamos, as *retas a e b são perpendiculares* e sendo $(a, b, c, d) = -1$, as retas a e b são as bissetrizes dos ângulos formados por c e d.

Ora, se desejamos cortar os planos de I_0, de modo que a involução obtida seja circular, é *necessário* e *suficiente* que o ângulo das retas a e c seja igual a $\frac{\pi}{\;}$ [illegible] .

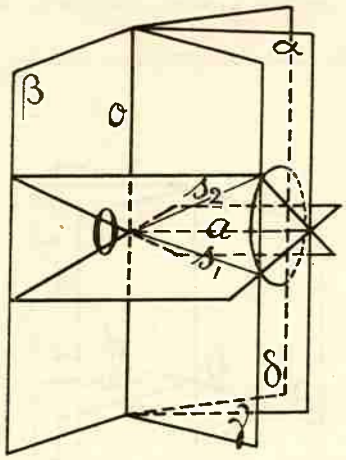

Fig. 2

Construamos, pois, um cône de revolução, com vertice em 0, e eixo a, cujo ângulo seja igual a 45º.

As interseções desse cone com o plano γ determinam duas *retas reais*, s_1 e s_2, pois o ângulo $\widehat{\alpha\gamma} < \frac{\pi}{4}$. Essas retas s_1 e s_2 determinam com a reta a, os dois planos procurados, cuja *existência* e *dualidade* queríamos demonstrar.

6. **Teorema.** Os planos da proposição anterior pertencem a dois feixes impróprios.

Imediato.

7. **Teorema.** Dada uma involução circular de planos, por todo ponto de seu eixo, passa um só plano que corta a involução, segundo uma involução circular. (Espaço real).

Basta considerar a demonstração do teorema do número 5, no caso do ângulo formado por α e γ ser igual a $\frac{\pi}{2}$ que é o nosso caso, si a involução de partida é ortogonal.

Nessa hipótese, é imediato que o plano impróprio tambem goza da propriedade de cortar a involução dos planos, segundo uma involução circular e não precisamos fazer, no teorema, a restrição do ponto do eixo ser próprio.

8. **Teorema.** Os planos do teorema anterior formam um só feixe impróprio, de planos perpendiculares ao eixo.

Imediato.

9. **Teorema.** As retas isótropas definidas por involuções circulares, são retas de primeira espécie.

As retas isótropas definidas por involuções circulares contêm um *ponto real,* o centro das involuções que as determinam; portanto, são retas de primeira espécie.

10. **Teorema.** Si um ponto é cíclico, seu conjugado tambem é cíclico.

Um ponto cíclico é, por definição, uma *involução absoluta orientada.* Seu ponto conjugado, ainda, por definição, é a mesma involução, orientada no sentido oposto e, portanto, é um ponto cíclico, si a involução que lhe corresponde é absoluta.

11. **Teorema.** Si um plano é isótropo, seu conjugado tambem é isótropo.

Demonstração análoga à anterior.

12. **Teorema.** Si uma reta é isótropa, sua conjugada tambem é isótropa.

Uma reta isótropa é, por definição, uma involução de retas, circular e orientada, ou uma reta de segunda espécie, que passa por um ponto cíclico.

Na primeira hipótese, a reta conjugada é definida pela mesma involução, orientada no sentido oposto e, portanto, ainda é isótropa, si a involução que lhe corresponde é circular.

Na segunda hipótese, a reta isótropa é determinada por dois de seus pontos, dos quais podemos supor que um seja *cíclico;* sua reta conjugada, por definição, é a reta determinada pelos conjugados destes dois pontos. Ora, de acordo com o teorema do número 10, o conjugado de um ponto cíclico é cíclico e, portanto, a reta conjugada de uma reta isótropa de segunda espécie, ainda é isótropa, de segunda espécie.

Escólio. Admitimos conhecida a proposição, que afirma ser de segunda espécie, a reta conjugada de outra reta de segunda espécie.

13. **Teorema.** Toda reta isótropa, não cíclica, tem um só ponto impróprio.

Uma reta *imaginária própria* tem um só ponto impróprio; ora, toda reta isótropa é imaginária e como, por hipótese, consideramos reta isótropa não cíclica, i. é., reta própria, ela terá um só ponto impróprio.

14. **Teorema.** Todos os pontos de uma reta cíclica são impróprios.

As retas cíclicas são retas imaginárias *impróprias;* portanto, todos seus pontos são impróprios.

15. **Teorema.** O ponto impróprio de uma reta isótropa, não cíclica, é um ponto cíclico.

Si a reta é de segunda espécie, de acordo com a própria definição, seu ponto impróprio é cíclico.

Si a reta é isótropa, de primeira espécie, obtem-se seu ponto impróprio, cortando-se a reta isótropa pela reta *imprópria* de seu plano *suporte.* Ora, sendo a reta isótropa, de primeira espécie, sua involução é circular e a involução na reta imprópria é a *involução absoluta.* Si a involução na reta imprópria é a involução absoluta, o ponto é cíclico.

16. **Teorema.** Os pontos cíclicos, de retas isótropas conjugadas, são pontos conjugados.

Como já vimos, ha retas isótropas de primeira e de segunda espécie. No caso de serem elas de primeira espécie, as retas conjugadas são definidas pela mesma involução circular, orientadas de maneiras opostas (*postulado da ordem*), e porque temos, num mesmo *eixo*, a mesma involução, orientada de maneiras opostas, os pontos cíclicos são conjugados.

No caso, agora, de serem as retas isótropas, de segunda espécie, si uma passa por um ponto cíclico, a outra passa pelo seu conjugado e, portanto, os pontos cíclicos dessas retas são pontos conjugados.

17. **Teorema.** Quando existe, a interseção de uma reta isótropa própria, com uma reta imprópria, é um ponto cíclico.

A interseção deve ser um ponto impróprio. O único ponto impróprio de uma reta isótropa *própria* é seu ponto cíclico. Logo, este é a interseção, quando ela existe.

18. **Teorema.** Os pontos cíclicos de um plano separam harmonicamente dois pontos reais, conjugados na involução absoluta desse plano.

Para demonstrarmos a proposição, tomemos na reta imprópria de um plano α, um ponto cíclico C^*_∞ e mais dois pontos reais A_∞ e B_∞, correspondentes a retas perpendiculares, e determinemos o conjugado harmônico de C^*_∞ em relação a A_∞ e B_∞.

Construamos, pois, um quadrângulo plano completo, com dois lados opostos por A_∞, dois outros lados opostos por B_∞, um quinto por C^*_∞ e provemos que o último lado passará pelo conjugado de C^*_∞, i.e., pelo outro ponto ciclíco do plano.

