C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, p. 821-824, 1995 

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

# Sur les points critiques des fonctions analytiques réelles

Ângelo Barone-Netto, Gianluca Gorni et Gaetano Zampieri

***Résumé*** – Nous apportons une réponse complète au problème de décidabilité finie du comportement extremal local d'une fonction analytique réelle ; problème auquel Severi et Łojasiewicz donnèrent des réponses partielles dans quelques-uns de leurs travaux.

## On the critical points of real analytic functions

***Abstract*** – *We give a complete answer to the problem of the finite decidability of the local extremality character of a real analytic function; a problem that found partial answers in some works by Severi and Łojasiewicz.*

Selon Severi [10], pendant plus d'un siècle on a cru possible de décider si en un point donné, une fonction réelle $f$, de $n \geqq 2$ variables, présentait un extremum local ne regardant que le comportement des restrictions de cette fonction aux droites passant par ce point. Si, par exemple, toutes les restrictions possédaient un minimum, alors on croyait qu'il en était de même pour la fonction $f$.

L'erreur de ce raisonnement a été exposée en 1884 par Peano [6], avec un contre-exemple simple: le polynôme $f(x, y) := (y^2 - 2x)(y^2 - x)$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Cherchant des conditions d'extremum des fonctions régulières, le plus naturel semble de considérer le polynôme de Taylor. Supposons, par exemple, que $m_{\min}$ est le plus petit entier pour lequel il existe des dérivés partielles d'ordre $m_{\min}$, de $f$, non nulles, au point $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$f(x) = f(x_0) + P_{\min}(x - x_0) + o(|x - x_0|^{m_{\min}}), \tag{1}$$

quand $x$ tend vers $x_0$, où $P_{\min}$ est un polynôme homogène de degré $m_{\min}$. Soient $\bar{a} = \min\{P_{\min}(y) : |y| = 1\}$, et $\bar{b} := \max\{P_{\min}(y) : |y| = 1\}$. Nous savons que

$$\begin{cases} \inf\limits_{|x|=r} f(x) = f(x_0) + \bar{a}\, r^{m_{\min}} + o(r^{m_{\min}}) \\ \sup\limits_{|x|=r} f(x) = f(x_0) + \bar{b}\, r^{m_{\min}} + o(r^{m_{\min}}) \end{cases} \tag{2}$$

Lorsque le produit $\bar{a}\bar{b}$ n'est pas nul, le type d'extremum de $f$ au point $x_0$ est déterminé seulement par $\bar{a}$ et $\bar{b}$. Plus explicitement,

1) si $0 < \bar{a} \leqq \bar{b}$ (c'est-à-dire, $P_{\min}$ est défini positif), la fonction $f$ a un minimum strict ;

2) si $\bar{a} \leqq \bar{b} < 0$ (c'est-à-dire, $P_{\min}$ est défini négatif), la fonction $f$ a un maximum strict ;

3) si $\bar{a} < 0 < \bar{b}$ (c'est-à-dire, $P_{\min}$ est indéfini) $f$ n'a pas d'extremum au point $x_0$.

Malheureusement, dans les autres cas où le produit $\bar{a}\bar{b}$ s'annule, c'est-à-dire où $P_{\min}$ est seulement semi-défini, on ne sait pas dire si $x_0$ est (ou n'est pas) un extremum de $f$. Par exemple, considérons la famille $f(x, y) := x^2 + ky^4$ (à un paramètre $k$), en $(x, y) = (0, 0)$ : pour $k > 0$, il y a un minimum strict, pour $k = 0$ il y a un minimum non strict, tandis que pour $k < 0$ il n'y a pas d'extremum.

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

0764-4442/95/03210821 $ 2.00 © Académie des Sciences

Considérons d'avantage de termes dans le développement de Taylor, jusqu'à l'ordre $k$ :

$$f(x) = P(x - x_0) + o(|x - x_0|^k) \tag{3}$$

où $P$ est un polynôme de degré $\leqq k$. On pourrait peut-être concevoir que pour $k$ assez grand le reste est négligeable, et que les propriétés d'extremum ne dépendent que de $P$. Plus précisément, on peut donner la définition suivante de décidabilité finie, un concept introduit par Scheeffer en 1890 [9]:

Définition 1. – Étant donnés une fonction régulière $f$, définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et un entier $k \geqq 1$, on dit que $f$ est *$k$-décidable* en $x_0$, ou bien que $k$ est un *ordre (fini) de dédidabilité* pour $f$ en $x_0$, si toutes les fonctions régulières admettant le même développement de Taylor jusqu'à l'ordre $k$ possèdent aussi les mêmes propriétés d'extremum que $f$. Si, pour une fonction donnée $f$, il y a un entier $k \geqq 1$ tel que $f$ soit $k$-décidable en $x_0$, on dit que $f$ est *finiment décidable* en $x_0$.

