Fractais no ensino médio

Élvia Mureb Sallum
IME – USP

O artigo *Algoritmos e fractais com programas de GD* publicado na **RPM** 49, p. 27, utiliza *softwares* de Geometria Dinâmica para a construção de fractais, citando alguns exemplos. A introdução de fractais no ensino médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma idéia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas.

Neste artigo, apresentamos outros exemplos de fractais, cujas aproximações podem ser construídas em papel ou por meio de *softwares* geométricos e calculamos alguns de seus dados e suas dimensões.

Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma idéia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro.

Exemplo 1

Na figura 1, a seguir, foi traçada uma curva que vai do ponto A ao ponto B, formada por 4 segmentos de mesmo comprimento, igual a $\frac{1}{3}$ da distância de A até B.

Na figura 2, em cada um dos segmentos da curva da figura anterior, foi reproduzida uma cópia da figura original, reduzida em $\frac{1}{3}$ de seu tamanho, de modo a formar uma nova curva de *A* até *B*, agora formada por 16 segmentos.

Na figura 3, em cada um dos segmentos da curva da figura 2, foi reproduzida uma cópia da figura original.

figura 1

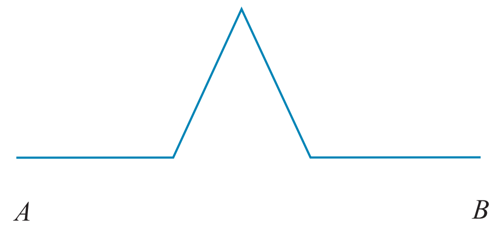


figura 2

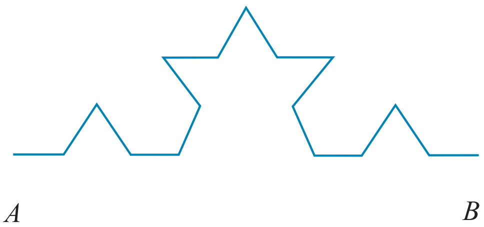
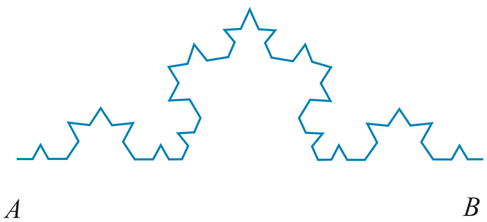


figura 3



Observe as figuras obtidas e, em cada uma delas, conte quantas cópias há da curva original e de quantos segmentos é formada a curva entre *A* e *B*. Se o comprimento da curva original for de 36 unidades, qual o comprimento das curvas entre *A* e *B* nas figuras 2 e 3?

O fractal correspondente a essa construção é a curva limite, num certo sentido, desse processo. Trata-se da chamada *curva de Koch*. É possível imaginar que num fractal há partes da figura que são cópia do todo, pois cada etapa da construção é uma união de 4 cópias reduzidas da etapa anterior. Essa propriedade é chamada de *auto-semelhança*.

Ao desenvolver com seus alunos esse exemplo, vale a pena organizar alguns dos dados em uma tabela, pedindo a eles que generalizem, como no exemplo seguinte, em que o limite dos perímetros tende a infinito:

Figura	Nº de lados	Nº de cópias da figura original	Comprimento de cada lado	Perímetro
1	4	1	9	4.9
2	4^2	4	9.(1/3)	$4^2.9/3$
3	4^3	4^2	$9.(1/3)^2$	$4^3.9/3^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	4^{n-1}	$4^{(n-2)}$	$9.(1/3)^{(n-2)}$	$4^{n-1}.9/3^{n-2}$
n	$4.4^{n-1} = 4^n$	$4.4^{(n-2)} = 4^{(n-1)}$	$9.(1/3)^{(n-2)}.(1/3) = 9.(1/3)^{(n-1)}$	$4^n.9/3^{n-1}$

Exemplo 2

Um outro exemplo, que pode ser desenvolvido de modo análogo ao anterior, tem como curva original a figura 4, cujo comprimento pode ser tomado como de 45 unidades.