Sejam a e a' duas retas por A_∞. De um ponto L de a, projetemos B_∞ sobre a' e determinemos o ponto M ; ainda de L , projetemos o ponto C^*_∞ sobre a' e determinemos o ponto N^* imaginário.

$$N^* \equiv \begin{pmatrix} M & S \\ A_\infty & R \end{pmatrix}$$

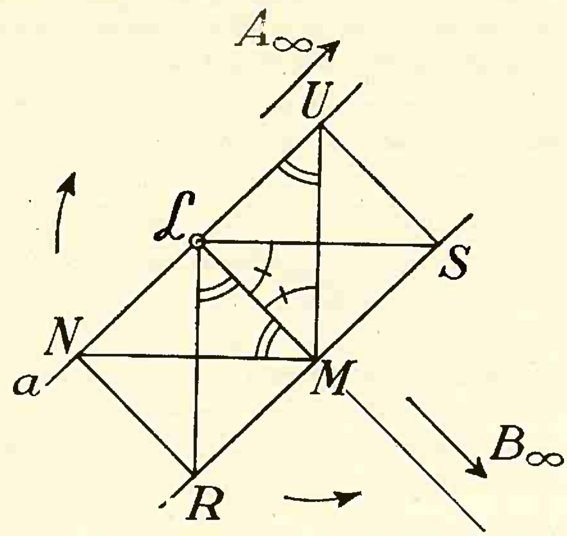

Fig. 3

Em seguida projetemos N^* de B_∞ sobre a e determinemos K^* tambem imaginário.

$$K^* \equiv \begin{pmatrix} L & U \\ A_\infty & N \end{pmatrix}$$

Este ponto K^* projetado de M sobre a reta A_∞ B_∞ dá-nos o conjugado de C^*_∞ em relação aos pontos A_∞ e B_∞.

Ora, a involução em torno de M, quando se projeta o ponto K^* é uma involução circular, sendo a reta a′ perpendicular a ML e a reta MN, perpendicular a MU, como resulta de considerações elementares sobre propriedades de retângulos.

Si a involução em torno de M é circular, o ponto obtido na reta A_∞ B_∞ é um ponto cíclico; como C^*_∞ não pode ser conjugado dele mesmo, em relação aos pontos A_∞ e B_∞, projetando-se K^* de M sobre a reta imprópria do plano, obtemos o outro ponto cíclico desse plano.

19. **Teorema.** A condição necessária e suficiente para que duas retas reais sejam perpendiculares, é que seus pontos impróprios separem harmônicamente os pontos cíclicos dos planos paralelos que as retas determinam.

Consequência da proposição anterior.

20. **Teorema.** Os pontos cíclicos de um plano são os pontos duplos da involução absoluta desse plano.

Corolário do teorema do número 18.

21. **Teorema.** Por uma reta real e própria, passam dois planos isótropos e só dois, conjugados entre si.

Com efeito, em torno de uma reta o, real e própria, existe uma só involução ortogonal não orientada. Como pelo *postulado da ordem*, podemos orientá-las de dois modos diversos, temos, portanto, duas e só duas involuções ortogonais orientadas em torno de o.

Ora, de acordo com as definições do número 4, os planos correspondentes a estas involuções são isótropos e conjugados, e, portanto, fica demonstrado que por uma reta real e própria, passam dois e só dois planos isótropos, conjugados entre si.

22. **Teorema.** Os planos isótropos de uma reta o, real e própria, separam harmônicamente dois planos reais, conjugados na involução ortogonal em torno dessa reta.

Proposição dual (no espaço) do teorema do número 18.

23. **Teorema.** A condição necessária e suficiente para que dois planos reais sejam perpendiculares é que separem harmônicamente os planos isótropos da reta que determinam.

Consequência da proposição anterior.

24. **Teorema.** Os planos isótropos de uma reta o, real e própria, são os elementos duplos da involução ortogonal em torno dessa reta.

Corolário do teorema do número 22.

25. **Teorema.** A condição necessária e suficiente para que uma cônica seja um círculo é que passe pelos pontos cíclicos de seu plano.

Esta proposição é sob *fórma imaginária,* o conhecido teorema: a condição necessária e suficiente para que uma cônica seja um círculo, é que a involução subordinada na reta imprópria de seu plano, seja a involução absoluta.

Demonstremos o teorema.

Seja uma cônica arbitrária γ, que passe pelos pontos cíclicos de seu plano.

A involução subordinada na reta imprópria de seu plano é, portanto, a involução absoluta, e a cônica é uma elípse — ou seja, *uma cônica com centro.*

Tomemos, então, dois pontos reais A e B de γ. Ora, a reta que une o centro O da cônica ao ponto médio M do segmento AB, dá-nos a direção do diâmetro conjugado àquele que é paralelo à reta AB.

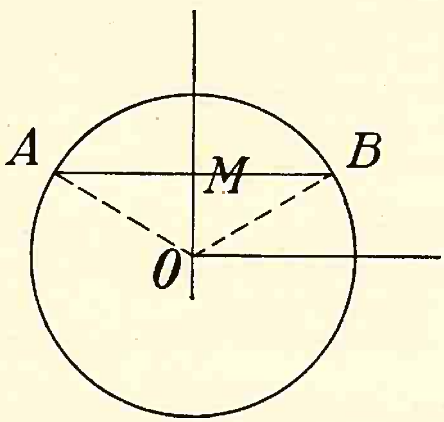

Fig. 4

Pelas condições da hipótese, AB e OM são, portanto, direções conjugadas, e assim podemos concluir que OA = OB.

Fixado o ponto A e fazendo variar o ponto B sobre γ, concluimos que a cônica é o lugar dos pontos de seu plano, cuja distância ao ponto O é a constante OA, i.e., a circunsferência de centro O e raio OA.

Reciprocamente, seja uma circunsferência C de centro O e raio r. Tracemos nela *dois diâmetros a e b perpendiculares,* de pontos impróprios A_∞ e B_∞.

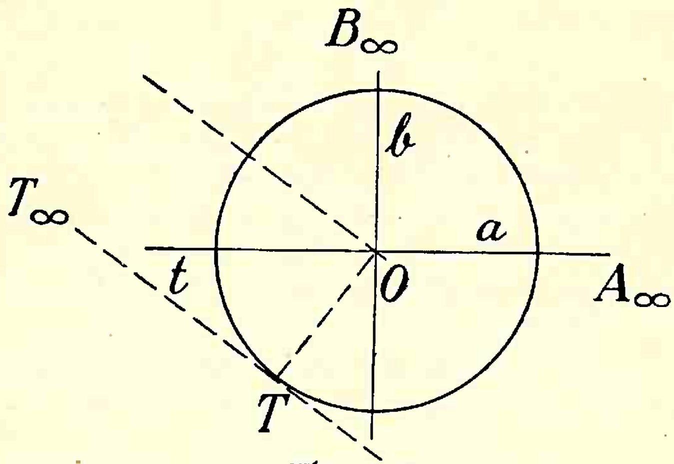

Fig. 5

Na circunferência C, tomemos então um ponto T, distinto das interseções dos diâmetros a e b com a circunferência; seja t a tangente à curva nesse ponto T, *real,* por hipotese.

