Bimódulos alternativos à direita

Lucia S. Ikemoto Murakami*, Ivan P. Shestakov†

Resumo

São apresentados os principais resultados conhecidos, até o momento, a respeito dos bimódulos alternativos à direita sobre o anel de matrizes $M_n(F)$.

1 Introdução

A teoria de representações é parte essencial da teoria de estrutura em diversas classes de álgebras. É suficiente mencionar as álgebras de Lie, onde podemos encontrar vários artigos dedicados a este assunto. Os conceitos de bimódulo e bi-representação para uma classe de álgebras foram introduzidos por S. Eilenberg [2]. Além das álgebras de Lie, a teoria de bi-representações foi desenvolvida em outras variedades importantes de álgebras não associativas. Por exemplo, para álgebras alternativas, por R. Schafer [9], para álgebras de Jordan por N. Jacobson [4], [5], e para álgebras e superálgebras de Malcev, por R. Carlsson [1], E. Kuzmin [7] e A. Elduque com I. Shestakov [3]. No caso das álgebras alternativas à direita, A. Slinko e I. Shestakov [10] desenvolveram a teoria de representações à direita. Nosso objetivo é investigar a estrutura dos bimódulos alternativos à direita. Começamos nosso estudo tratando dos bimódulos unitais para as álgebras de matrizes $M_n(F)$.

2 Conceitos básicos

No que segue, F será um corpo de característica diferente de 2. Seja A uma álgebra sobre F. Um F-espaço vetorial M é denominado um *A-bimódulo* se existem aplicações bilineares $A \times M \to M$ e $M \times A \to M$, aplicando (a, m) em $a.m$ e (m, a) em $m.a$, respectivamente. Se a álgebra A pertence a uma classe $\mathcal{M}$ dizemos que M é um *$\mathcal{M}$-bimódulo* para A ou um *A-bimódulo na classe* $\mathcal{M}$ se a álgebra $E = A \oplus M$, com a multiplicação definida por $(a + m)(a + n) = ab + (m.b + a.n)$, para $a, b \in A$ e $m, n \in M$, também for um elemento de $\mathcal{M}$. Esta álgebra é denominada *extensão split* determinada por M. Por exemplo, no caso das álgebras associativas, temos que $E = A \oplus M$ é associativa se e somente se $(a_1, a_2, m) = (a_1, m, a_2) = (m, a_1, a_2) = 0$, para todo $a_1, a_2 \in A$ e $m \in M$, onde $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ é o *associador* de x, y e z. Portanto, esta definição de bimódulo associativo coincide com a usual. Para as álgebras de Jordan, as identidades que definem seus bimódulos são $m.a = a.m$,

*Financiado pela Fapesp, proc. 99/09135-7

†Financiado pelo CNPq, proc. 300528/99-0

$(a^2, m, a) = 0$ e $2(a.m, b, a) + (a^2, b, m) = 0$. Como as ações à direita e à esquerda devem ser iguais, os conceitos de bimódulo e módulo à direita (ou à esquerda) de Jordan são os mesmos. Lembrando que uma álgebra A sobre F é dita alternativa à direita se verifica $(x, y, y) = 0$, para todo $x, y \in A$, temos as identidades que definem os bimódulos alternativos à direita:

$$(m, a, a) = 0, \quad (a_1, m, a_2) + (a_1, a_2, m) = 0,$$

para todo $m \in M$ e $a, a_1, a_2 \in A$.