Reproduzindo, em cada lado da figura 4, uma cópia da original reduzida em 1/3 de seu tamanho, obtemos a figura 5 :

figura 4

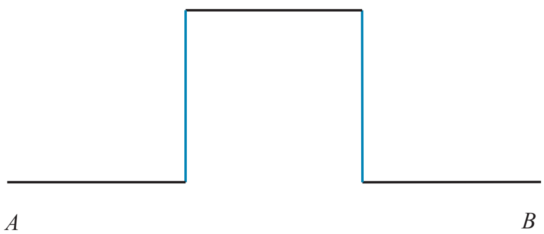
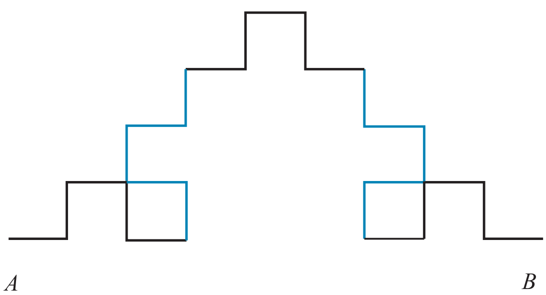
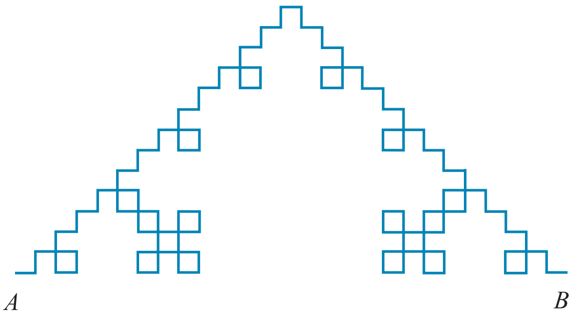


figura 5



Repetindo o processo mais uma vez, obtemos a figura 6.



Exemplo 3

Considere um segmento de comprimento $L = 1$ unidade. Divida-o em 3 partes iguais e retire o interior da parte central. Repetindo sucessivamente o processo em cada intervalo restante, obtém-se, como objeto limite, o fractal chamado *conjunto de Cantor*.

Iniciando a construção a partir do intervalo [0,1], esse conjunto, não só contém os extremos dos intervalos retirados, mas, o que é intrigante, muito mais: é caracterizado pelos números reais de [0,1] que, na base 3, admitem uma representação só com os dígitos 0 e 2.

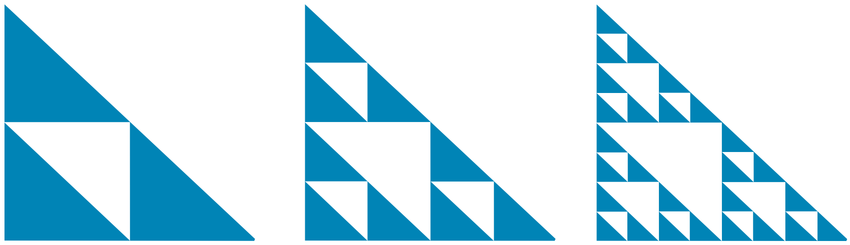
O aluno poderá completar a tabela abaixo, observando que o comprimento total de cada etapa da construção tende a zero, quando cresce o número de etapas.

Etapa	**Nº de segmentos**	**Comprimento de um segmento**	**Comprimento total**
0	1	1	1
1	2	1/3	2/3
2	2^2	$1/3^2$	$2^2/3^2$
3			
⋮	⋮	⋮	⋮
n	2^n		

Exemplo 4

Começando com um triângulo retângulo de catetos de comprimento L e dividindo seus lados ao meio, obtemos quatro triângulos congruentes que são semelhantes ao original, com razão de semelhança igual a 1/2.