Consideremos, agora, a correlação ou reciprocidade

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} B_\infty & A_\infty & O & T \\ a & b & A_\infty B_\infty & t \end{pmatrix}$$

Sendo o triângulo $OA_\infty B_\infty$ *auto conjugado,* esta correlação é uma *polaridade,* segundo o *teorema fundamental da polaridade.*

Seja γ a cônica dessa polaridade; provaremos que ela é uma circunferência e se confunde com C.

Com efeito, a involução I_o, subordinada em torno de O, faz corresponder ao diâmetro a, o diâmetro b. Como ao diâmetro OT, na polaridade Ω, pelo *teorema da reciprocidade,* corresponde o polo

$T_\infty B_\infty \cdot t \equiv T_\infty$, na involução I_o, o diâmetro OT é conjugado de OT_∞.

$$I_o \equiv \begin{pmatrix} b & OT_\infty \\ a & OT \end{pmatrix}$$

Sendo OT e OT_∞ ortogonais, a involução dos diâmetros conjugados é circular e, pela primeira parte do teorema, γ — a cônica fundamental da polaridade Ω, é uma circunferência.

Ora, o centro dessa circunferência é o ponto O e como ela passa por T, é a própria circunferência C ; fica assim provado que a circunferência C é uma cônica, cônica da polaridade Ω, perfeitamente definida pela circunferência.

Como γ, por construção, passa pelos pontos ciclicos de seu plano, a circunferência *que se confunde com ela,* tambem passa por estes pontos.

Escólio. Na demonstração supomos a cônica com o lugar de pontos *reais e imaginários, considerando-se pontos imaginários da curva aqueles determinados nas retas externas, pelas involuções subordinadas nessas retas, orientadas as involuções, nos dois sentidos possiveis, de acordo com o postulado da ordem.*

26. **Teorema.** Toda cônica, pela operação de projeção e seção, pode se transformar num círculo e reciprocamente.

Seja γ uma cônica qualquer num plano π e tomemos nela, dois pontos A^* e B^*, *imaginários, próprios e conjugados.*

Seja, agora, S um ponto *real e próprio,* fóra de π, de modo que as retas SA^* e SB^* sejam *isótropas.* Desse ponto S, projetemos γ sobre um plano σ, *real* e *paralelo ao plano* $S.A^*B^*$.

Ora, no plano σ, vamos obter uma cônica C, de acordo com o teorema das *polaridades transformadas.* Como σ é paralelo às retas isótropas SA^* e SB^*, as projeções de A^* e B^* no plano σ são os pontos cíclicos desse plano.

Si A^* e B^*, por hipotese, pertencem a γ, suas projeções em σ pertencem a C.

Ora, estas projeções, como vimos, são os pontos cíclicos do plano σ ; si a cônica C pertence aos pontos cíclicos de seu plano, ela é uma circunferência, de acordo com o teorema anterior.

A recíproca é imediata. Seja um círculo C. Em seu plano σ, tomemos uma reta s, *real e própria* e de um ponto S tambem *real e fora de* σ, projetemos C, sobre um plano π, paralelo a s.

Nesta hipótese, a reta s é a reta *limite* do plano σ, na homografia que estabelecemos por projeção e seção, entre os planos σ e π.

Ora, segundo a reta s seja *externa, tangente* ou *secante* em relação ao círculo C, a cônica obtida em π, será elipse, parábola ou hipérbole.

27. **Observação.** Outras aplicações poderiamos fazer, no espaço real, do conceito de *pontos cíclicos* e *retas isótropas*, como por exemplo, na teoria das *congruências direta* e *inversa* (*no plano*) e *dos fócos das cônicas.* Deixamos, no entanto, de fazer essas aplicações, *porque nosso objetivo, neste trabalho, é expôr de maneira sintética, os fundamentos dos imaginários impróprios* e *não suas aplicações, que se tornam elementares, conhecidas as propriedades, que apresentamos em nossa tése.*

Por questão de *necessidade* para o fim que nos propuzemos, outras aplicações, no entanto, serão feitas adiante.

28. **Teorema.** Num plano isótropo, próprio, existe uma infinidade de retas isótropas, de primeira espécie.

Para uma reta imaginária, de primeira espécie, pertencer a um plano imaginário, é preciso que suas involuções sejam *perspetivas;* para uma reta isótropa, de primeira espécie, estar, portanto, num plano isótropo, é preciso cortá-lo por um *plano real,* de modo que a involução obtida seja circular.

Ora, de acordo com o teorema do número 7, dada uma involução ortogonal de planos, em cada ponto do eixo, ha um plano real nestas condições; logo, em cada ponto ha uma reta isótropa de primeira espécie, pertencente ao plano e, portanto, num plano isótropo, ha uma infinidade de retas isótropas de primeira espécie.

29. **Teorema.** Num plano isótropo, as retas isótropas de primeira espécie são paralelas, i. é., pertencem a um feixe impróprio.

Pelo teorema anterior, vimos que num plano isótropo, as retas isótropas de primeira espécie são obtidas, por seção, com um plano, em que a involução subordinada seja ortogonal; ora, pelo teorema do número 7, estes planos são paralelos e, portanto, os pontos cíclicos das retas isótropas se confundem e as retas isótropas são paralelas. i. é., pertencem a um feixe impróprio.

30. **Teorema.** Num plano isótropo próprio, ha uma infinidade de retas isótropas, de segunda espécie.

Consideremos um plano isótropo π^* e por um ponto O, próprio e real, uma reta tambem própria e real, *não-coplanar em relação* ao eixo do plano isótropo.

Si projetamos dessa reta *o ponto cíclico* do plano isótropo, vamos obter outro plano imaginário que passa por um ponto cíclico. Ora, estes dois planos determinam uma reta de segunda espécie, que, por construção, passa por um ponto cíclico e pertence ao plano isótropo.

Si fizermos variar a reta da estrela O, de modo que permaneça não coplanar ao eixo do plano isótropo, cada reta determina outra reta isótropa de segunda espécie, pertencente ao plano isótropo.

Como ha uma infinidade de retas da estrela O, nestas condições, ha uma infinidade de retas isótropas pertencente a um plano isótropo.

Escólio. O conjunto de retas isótropas, de segunda espécie, pertencentes a um plano isótropo, é duplamente infinito.

31. **Teorema.** A reta imprópria de um plano isótropo é cíclica.

Obtemos a reta imprópria de um plano isótropo, cortando-o pelo plano impróprio; a reta obtida é imprópria, e como a involução que lhe corresponde é circular — involução de retas impróprias determinadas por *planos ortogonais,* podemos concluir que a reta é cíclica, i. é., isótropa e imprópria.

32. **Teorema.** As retas isótropas, de primeira espécie, próprias, em planos isótropos paralelos, são retas paralelas.

Si os planos são paralelos, seus eixos são paralelos. Ora, as retas isótropas de primeira espécie próprias, nesses planos, são obtidas, por seção, com planos reais perpendiculares aos eixos dos planos, e por consequência, planos paralelos.