Existe uma forte relação entre bimódulos para álgebras não associativas e módulos à esquerda associativos, no seguinte sentido: dada uma álgebra A em uma variedade $\mathcal{M}$, existe uma álgebra associativa $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(A)$, tal que cada $\mathcal{M}$-bimódulo para A é um módulo à esquerda para $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(A)$ e, reciprocamente, todo módulo à esquerda para $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(A)$ tem estrutura de $\mathcal{M}$-bimódulo para A. A álgebra $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}(A)$ é denominada *$\mathcal{M}$-envolvente multiplicativa* de A. Esta álgebra é o quociente da álgebra tensorial $T(A \oplus \bar{A})$ por um ideal I conveniente, onde $\bar{A} \cong A$. Para as álgebras alternativas à direita, por exemplo, I é gerado pelo conjunto $\{\bar{a} \otimes \bar{a} - \bar{a}^2, \bar{a} \otimes b - b \otimes \bar{a} + a \otimes b - ab : a, b \in A\}$. Podemos também considerar a $\mathcal{M}$-envolvente multiplicativa unital $\mathcal{U}^1_{\mathcal{M}}$ para uma álgebra com unidade, que estabelece uma correspondência entre $\mathcal{M}$-bimódulos unitais para A e módulos à esquerda associativos unitais para $\mathcal{U}^1_{\mathcal{M}}$. A descrição da $\mathcal{M}$-envolvente multiplicativa para álgebras em uma variedade arbitrária $\mathcal{M}$ pode ser bastante complexa. Quando A é uma álgebra alternativa ou de Jordan de dimensão finita, é conhecido que sua envolvente multiplicativa também tem dimensão finita. Mostraremos, entretanto, que este resultado deixa de ser verdadeiro para as álgebras alternativas à direita, já no caso em que $A = M_2(F)$.

Para desenvolver o estudo dos bimódulos alternativos à direita, usaremos as teorias conhecidas de módulo à direita alternativo à direita e de módulo de Jordan: dado um bimódulo alternativo para A, considerando apenas a ação à direita, temos um módulo à direita alternativo à direita para A, isto é, $(m, a, a) = 0$, para todo $m \in M$ e $a \in A$. Denotaremos este módulo por M^r. Além disso, para toda álgebra alternativa à direita A, sabemos que a álgebra A^+, com multiplicação $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ é uma álgebra de Jordan. Podemos definir uma nova ação em M por $m \circ a = \frac{1}{2}(m.a + a.m)$, para $m \in M$ e $a \in A^+$. Assim, teremos um módulo de Jordan para A^+, denotado por M^J.

Como já foi mencionado, a estrutura de módulos à direita alternativos à direita foi descrito em [10]. Foi provado, em particular, que os módulos à direita alternativos à direita para $M_n(F)$ são completamente redutíveis e os irredutíveis são I^r_n, gerado por $\{m'_1, \ldots, m'_n\}$, com ação

$$m_i e_{jk} = \delta_{ij} m_k, \text{ para } i, j, k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

e I^l_n, gerado por $\{m_1, \ldots, m_n\}$, com ação

$$m_i e_{jk} = \delta_{ik} m_j, \text{ para } i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Portanto, todo bimódulo alternativo à direita unital para $M_n(F)$ de dimensão finita tem como dimensão um múltiplo de n.

Para descrever os módulos de Jordan unitais de $M_n(F)^+$, estuda-se a envolvente multiplicativa unital para esta álgebra. Distinguimos dois casos: para $M_n(F)$, com $n \geq 3$, usando o fato que a envolvente especial unital $S_1(M_n(F)^+)$ é isomorfa a $M_n(F) \oplus M_n(F)^\rho$, onde

$\rho: A \mapsto A^t$, a transposta de A. Assim, por [6, Teorema 7, pág.273], os módulos de Jordan unitais irredutíveis não isomorfos para $M_n(F)^+$ são

(i) Reg $M_n(F)^+$, o módulo regular;

(ii) $V = H(M_n(F))$, o conjunto das matrizes simétricas, com a ação $x \cdot b = \frac{1}{2}(xb^t + bx)$;

(iii) $V' = H(M_n(F))$, com $x \cdot b = \frac{1}{2}(xb + b^t x)$;

(iv) $W = S(M_n(F))$, o conjunto das matrizes anti-simétricas, com $x \cdot b = \frac{1}{2}(xb^t + bx)$;

(v) $W' = S(M_n(F))$, com $x \cdot b = \frac{1}{2}(xb + b^t x)$.