Retirando o interior do triângulo central e repetindo sucessivamente o processo nos triângulos restantes, obtemos como limite um fractal chamado *triângulo de Sierpinski*.

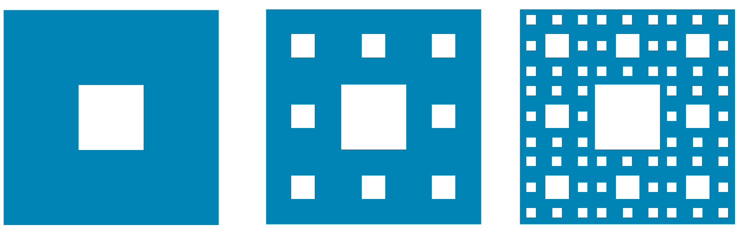


Iniciamos uma tabela com os dados das primeiras construções e pedimos que os alunos a completem. Na tabela, A é a área do triângulo inicial.

Etapa	Nº de buracos	Área de um novo buraco	Área total removida	Perímetro
1	1	$A/4$	$A/4$	$(2+\sqrt{2})L$
2	3	$A/4^2$	$A/4 + 3A/4^2 = (1 + 3/4)A/4$	$[(2+1)+(1+1/2)\sqrt{2}]L$
3			$A/4 + 3A/4^2 + 3^2A/4^3 =$ $(1 + 3/4 + 3^2/4^2)A/4$	$[(2+1+1/2)+$ $(1+1/2+1/2^2)]L$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n				

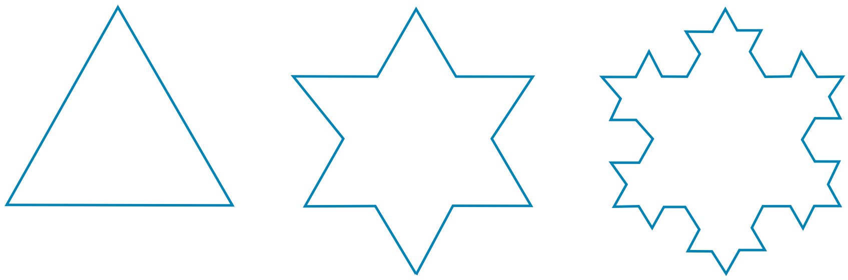
Exemplo 5

Como no exemplo anterior, iniciamos com um quadrado de lado L, dividimos seus lados em 3 partes iguais, obtendo 9 quadrados de lados $L/3$. Retiramos o quadrado central, repetimos o processo em cada quadrado restante e assim sucessivamente, obtendo um fractal chamado *quadrado de Sierpinski*.



Exemplo 6

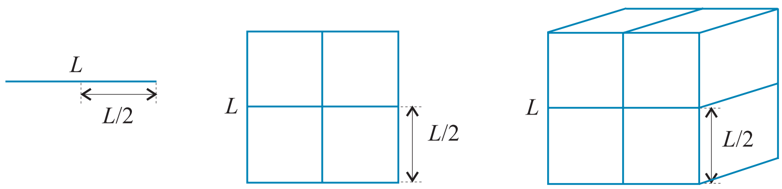
Repetindo a construção da curva de Koch do Exemplo 1 em cada lado L de um triângulo eqüilátero obtém-se outro fractal, construído pelo matemático sueco Helge von Koch em 1904, chamado de *ilha de Koch* (ou *floco de neve de Koch*).



Neste exemplo, os alunos podem elaborar uma tabela com os dados (números de lados, comprimento de um lado, perímetro e área) das primeiras figuras que aproximam o fractal e da n-ésima etapa da construção, supondo $L = 1$. Eles identificarão a seqüência dos perímetros como uma progressão geométrica e a das áreas como a soma dos termos de uma PG. Poderão, também, concluir que a primeira não converge e a última converge.

Dimensão de um fractal

Para motivar uma noção de dimensão de um fractal adequada para os fractais dos exemplos dados, olhar as figuras a seguir e lembrar de uma propriedade desse conceito num sistema regular, com densidade uniforme, como fios, placas, cubos sólidos, idealmente homogêneos.