Na reta imprópria desses planos reais, as retas isótropas determinam uma só involução orientada, a involução circular, cujo sentido é o das involuções de planos isótropos paralelos que, sendo paralelos, determinam uma só involução orientada no plano impróprio, a involução da reta cíclica por onde eles passam.

Si estas retas pertencem a um só ponto cíclico, elas são paralelas.

Escólio. Si considerarmos uma reta como paralela a si mesma, podemos dizer que as retas isótropas de primeira espécie, em planos isótropos paralelos, são retas paralelas, *sem a restrição de as retas serem próprias,* incluindo-se, portanto, entre elas as retas cíclicas, que se confundem, no caso do paralelismo entre planos isótropos.

33. **Teorema.** Os planos próprios, que passam por uma reta cíclica, são isótropos.

Os planos próprios, que passam por uma reta cíclica, são todos imaginários, pois, uma reta cíclica é reta de primeira espécie, e só lhe pertence um plano real, neste caso o plano impróprio.

Ora, si um plano é imaginário e pertence a uma reta cíclica, sua involução deve ser *perspetiva* à involução da reta.

Neste caso, os eixos dos planos imaginários devem passar pelo centro impróprio da involução que corresponde à reta cíclica, e os planos conjugados na involução que determina o plano imaginário são, portanto, perpendiculares, pois, correspondem às retas impróprias de uma involução circular.

Os planos imaginários, portanto, são isótropos, de acordo com a definição do número 4.

Escólio. Si considerarmos o plano impróprio como isótropo, podemos dizer: os planos, que passam por uma reta cíclica, são isótropos, *sem a restrição,* que impuzemos no enunciado, de serem os planos próprios.

34. **Teorema.** Todo plano próprio, paralelo a um plano isótropo, é isótropo.

Si um plano próprio é paralelo a um plano isótropo, a interseção deles é a reta cíclica desse plano. Ora, si um plano próprio pertence a uma reta cíclica, ele é isótropo, de acordo com o teorema do número 33.

Escólio. Considerando-se o plano impróprio como isótropo, podemos dizer: todo plano paralelo a um plano isótropo é isótropo.

35. **Teorema.** As retas imaginárias próprias, que passam por um ponto cíclico, são isótropas.

Com efeito, si a reta for de segunda espécie, segundo a definição do número 4, ela é isótropa; si, no entanto, for de primeira espécie, ela é obtida projetando-se o ponto cíclico de um ponto real e *próprio*. Ora, neste caso, projetando-se a involução absoluta, obtemos uma involução circular, e a reta é isótropa.

Escólio. O ponto donde projetamos o ponto cíclico, deve ser *próprio*, porque por hipótese, a reta imaginária é própria.

36. **Teorema.** Toda reta própria, paralela a uma reta isótropa própria, é isótropa.

Si uma reta própria s, é paralela a uma reta isótropa, ela passa pelo ponto cíclico dessa reta; ora, a reta s é tambem *imaginária*, pois, as únicas retas reais, que contêm pontos cíclicos, são as retas impróprias e, por hipótese, a reta s é própria.

Sendo s uma reta própria e imaginária, como pertence a um ponto cíclico, ela é isótropa, de acordo com o último teorema.

37. **Teorema.** Dos pontos de uma reta cíclica, um só é cíclico.

Seja uma reta cíclica c^*_∞. Consideremos, então, um plano próprio desta reta, e nesse plano que é isótropo, consideremos uma reta isótropa de primeira espécie, própria, evidentemente. Ora, esta reta isótropa e a reta cíclica estão num mesmo plano, portanto, cortam-se num ponto cíclico, como provamos no teorema do número 16.

Fica assim provada a existência de um ponto cíclico, numa reta cíclica. Provemos agora, por absurdo, a *unicidade*.

Si houvesse outro ponto cíclico na reta c^*_∞ por ele passaria outra reta isótropa, própria, de primeira espécie, não paralela à primeira. Esta nova reta isótropa e a reta cíclica c^*_∞ determinam outro plano próprio ainda isótropo, de acordo com o teorema do número 33. Este novo plano é paralelo ao primeiro plano considerado e, portanto, de acordo com o teorema do número 32, suas retas isótropas, próprias, de primeira espécie, são paralelas, o que é absurdo, si passam por pontos cíclicos diferentes.

38. **Teorema.** Num plano isótropo próprio, ha um só ponto cíclico.

Considere-se a reta cíclica do plano isótropo; segundo o teorema anterior, nessa reta ha um ponto cíclico, que se pertence a uma reta do plano isótropo, pertence ao plano.

Provada a *existência* desse ponto, provemos, agora, a *unicidade*. Si houvesse outro ponto cíclico no plano isótropo, os dois pontos determinariam uma reta do plano. Ora, esta reta é *imprópria*, pois é determinada por dois pontos impróprios, os dois pontos cíclicos que, por absurdo supomos existir.

Si a reta é imprópria e pertence ao plano isótropo, ela é cíclica (teorema do número 31), e nela existiriam dois pontos cíclicos, o que é absurdo, de acordo com a proposição anterior.

39. **Teorema.** Por um ponto próprio, passa uma infinidade de retas isótropas.

Na demonstração deste teorema, temos que fazer duas hipóteses:

a) o ponto é real;

b) o ponto é imaginário.

No primeiro caso, si o ponto é real (e próprio, por hipótese), por ele passa *uma infinidade de planos reais,* e em cada um deles, ficam determinadas duas retas isótropas *conjugadas,* com *centro* no ponto considerado. Ora, estas retas pertencem ao ponto real e, portanto, ha uma infinidade de retas que passam pelo ponto.

No caso do ponto ser *imaginário,* ele é determinado por uma involução elítica orientada, numa reta própria, porque, por hipótese, o ponto é próprio. Nesta suposição — a do ponto ser imaginário e próprio, consideremos os diferentes pontos cíclicos do espaço; ora, o ponto imaginário dado e os pontos cíclicos determinam retas isótropas; como ha uma infinidade de pontos cíclicos, ha uma infinidade de retas que passam pelo ponto imaginário dado.

Escólio. Quando o ponto próprio é real, as retas que passam por ele são, evidentemente, todas de primeira espécie; quando, no entanto, o ponto é imaginário, ha retas de primeira e segunda espécies; as primeiras croresponderm ao caso dos eixos do ponto dado e do ponto cíclico serem coplanares, as outras, ao caso contrário.

40. **Teorema.** O conjunto das retas isótropas, que pertencem a um ponto próprio, é duplamente infinito.

Imediato com a demonstração do teorema anterior.

41. **Teorema.** As retas isótropas de um ponto O, real e próprio, separam harmonicamente duas retas reais e conjungadas numa involução circular em torno do ponto O.

Com efeito, dada uma involução circular em torno do ponto O, cortemos a involução pela reta imprópria, do plano ω, suporte da involução. Nesta reta obtemos a involução absoluta do plano.