Para o caso $n = 2$, temos que $M_2(F)^+$ é uma álgebra de Jordan para forma bilinear simétrica sobre um espaço vetorial de dimensão 3. Assim, por [6, Teorema 5, pág.272], a envolvente multiplicativa unital para $M_2(F)^+$ é a álgebra de Meson isomorfa a $F \oplus M_4(F) \oplus M_3(F) \oplus M_3(F)$ e, portanto, existem 4 módulos de Jordan unitais irredutíveis não isomorfos para $M_2(F)$, que são:

(i) Fn, com ação $n \circ e_{11} = n \circ e_{22} = \frac{1}{2}n$; $n \circ e_{12} = n \circ e_{21} = 0$;

(ii) Reg $M_2(F)^+$, o módulo regular;

(iii) $N = Fn_1 + Fn_2 + Fn_3$, com

$$n_1 \circ e_{11} = n_1 \circ e_{22} = n_2 \circ e_{12} = -n_2 \circ e_{21} = -n_3 \circ e_{12} = -n_3 \circ e_{21} = \frac{1}{2}n_1;$$
$$-n_1 \circ e_{12} = n_2 \circ e_{11} = n_3 \circ e_{11} = \frac{1}{2}(n_2 + n_3);$$
$$n_1 \circ e_{21} = n_2 \circ e_{22} = -n_3 \circ e_{22} = \frac{1}{2}(n_2 - n_3);$$

(iv) $N' = Fn_1 + Fn_2 + Fn_3$, com

$$n_1 \circ e_{11} = n_1 \circ e_{22} = -n_2 \circ e_{12} = n_2 \circ e_{21} = n_3 \circ e_{12} = n_3 \circ e_{21} = \frac{1}{2}n_1;$$
$$n_1 \circ e_{12} = n_2 \circ e_{22} = n_3 \circ e_{22} = \frac{1}{2}(n_2 + n_3);$$
$$n_1 \circ e_{21} = -n_2 \circ e_{11} = n_3 \circ e_{11} = \frac{1}{2}(n_3 - n_2).$$

Notemos que, como no caso dos módulos à direita alternativos à direita, os módulos de Jordan para $M_n(F)^+$ são completamente redutíveis. Dessa maneira, dado um bimódulo alternativo à direita, estudaremos sua estrutura usando as decomposições (únicas) de M^r e de M^J em soma de suas componentes irredutíveis.

3 Bimódulos para $M_2(F)$

Seja M um bimódulo alternativo à direita para $M_2(F)$. Veremos, inicialmente, como se comportam as componentes irredutíveis de M^J e de M^r. Denotemos por M_r^r a soma das componentes de M^r isomorfas a I_n^r e por M_l^r, a soma das componentes de M^r isomorfas a I_n^l. Os resultados desta seção encontram-se demonstrados em [8].

Proposição 1. *As componentes de M^J isomorfas a F e a N estão contidas em I_l^r, M^J não possui componentes isomorfas a N' e, além disso, se M^J possui uma componente isomorfa a* Reg $M_2(F)^+$ *então M possui um sub-bimódulo isomorfo a* Reg $M_2(F)$.

Como conseqüência, temos

Corolário 2. *Seja M um bimódulo alternativo à direita unital irredutível para $M_2(F)$ tal que seu módulo de Jordan correspondente possua uma componente isomorfa a* Reg $M_2(F)^+$. *Então $M =$* Reg $M_2(F)$ *e, conseqüentemente, M é associativo.*

Corolário 3. *Se M é um bimódulo alternativo à direita irredutível para $M_2(F)$ e M não é associativo então M^J é soma de submódulos isomorfos a F e N. Em particular, $M_r^r = 0$.*

Descreveremos, a seguir, todos os bimódulos alternativos à direita unitais irredutíveis para $M_2(F)$ (não isomorfos) de dimensão menor ou igual a 6. Lembremos que todo bimódulo alternativo à direita para $M_2(F)$ deve ter dimensão par, devido à decomposição do módulo à direita M^r.

Bimódulos de dimensão 2

Existe apenas um bimódulo M de dimensão 2 para $M_2(F)$, onde $M^r \cong I_2^l$ e $M^J \cong F \oplus F$. Comparando as duas estruturas, concluímos que $M = Fm_1 + Fm_2$, com

$$m_i e_{jk} = \delta_{ik} m_j, \text{ para } i,j,k = 1,2;$$
$$e_{ij}m = -me_{ij} \text{ e } e_{jj}m = me_{ii}, \text{ para } i \neq j.$$

Observemos que este bimódulo é alternativo e isomorfo ao bimódulo de Cayley sobre $M_2(F)$.