$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2} M(L) \qquad M\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 M(L) \qquad M\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 M(L)$$

$$d = 1 \qquad\qquad d = 2 \qquad\qquad d = 3$$

Nesses casos, a dimensão d estabelece a relação entre a massa M e a medida linear L do sistema.

Isto é, considerando um fio homogêneo, de comprimento L e massa $M(L)$ e uma parte qualquer do mesmo fio de comprimento bL $(0 < b \leq 1)$, e massa $M(bL)$, tem-se $M(bL) = bM(L)$.

Se, de uma placa homogênea de forma quadrada de lado L e massa M(L), se toma uma parte na forma de um quadrado de lado bL e massa $M(bL)$, então $M(bL) = b^2M(L)$.

E, analogamente, tomando um cubo de aresta bL de um cubo homogêneo de aresta L, tem-se: $M(bL) = b^3M(L)$.

Nos três casos, tem-se $M(bL) = b^d\, M(L)$, sendo d a dimensão do sistema considerado.

Vamos usar essa propriedade para calcular a dimensão de um fractal, procurando o número d para o qual se tenha $M(bL) = b^d\, M(\mathrm{L})$, em que $0 < b < 1$ é característico de cada fractal.

Na curva de Koch do Exemplo 1, iniciando a construção com um segmento AB de comprimento L, observamos que, tomando uma redução do fractal de $\frac{1}{3}$ e reunindo adequadamente 4 cópias dessa redução, obtém-se o fractal original.

Assim, podemos afirmar que a massa $M(1/3)$ dessa redução corresponde a $\frac{1}{4}$ da massa $M(L)$ do fractal original, isto é, $M(L/3) = \frac{1}{4}M(L)$.

Como a dimensão desse fractal é o número d dado por $M(1/3) = \frac{1}{3^d}M(L)$, temos que $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^d$ e $d = \frac{\log 4}{\log 3}$.

Observe que, apesar do nome fractal, essa dimensão não é um número racional, mas um quociente cujos termos não são números inteiros.

No Exemplo 2, podemos pedir que o aluno determine a dimensão, que é $d = \frac{\log 5}{\log 3}$, observando que a massa $M(L/3)$ de uma redução de $\frac{1}{3}$ do fractal corresponde a $\frac{1}{5}$ da massa $M(L)$ do sistema original.

No conjunto de Cantor do Exemplo 3, iniciando a construção com um segmento de comprimento L, a massa $M(L/3)$ de uma redução de $\frac{1}{3}$ corresponde a $\frac{1}{2}$ da massa $M(L)$ do original. Assim, a dimensão d é obtida de $M(L/3) = \frac{1}{2} M(L) = \frac{1}{3^d} M(L)$, isto é, $d = \frac{\log 2}{\log 3}$.

O triângulo de Sierpinski do Exemplo 4 é uma reunião de 3 cópias de uma redução de $\frac{1}{2}$ do fractal original. Sendo $M(L)$ a massa do original e $M\left(\frac{L}{2}\right)$ a massa da cópia, temos que $M(L/2) = \frac{1}{3} M(L) = \frac{1}{2^d} M(L)$ e, assim, $d = \frac{\log 3}{\log 2}$.

A dimensão do quadrado de Sierpinski, do Exemplo 5, é $d = \frac{\log 8}{\log 3}$ e a do floco de neve de Koch, do Exemplo 6, é a mesma da curva de Koch.

Referências bibliográficas

CAMP, D. *A fractal excursion.* The Math. Teacher, April 1991.

CAMP, D., REINSTEIN, D., SALLY, P. *Generating fractals through self replication*, Math. Teacher, Jan. 1997.

PEITGEN, H.O., JÜRGENS, H., SAUPE, D. *Fractals for the Classroom*, vol.1, NCTM, USA: Springer-Verlag, 1991.