No espaço complexo, as operações de projeção e seção conservam a relação anharmônica; ora, os pontos cíclicos, na involução absoluta, de acordo com o teorema do número 18, separam harmonicamente os pontos impróprios de duas retas conjugadas na involução dada; de acordo, tambem, com o teorema do número 35, projetando-se de O os pontos cíclicos, as retas obtidas são isótropas e, portanto, as retas isótropas do ponto O, no plano ω, separam harmonicamente duas retas reais e conjugadas na involução circular, em torno desse ponto.

42. **Teorema.** A condição necessária e suficiente para que duas retas reais, de um ponto O, sejam perpendiculares, é que separem harmonicamente as retas isótropas desse ponto, no plano que elas determinam.

Consequência da proposição anterior.

43. **Teorema.** As retas isótropas de um ponto O, são as retas duplas da involução circular, em torno desse ponto.

Corolário do teorema do número 41.

44. **Definição.** O conjunto das retas isótropas, que passam por um ponto A próprio, real ou imaginário, chama-se *cone isótropo*. O ponto A diz-se *vértice* do cone isótropo.

45. **Teorema.** Num cone isótropo de vértice real, todos os pontos são imaginários, com exceção do vértice.

Com efeito, o cone isótropo de vértice real é formado por retas isótropas de primeira espécie. Os pontos reais do cone são os pontos reais destas retas. Ora, o *único* ponto real de uma reta isótropa, de primeira espécie, é o centro do feixe (involutivo) de retas, que a determina.

Neste caso, como o vértice do cone é o centro de todos os feixes, ele é o único ponto real do cone isótropo. Todos os outros pontos, portanto, são imaginários.

46. **Teorema.** Num cone isótropo de vértice imaginário, ha uma infinidade de pontos reais.

Num cone isótropo de vértice imaginário, como já vimos ha retas imaginárias de primeira e segunda espécies. Ora, nas retas de primeira espécie ha sempre um ponto real.

Como num cone isótropo de vértice imaginário, temos uma infinidade de retas isótropas de primeira espécie, correspondentes aos pontos cíclicos do eixo coplanar ao eixo do vértice, podemos concluir que num cone isótropo de vértice imaginário, ha uma infinidade de pontos reais.

47. **Teorema**. Num cone isótropo de vértice imaginário, o conjunto das retas isótropas de primeira espécie, é simplesmente infinito

Como vimos na demonstração do teorema anterior, a infinidade depende dos pontos cíclicos cujos eixos sejam coplanares ao eixo do vértice. Ora, estes pontos cíclicos devem ter seus eixos nas retas impróprias do feixe de *planos* (*reais*) cujo suporte é o eixo do vértice do cone e, portanto, o conjunto é simplesmente infinito.

48. **Definição.** Um ente que se obtem de outro, pela *transformação de conjugio,* diz-se seu *conjugado.*

49. **Definição.** Uma figura diz-se *real* ou *imaginária*, segundo se confunda ou não com sua conjugada.

51. **Teorema.** Um cone isótropo de vértice real é uma figura real.

Corolário da proposição do número 39.

Escólio. Baseados neste teorema, dizemos que um cone isótropo de vértice real é um *cone isótropo real.*

51. **Teorema** Um cone isótropo de vértice imaginário é uma figura imaginária.

Corolário da proposição do número 39.

Escólio. Baseados neste teorema, dizemos que um cone isótropo de vértice imaginário é um *cone isótropo imaginário.*

52. **Teorema.** A figura conjugada de um cone isótropo, de vértice imaginário, é um cone isótropo de vértice imaginário.

Com efeito, dado um cone Γ isótropo, de vértice imaginário, as retas conjugadas das retas desse cone são ainda retas isótropas, e todas elas passam pelo ponto conjugado do vértice de Γ. A figura, portanto é um cone isótropo, cujo vértice é o ponto conjugado do vértice do primeiro cone.

53. **Definição.** As retas — reais ou imaginárias, cujas coordenadas p_{ik} satisfazem a determinada equação, dizemos que formam um *complexo de retas.*

Si a equação é algébrica, o complexo diz-se *algébrico;* si a equação é transcendente, o complexo diz-se *transcendente.*

No caso do complexo ser algébrico, o grau da equação que o define, diz-se tambem o *grau do complexo.* Temos, portanto, complexos de grau um, dois, três... de grau n, em geral. Os complexos de grau um e dois, tomam os nomes particulares, de *lineares e quadráticos.*

As retas de um complexo, que pertencem a um ponto genérico, formam os *cones do complexo.* Para cada ponto, portanto, ha um cone do complexo.

Dualmente, as retas de um complexo, que pertencem a um plano genérico, formam as *curvas do complexo*. Para cada plano, portanto, ha uma curva do complexo.

E' imediato que si o complexo é de grau n, *seus cones são de ordem n, e suas curvas, de classe n*. Dessa observação concluimos que se um complexo é de grau n, num *feixe genérico do espaço ha n retas do complexo*. Essa propriedade serve para definir, *sinteticamente*, não só o grau de um complexo, como a própria noção de complexo algébrico.

54. **Teorema.** As retas isótropas formam um complexo quadrático.

Imediato com as considerações anteriores.

55. **Teorema.** Os cones do complexo formado pelas retas isótropas são os cones isótropos.

Imediato.

56. **Teorema.** As curvas do complexo formado pelas retas isótropas, são os pontos cíclicos de cada plano.

Imediato.

57. **Teorema.** Por um ponto real e impróprio, passam duas retas cíclicas conjugadas e somente duas.

Seja A_∞ um ponto real e impróprio. Por esse ponto passa uma reta a, real e própria; no feixe de planos, cujo eixo é essa reta a, temos duas involuções circulares orientadas. As retas impróprias desses planos passam por A_∞ e são perpendiculares duas a duas. No ponto A_∞ ha, portanto, duas involuções circulares orientadas, isto é, pelo ponto A_∞, real e impróprio, passam duas retas cíclicas e conjugadas.

Demonstrada a existência, a dualidade é imediata, de acordo com o *postulado da ordem*.

Escólio. Si tomassemos outra reta por A_∞, as involuções em π_∞ seriam as mesmas, pois, teriam o mesmo centro A_∞ e associariam ambas, a uma reta b_∞, a reta dos planos perpendiculares àqueles que passam por b_∞, paralelos entre si.

58. **Teorema.** Dada uma involução de retas, elítica e não circular, existem duas retas e só duas, que pertencem ao centro do feixe e das quais a involução é projetada, segundo uma involução de planos, ortogonal (Espaço real).

Podemos supor que a involução seja dada pelo seu par a, a' de retas conjugadas e ortogonais, e mais o par b, b' que separa harmonicamente a e a'. (Vide teorema do número 5).

Neste caso, suponhamos o plano α, perpendicular ao plano suporte do feixe de retas dada e que pertença ainda à reta a. Suponhamos, agora, que das retas b e b', seja b aquela que faz com a, ângulo menor que $\frac{\pi}{4}$.