Bimódulos de dimensão 4

Se M é um bimódulo alternativo à direita unital para $M_2(F)$ tal que $M^J \cong \bigoplus_{i=1}^k F$, com $k > 2$, prova-se que M não é irredutível. Assim, em dimensão 4, devemos ter $M^J \cong F \oplus N$. Demonstra-se que

$$\begin{array}{llll} m_1e_{11} = m_1, & m_2e_{11} = 0, & m_3e_{11} = m_3, & m_4e_{11} = 0, \\ m_1e_{12} = 0, & m_2e_{12} = m_3, & m_3e_{12} = 0, & m_4e_{12} = m_1, \\ m_1e_{21} = m_4, & m_2e_{21} = 0, & m_3e_{21} = m_2, & m_4e_{21} = 0, \\ m_1e_{22} = 0, & m_2e_{22} = m_2, & m_3e_{22} = 0, & m_4e_{22} = m_4, \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{lll} e_{11}m_1 = m_1, & e_{11}m_2 = 0, & e_{11}m_3 - e_{11}m_4 = -m_4, \\ e_{12}m_1 = 0, & e_{12}m_2 = -m_4, & e_{12}m_3 - e_{12}m_4 = -m_1, \\ e_{21}m_1 = -m_3, & e_{21}m_2 = 0 & e_{21}m_3 - e_{21}m_4 = m_2, \\ e_{22}m_1 = 0, & e_{22}m_2 = m_2 & e_{22}m_3 - e_{22}m_4 = m_3. \end{array} \tag{4}$$

$$\begin{array}{ll} e_{11}m_3 = -\alpha m_1 + \beta m_2 & e_{11}m_4 = -\alpha m_1 + \beta m_2 + m_4 \\ e_{12}m_3 = -2\gamma m_1 - \beta m_3 + \beta m_4 & e_{12}m_4 = (1-2\gamma)m_1 - \beta m_3 + \beta m_4 \\ e_{21}m_3 = (2\gamma - 1)m_2 + \alpha m_3 - \alpha m_4 & e_{21}m_4 = 2(\gamma - 1)m_2 + \alpha m_3 - \alpha m_4 \\ e_{22}m_3 = \alpha m_1 - \beta m_2 + m_3 & e_{22}m_4 = \alpha m_1 - \beta m_2, \end{array}$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in F$, define uma estrutura de bimódulo alternativo à direita unital no espaço vetorial de base $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$. Denotemos este bimódulo por $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Temos

Teorema 4. *Um bimódulo alternativo à direita unital para $M_2(F)$ de dimensão 4 é irredutível se e somente se é isomorfo a um bimódulo do tipo $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Além disso, $M(\alpha, \beta, \gamma)$ e $M(\alpha', \beta', \gamma')$ são isomorfos se e somente se $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$.*

Assim, já em dimensão 4, verificamos a existência de um número infinito de bimódulos alternativos à direita não isomorfos. Este resultado implica, em particular, que a envolvente multiplicativa da álgebra alternativa à direita $M_2(F)$ tem dimensão infinita.

Bimódulos de dimensão 6

Embora existam infinitos bimódulos unitais para $M_2(F)$ de dimensão 4, em dimensão 6 existe apenas um, que é descrito a seguir.

Teorema 5. *Todo bimódulo alternativo à direita unital irredutível para $M_2(F)$ de dimensão 6 é isomorfo ao bimódulo $M = \langle m_1, \ldots, m_6 \rangle$, onde m_i satisfazem as relações (3), (4) e*

$$\begin{array}{lllll} m_5e_{11} = m_5, & m_6e_{11} = 0, & e_{11}m_3 = m_3, & e_{11}m_5 = -m_2, & e_{11}m_6 = 0, \\ m_5e_{12} = 0, & m_6e_{12} = m_5, & e_{12}m_3 = 0, & e_{12}m_5 = -m_3 - m_4, & e_{12}m_6 = -m_2, \\ m_5e_{21} = m_6, & m_6e_{21} = 0, & e_{21}m_3 = -m_5, & e_{21}m_5 = m_6 & e_{21}m_6 = 0, \\ m_5e_{22} = 0, & m_6e_{22} = m_6, & e_{22}m_3 = 0, & e_{22}m_5 = m_2 + m_5, & e_{22}m_6 = m_6, \end{array}$$

Assim, temos a classificação de todas os bimódulos alternativos à direita unitais irredutíveis de dimensão menor ou igual a 6. Ainda no sentido de mostrar a grande quantidade de bimódulos alternativos à direita, construímos, para cada $h \geq 1$, um bimódulo alternativo à direita irredutível de dimensão $4h$. Estes exemplos podem ser encontrados em [8]. Outro problema tratado foi a existência de bimódulos indecomponíveis que não fossem irredutíveis. Encontramos um de dimensão 6 e provamos que esta é a menor dimensão onde podemos encontrar bimódulos com esta propriedade.