Nesta hipótese o problema resume-se em determinar as retas do plano α, que pertençam ainda ao ponto $O \equiv a . a'$ e das quais projetamos b e b', de modo que os planos sejam ortogonais, ou melhor, o problema resume-se em determinar os planos, que passam pela reta b e formam com α, ângulo igual ao 45º

Ora, da Geometria Elementar, sabemos que ha dois planos, e só dois com essa propriedade. As interseções desses planos são, portanto, as retas pedidas, das quais demonstramos a *existência* e *dualidade*

Escólio. O teorema da Geometria Elementar, que lembramos atrás, baseia-se na *existência* e *dualidade* das tangentes a uma circunferência, por um *ponto externo* em relação à circunferência e demonstra-se facilmente.

59. **Teorema.** Dada uma involução de retas, circular, existe uma só reta da estrela, cujo centro é o centro do feixe dado e da qual a involução é projetada segunda uma involução de planos, ortogonal. (Espaço real).

Basta considerar a demonstração do teorema anterior, supondo-se o ângulo ba = 45º

Neste caso, as retas da proposição anterior se confundem com a reta da estrela $O \equiv a . a'$, perpendicular ao plano suporte do feixe dado.

60. **Teorema.** Por um ponto imaginário, impróprio e não cíclico, passam duas retas cíclicas, e só duas.

Seja, com efeito, um ponto imaginário I^*_∞, impróprio e não cíclico. Projetando-se este ponto I^*_∞, de um ponto O, real e próprio, vamos obter uma reta imaginária, própria, de primeira espécie e *não-cíclica*, pois, seu ponto impróprio I^*_∞, por hipótese, não é cíclico.

Ora, assim sendo, a involução correspondente a essa reta imaginárina, é uma involução elítica e não circular. De acordo, portanto, com o teorema do número 60, pelo centro O da involução passam duas retas s e s', das quais a involução é projetada, segundo uma involução ortogonal. Si orientarmos estas involuções ortogonais, de modo que sejam *concordes* com a involução da reta imaginária que, por construção, passa por I^*_∞, vamos obter dois planos isotropos, que passam pela reta imaginária. *As retas cíclicas* desses planos, contêm forçosamente I^*_∞, pois este ponto pertence aos planos isotropos, si pertence a uma reta desses planos.

Fica, assim, provado que, pelo ponto I^*_∞, imaginário, impróprio, não cíclico, passam duas retas cíclicas.

Provemos agora, por absurdo, a segunda parte do teorema: que por esse ponto não pode passar outra reta cíclica. Si o ponto I^*_∞ pertencesse a outra reta cíclica, do ponto O considerado anteriormente, poderiamos projetar esta nova reta cíclica e teriamos outro plano isótropo, pelo ponto O. Ora, o eixo desse plano, pertence então ao ponto O, e como o plano isótropo contem I^*_∞, suas involuções são *perspetivas;* chegamos assim ao absurdo de haver 3 retas pelo ponto O, das quais se projeta uma involução elítica de retas, numa involução de planos, ortogonal.

Escólio. A demonstração independe do ponto O, como é facil verificar-se. Os planos isótropos que construíssemos, a partir de outro ponto, seriam paralelos, dois a dois, aos primeiros, e suas retas cíclicas confundir-se-iam.

61. **Teorema.** Por um ponto cíclico, passa uma só reta cíclica.

Demonstração análoga à anterior e baseada no teorema do número 61.

Escólio. Esta proposição pode ser considerada *um caso limite* da anterior, isto é, podemos supor que, no caso do ponto imaginário torna-se cíclico, as retas cíclicas que passam por ele, coincidem numa só reta que supomos contada duas vezes.

Neste caso, dizemos ainda que o ponto cíclico é determinado pelas duas retas cíclicas coincidentes, isto é, pela mesma reta cíclica contada duas vezes.

Esta consideração apresenta grande interesse ao tratarmos, *no espaço complexo,* do conceito de perpendicularidade entre reta e plano.

62. **Teorema.** Numa reta real e imprópria existem dois pontos cíclicos e somente dois.

Imediato.

63. **Teorema.** Numa reta imaginária imprópria, não-cíclica, existem dois pontos cíclicos e somente dois.

Ora a reta é imaginária, e definida por uma involução orientada de retas; como é imprópria, o feixe que lhe corresponde é de suporte e centro impróprios; como a reta não é cíclica, as retas conjugadas na involução não são ortogonais.

Pelo centro da reta imaginária, forçosamente de primeira espécie, pois pertence ao plano π_∞, conduzamos uma reta o real imprópria e projetemos dela, a reta imaginária de partida. Vamos obter assim um plano, imaginário, não isótropo. Ora, nesse plano ha dois feixes de retas isótropas de primeira espécie; as interseções destas retas, com a reta imaginária dada, são pontos cíclicos (teorema do número 15) e, portanto, numa reta imaginária não cíclica, existem dois pontos cíclicos.

Provemos agora, por absurdo que nessa reta não ha outro ponto cíclico. Com efeito suponhamos a existência de outro ponto na reta imaginária dada. Ora, nesse caso projetando-se estes pontos de um ponto O, arbitrário, da reta o, obteriamos, por esse ponto, três retas isótropas, no plano não isótropo, o que é absurdo, segundo o teorema do número 5.

64. **Teorema.** Numa reta cíclica ha um só ponto cíclico.

Este teorema já foi demonstrado — proposição do número 37. Enunciamos novamente o teorema, *por questão de uniformidade* e porque, *no espaço complexo,* apresenta grande interesse, ao tratarmos do conceito de perpendicularismo, que veremos adiante.

Escólio. Esta proposição pode ser considerada um *caso limite* da proposição anterior, isto é, podemos supor que nas retas cíclicas, os pontos cíclicos coincidem com um só ponto cíclico *contado duas vezes.*

Neste caso dizemos ainda que a reta cíclica é determinada pelos dois pontos cíclicos coincidentes, isto é, pelo mesmo ponto cíclico contado duas vezes.

65. **Teorema.** Por uma reta, *real e própria,* podemos conduzir dois planos isótropos e só dois.

Esta proposição já foi demonstrada (proposição do número 21) ; vamos demonstrá-la, novamente, empregando a *linguagem imaginária.*

A reta real e própria determina um ponto O_∞, *real e impróprio.* Por esse ponto, passam duas retas cíclicas — teorema do número 57. A reta de partida e estas retas cíclicas determinam os planos isótropos, cuja *existência* queríamos demonstrar.

A *dualidade* demonstra-se *por absurdo.* Si pela reta passasse outro plano isótropo, ele determinaria outra reta cíclica por O_∞ o que seria absurdo de acordo com o teorema do número 57.

Escólio. Como vemos, na demonstração, os dois planos isótropos, de uma reta real e própria, são planos *conjugados.*

66. **Teorema.** Por uma reta, *real e imprópria,* passa um só plano isótropo — *o plano impróprio.*

Imediato.

67. **Teorema.** Por uma reta isótropa e *própria,* passa um plano isótropo e só um.

Consideremos (teorema do número 61) *a reta cíclica, única,* pertencente ao ponto cíclico da reta isótropa. Estas duas retas, a isótropa, da hipótese, e mais a reta cíclica, determinam um plano próprio, que é isótropo, de acordo com o teorema do número 33.

Provada a *existência* do plano isótropo, a *unicidade* demonstra-se facilmente *por absurdo,* tendo em vista a proposição do número 61.

68. **Teorema.** Por uma reta imaginária, própria, não-isótropa, passam dois planos isótropos e só dois.

Demonstração análoga à anterior.

Escólio. Não sendo isótropa, por hipótese, o ponto impróprio da reta *não é cíclico;* daí *a dualidade* dos planos isótropos.

69. **Teorema.** Por uma reta imaginária, imprópria, *não-cíclica,* passa um só plano isótropo — *o plano impróprio.*

70. **Teorema.** Por uma reta *cíclica,* passa uma infinidade de planos isótropos.

Esta proposição já foi demonstrada — teorema do número 33. Enunciamô-la, novamente, por questão de *uniformidade,* neste grupo de proposições: as dos números 65, 66, 67, 68 e 69.

71. **Definição.** Dada uma reta a, própria e *complexa* (*real ou imaginária*), seja A_{∞} seu ponto impróprio; por esse ponto, passam duas retas cíclicas e em cada uma delas, ha um ponto cíclico; os planos, que passam pela reta determinada por esses pontos cíclicos, dizem-se *perpendiculares à reta a.*

Escólio. Esta noção, *no caso real,* como era de se desejar, confunde-se com o conceito de perpendicularismo, já conhecido.

Com efeito, seja r uma reta, *real* e *própria.* Pelo seu ponto impróprio R_{∞}, tracemos as retas cíclicas e consideremos nelas seus pontos *cíclicos conjugados* C^*_{∞} e $\overline{C^*_{\infty}}$. Vamos provar que um plano qualquer $\omega \equiv O . C^*_{\infty} \overline{C^*_{\infty}}$ é, *no sentido real,* perpendicular à reta r, sendo O um ponto próprio qualquer dessa reta.

Ora, a reta OC^*_{∞} é isótropa (teorema do número 35) e pertence ao plano ω; o plano imaginário $r . R_{\infty} C^*_{\infty}$ é isótropo (teorema do número 33). Como este plano *contem* a reta isótropa, pois, contem dois pontos dela — os pontos O e C^*_∞ *suas involuções* são *perspetivas*.

De acordo, portanto, com o teorema do número 59, a reta r é, *no sentido real*, perpendicular ao plano ω, porque, sendo C^*_∞ e $\bar{C}^*_\infty$ imaginários conjugados, o plano $\omega \equiv O \cdot C^*_\infty \overline{C^*_\infty}$ é o suporte da involução correspondenes à reta OC^*_∞ ou $O\overline{C^*_\infty}$.

72. **Definição.** Dado um plano a próprio e *complexo* (real ou imaginário), seja a_∞ sua reta imprópria; nessa reta ha dois pontos cíclicos; as retas cíclicas, que passam por esses pontos cíclicos determinam outro ponto impróprio; por definição, as retas que pertencem ao último ponto dizem-se *perpendiculares* ao plano α.

Escólio. Este conceito, no caso real, confunde-se com a noção de perpendicularidade, já conhecida.

A demonstração resulta do teorema do número 75 e da propriedade simétrica do perpendicularismo entre reta e plano, *no espaço real*.

73. **Teorema.** Si uma reta r é perpendicular a um plano α, toda reta b, própria, paralela à primeira é perpendicular ao plano e reciprocamente.

Imediato.

74. **Teorema.** Si um plano α é perpendicular a uma reta r, todo plano β, próprio, paralelo ao primeiro é perpendicular à reta e reciprocamente.

Imediato.

75. **Teorema.** O perpendicularismo, no espaço complexo, é relação comutativa ou simétrica.

Com efeito, se um plano α é perpendicular a uma reta r, este plano pertence à reta a_∞, determinada pelos pontos cíclicos C^*_∞ e $\overline{C^*_\infty}$, das retas cíclicas c^*_∞ e $\overline{c^*_\infty}$, que passam pelo ponto impróprio R_∞ de r.

Ora, para provarmos que a reta r, reciprocamente é perpendicular ao plano, de acordo com a definição dada, devemos tomar a reta imprópria a $_\infty$ do plano α, em seguida seus pontos cíclicos C^*_∞ e $\bar{C}^*_\infty$, depois as retas cíclicas c^*_∞ e $\bar{c}^*_\infty$ desses pontos e finalmente sua interseção. Ora, a interseção dessas retas é o ponto R_∞, que pertence a reta r, por hipótese.

Daí concluimos que a reta r é perpendicular ao plano α.

76. **Teorema.** Os planos perpendiculares a retas isótropas (próprias) são planos isótropos.

Com efeito, o ponto impróprio de uma reta isótropa, própria, é seu ponto cíclico C^*_∞ (teorema do número 15). Ora, nesse caso, levando-se em consideração o que foi dito nos escólios dos números 61 e 64, a reta determinada por esse ponto cíclico, contado duas vezes, é a reta cíclica que lhe pertence. Ora, os planos próprios de uma reta cíclica são planos isótropos (teorema do número 33) e, portanto, os planos perpendiculares a retas isótropas (próprias) são planos isótropos.

Escólio. Considerando-se uma reta de um plano, paralela ao plano, podemos dizer que as retas isótropas são *perpendiculares* e *paralelas* aos planos isótropos a que pertencem.

77. **Definição.** No plano impróprio π_∞, a um ponto A_∞ complexo (real ou imaginário), façamos corresponder a reta a $_\infty$ dos planos perpendiculares às retas passantes por A_∞.

A correspondência estabelecida é involutária (teorema do número 75) e toma o nome de *polaridade absoluta.*

A cônica fundamental da polaridade absoluta chama-se *círculo absoluto* ou simplesmente *absoluto.*

78. **Teorema.** O absoluto, como conjunto de pontos é o lugar dos pontos cíclicos.

Imediato, com as noções de perpendicularismo, que foram dadas e as observações dos números 61 e 64.

79. **Teorema.** O absoluto, como conjunto de retas é a envoltória das retas cíclicas.

Imediato.

80. **Teorema.** O absoluto, como lugar ou envoltória, é uma figura real.

Imediato.

81. **Teorema.** A quádrica do absoluto é a totalidade dos planos isótropos.

Imediato.

Escólio. A quádrica do absoluto tem o nome de *quádrica absoluta do espaço*. Seu *plano duplo* é o plano impróprio.

82. **Definição.** Dois planos próprios, reais ou imaginários, dizem-se perpendiculares, quando suas retas impróprias são conjugadas em relação ao absoluto.

Escólio. Como era de se desejar, esta noção, quando os elementos são reais, confunde-se com o conceito já definido, no espaço real, e do qual é uma *estensão*.