4 Bimódulos para $M_n(F)$

Para a álgebra de matrizes $M_n(F)$, com $n \geq 3$, existem alguns resultados semelhantes aos encontrados para $M_2(F)$. O primeiro diz respeito às relações entre as componentes do módulo à direita alternativo à direita M^r e ao módulo de Jordan M^J.

Proposição 6. *As componentes de M^J isomorfas a V e a W estão contidas em I_l^r, M^J não possui componentes isomorfas a V' nem a W' e, além disso, se M^J possui uma componente isomorfa a* Reg $M_n(F)^+$ *então M possui um sub-bimódulo isomorfo a* Reg $M_n(F)$.

Como conseqüência, temos

Corolário 7. *Seja M um bimódulo alternativo à direita unital irredutível para $M_n(F)$, $n \geq 3$, tal que seu módulo de Jordan correspondente possua uma componente isomorfa a* Reg $M_n(F)^+$. *Então $M =$* Reg $M_n(F)$ *e, conseqüentemente, M é associativo.*

Corolário 8. *Se M é um bimódulo alternativo à direita irredutível para $M_n(F)$, $n \geq 3$, e M não é associativo então M^J é soma de submódulos isomorfos a V e W. Em particular, $M_r^r = 0$.*

Formulamos, a seguir, algumas conjecturas em relação à existência de bimódulos alternativos à direita para $M_n(F)$, $n \geq 3$.

Conjectura 9. *Não existem bimódulos alternativos à direita unitais para $M_n(F)$ de dimensão $n(n-1)/2$, ou seja, tais que $M^J \cong W$.*

Conjectura 10. *Não existem bimódulos alternativos à direita unitais para $M_n(F)$ tais que $M^J \cong V$.*

Conjectura 11. *Existem infinitos bimódulos alternativos à direita unitais irredutíveis de dimensão $n(n-1)$ não isomorfos.*

Estes resultados são verdadeiros para $n = 3$ e $n = 4$ e a verificação, nos dois casos, foi feita de modo semelhante, com o uso do programa MAPLE. Por este motivo, acreditamos que o mesmo vale para os demais valores de n. Observamos, ainda, que não eram conhecidos bimódulos para $M_n(F)$, $n \geq 3$, que fossem alternativos à direita mas não associativos. A solução parcial da Conjectura 11, para os casos $n = 3$ e $n = 4$, já nos possibilita exibir infinitos bimódulos deste tipo.

Referências

[1] R. Carlsson: *Malcev-Moduln*, J. Reine Angew. Math. **281** (1976), 199–210.

[2] S. Eilenberg, *Extensions of general algebras*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique **21** (1948), 125–134.

[3] A. Elduque, I.P. Shestakov: *Irreducible non-Lie modules for Malcev superalgebras*, J. Algebra **173** (1995), 622–637.

[4] N. Jacobson: *General representation theory of Jordan algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 509–530.

[5] N. Jacobson: *Structure of alternative and Jordan bimodules*, Osaka J. Math. **6** (1954), 1–71.

[6] N. Jacobson: *Structure and Representations of Jordan Algebras*, Amer. Math Soc. Coll. Publ. **39** (1968).

[7] E.N. Kuzmin: *Malcev algebras and their representation*, Algebra i Logika **7**, v. 4 (1968), 48–69.

[8] L.I. Murakami, I.Shestakov: *Irreducible unital right alternative bimodules* (to appear in J. Algebra).

[9] R.D. Schafer: *Representations of alternative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 1–17.

[10] A.M. Slinko, I.P. Shestakov: *Right representations of algebras*, Algebra i Logika **13**, v. 5 (1974), 544–588.

Lucia S. Ikemoto Murakami, Ivan P. Shestakov
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Cx. P. 66281, São Paulo - SP, 05315-970
ikemoto@ime.usp.br; shestak@ime.usp.br