Para verificarmos esta afirmativa, basta lembrar o teorema do número 22 e lembrar tambem que as retas cíclicas de um ponto impróprio e real, são os elementos duplos da involução subordinada, em torno do ponto, pela polaridade absoluta.

83. **Teorema.** A condição necessária e suficiente para que dois planos complexos (reais ou imaginários), sejam perpendiculares, é que separem harmonicamente os planos isótropos da reta que eles determinam.

Imediato, como aplicação do absoluto, si tivermos em mente o teorema do número 33.

84. **Teorema.** Os planos isótropos são auto-perpendiculares.

Imediato, si lembrarmos que as retas ciclicas são auto-conjugadas em relação ao absoluto.

85. **Definição.** Duas retas *próprias,* reais ou imaginárias dizem-se perpendiculares, quando seus pontos impróprios são conjugados, em relação ao absoluto.

Duas retas *impróprias,* reais ou imaginárias, dizem-se perpendiculares, quando são retas impróprias de planos perpendiculares, i. é, i. l., quando são conjugadas em relação ao absoluto.

Escólio. Esta noção, quando os elementos são reais, confunde-se com o conceito já conhecido, no espaço real.

Para verificarmos esta afirmativa, basta lembrar o teorema do número 19 e lembrar ainda que os pontos cíclicos de uma reta, imprópria e real, são os elementos duplos na involução subordinada na reta, pela polaridade absoluta.

86. **Teorema.** A condição necessária e suficiente para que duas retas complexas (reais ou imaginárias) sejam perpendiculares, é que separem harmonicamente as retas isótropas dos planos, cuja orientação determinam.

Imediato, como aplicação do absoluto, tendo em mente o teorema do número 35, no caso das retas serem próprias; no caso das retas serem impróprias, basta aplicar o teorema do número 83.

87. **Teorema.** As retas isótropas, cíclicas ou não-ciclicas são auto-perpendiculares.

Imediato, se lembrarmos que os pontos cíclicos são auto-conjugados e as retas cíclicas auto-conjugadas, em relação ao absoluto.

88. **Teorema.** A importância de nossa tése resulta da proposição: *as propriedade métricas de uma figura no espaço são relações projetivas entre os elementos da figura e o absoluto do espaço.*

Com efeito, *as propriedades mtricas — invariantes com as transformações* do *grupo principal* (Klein), baseiam-se nas relações métricas fundamentais:

a) perpendicularismo entre plano e a reta;
b) igualdade de ângulos de retas;

c) igualdade de segmentos de reta.

Ora, a primeira noção já foi fixada e relaciona-se com o *absoluto*.

A segunda, a igualdade entre ângulos de retas (a, b) e (a', b'), de pontos impróprios (A_∞, B_∞) e (A'_∞, B'_∞), pode ser fixada por uma *congruência* que transforme o par (A_∞, B_γ) no par (A'_∞, B'_∞), ou seja, *por uma colineação que transforme o absoluto nele mesmo.*

Si recordarmos de definição projetiva de ângulo (*Laguerre*) e chamarmos de C^*_∞ e $\overline{C^*_\infty}$ os pontos cíclicos da reta $A_\infty B_\infty$ e de C'^*_∞ e $\overline{C'^*_\infty}$ os pontos cíclicos da reta $A'_\infty\ B'_\infty$, a igualdade dos ângulos (a, b) e (a', b') pode ser expressa pela condição de serem *iguais* ou *recíprocas* as relações duplas $(A_\infty, B_\infty\ C^*_\infty, \overline{C^*_\infty})$ e $(A'_\infty, B'_\infty, C'^*_\infty, \overline{C'^*_\infty})$.

Finalmente, a igualdade entre dois segmentos AB e CD, por uma *translação*, reduz-se ao caso de igualdade entre dois segmentos OR e OS, de extremo O comum.

Nessa hipótese, uma *rotação* que faça o segmento OR coincidir com OS, exprime a relação desejada — a igualdade de segmentos de reta.

Ora, se chamarmos de R_∞, S_∞ e I_∞ os pontos impróprios de OR, OS e RS, e se chamarmos também de I'_∞, o conjugado de I_∞ *no absoluto*, a relação de igualdade, como é imediato, pode ser expressa pela condição de ser

$$(R_\infty, S_\infty, I_\infty, I'_\infty) = -1$$

Com as considerações anteriores, torna-se evidente a proposição enunciada neste número 88.

89. **Teorema.** A proposição anterior, que *subordinada a geometria métrica à geometria projetiva,* pode ser particularizada para o plano, com a forma seguinte: *as propriedades métricas de uma figura plana são relações projetivas entre os elementos* da *figura e o absoluto do plano.*

Escólio. *Por absoluto do plano*, devemos entender a figura formada pela *reta imprópria* (de um plano) e a *involução absoluta*, ou a *reta imprópria* (de um plano) e *seu par de pontos cíclicos.*

90. **Teorema.** A proposição do número 88, *na geometria das estrelas,* pode ser enunciada assim: *as propriedades métricas de uma figura na estrela são relações projetivas entre os elementos da figura e a polaridade absoluta ou o cone isótropo.*

Escólio. A proposição anterior justifica a denominação de *absoluto da estrela,* que se atribue à *polaridade ortogonal* e *ao cone isótropo,* denominação que permite enunciar o último teorema de maneira análoga às proposições dos números 88 e 89.

91. **Corolário.** O último teorema admite uma consequência importantíssima: *na estrela, a lei da dualidade vale também para as propriedades métricas.*

Demonstra-se esta proposição, aplicando-se a uma figura F de uma estrela, *a polaridade ortogonal,* não se esquecendo de que tôda propriedade métrica M, da figura F, é uma relação projetiva entre os elementos de F e *do absoluto da estrela — invariante com a polaridade ortogonal.*

Escólio. Esta proposição, com certas restrições, pode ser aplicada *a estrelas de semirretas* e apresenta interêsse no estudo da *triedometria,* relacionada assim com *o absoluto.*

92. Como vemos, vasto é o campo de aplicações do absoluto. O emprêgo dêsse conceito torna rápida a solução de vários problemas muito conhecidos — *existência* e *realidade dos eixos e planos principais de uma quádrica, quádricas de revolução, pontos umbílicos, retas focais* e muitos outros, dos quais não tratámos, porque nosso objetivo, nesse trabalho, foi a *construção sintética* do *absoluto* e a *introdução, também sintética, dos conceitos de perpendicularismo entre retas, planos, e planos e retas, no espaço complexo.*

ERRATA

Á página	*na linha*	*no lugar de*	*ler*
18	17	não-coplanar ao eixo do plano isótropo.	nas condições da hipótese.
27	6	não-cíclica	não-isótropa
27	10	60	58
27	35	61	59
31	15	75	59

Na página 18, linha 11, acrescente-se: *e não paralela aos planos perpendiculares ao eixo do plano isótropo.*