Si l'on veut, on peut oublier les hypothèses de régularité, en disant que $f$ est $k$-décidable si $f + g$ a les mêmes propriétés d'extremum en $x_0$ quelque soit le choix de $g(x) = O(|x - x_0|^{k+1})$.

On voit aisément que les constantes sont des exemples de fonctions sans ordre fini de décidabilité, même à une variable. Plus généralement, une fonction admettant un extremum non strict en $x_0$ ne peut pas avoir un ordre fini de décidabilité car aussi grand que soit $k \in \mathbb{N}$, l'addition d'un terme de la forme $c|x - x_0|^{2k}$ donne lieu à des fonctions ayant des propriétés d'extremum différentes, malgré la coïncidence de leurs développements de Taylor jusqu'à l'ordre $2k - 1$.

En outre, pour des fonctions $C^\infty$ mais non analytiques, même des conditions d'extremum fort ou de non-extremium n'entraînent pas la décidabilité finie.

Après quelques recherches sans trouver d'autres exemples de fonctions non finiment décidables on est amené à conjecturer :

Problème 2. – *Est-ce que toute fonction analytique non finiment décidable en $x_0$ possède un extremum non strict ?*

Dans le cas bidimensionnel, Severi a donné une réponse positive en 1930, [10], se servant du théorème de préparation de Weierstrass et de la théorie des courbes analytiques dans le plan. Dans le cas $n$-dimensionnel une réponse partielle résulte de l'inégalité suivante, prouvée en 1961, [7]:

Inégalités de Łojasiewicz. – Soit $f$ une fonction analytique réelle définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, si nous la restreignons à un voisinage éventuellement plus petit $U$ de $x_0$, il existe des constantes $c$, $\alpha > 0$ telles que

$$|f(x) - f(x_0)| \geqq c \cdot \operatorname{dist}(x, f^{-1}(f(x_0)))^\alpha \tag{4}$$

(distance euclidienne), pour tout $x \in U$.

En fait, si $f$ admet un extremum strict en $x_0$ – le voisinage étant assez petit – nous avons $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ et

$$|f(x) - f(x_0)| \geqq c|x - x_0|^\alpha \quad \text{pour tout } x \text{ proche de } x_0. \tag{5}$$

Alors $\lfloor \alpha \rfloor$ est un ordre de décidabilité pour $f$ en $x_0$ ($\lfloor t \rfloor$ est le plus grand entier $\leqq t \in \mathbb{R}$).

Dans [2], les auteurs prouvent que la réponse à la conjecture est « oui », sans restrictions, comme une simple conséquence du résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 3. – *Soient $U$ un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction réelle analytique. Pour $r \geqq 0$ soient*

$$(6) \qquad m(r) := \inf_{|x - x_0| = r} f(x) \quad \text{et} \quad M(r) := \sup_{|x - x_0| = r} f(x).$$

*Alors les fonctions $m$ et $M$ peuvent être développées, pour $r > 0$ assez petit, en série de puissances fractionnaires, de la forme*

$$(7) \qquad m(r) = f(x_0) + \sum_{k \geq 1} a_k\, r^{k/p}, \qquad M(r) = f(x_0) + \sum_{k \geq 1} b_k\, r^{k/q},$$

*avec $p,\ q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et $a_k,\ b_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$.*

En particulier, il existe des constantes $a,\ b \in \mathbb{R}$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}$, ($\alpha \geqq 1$ et $\beta \geqq 1$) telles que les expansions asymptotiques suivantes aient lieu :

$$(8) \qquad m(r) = f(x_0) + a \cdot (r^\alpha + o(r^\alpha)), \qquad M(r) = f(x_0) + b \cdot (r^\beta + o(r^\beta)).$$

A vrai dire, il suffit de prendre pour $a$ et $b$ (resp.) les premiers coefficients non nuls des séries (7), et pour $\alpha$ et $\beta$ les exposants correspondants, à moins évidemment qu'une des séries (ou toutes les deux) ne s'annule, auquel cas on prend $a$ (ou $b$) $= 0$ et $\alpha$ (ou $\beta$) arbitraire.

Les formules (8) doivent être cohérentes avec (2), de sorte que, si $f$ n'est pas constante, au moins un des deux exposants doit coïncider avec l'ordre $m_{\min}$ de la première dérivée non nulle de $f$ en $x_0$. Quand $f$ a un extremum non strict, l'exposant significatif sera $m_{\min}$, tandis que si $f$ a un extremum fort, ou bien si elle n'a pas d'extremum, les deux exposants sont significatifs et le plus petit sera $m_{\min}$.

En inventoriant les combinaisons possibles pour les coefficients $a,\ b,\ \alpha,\ \beta$ on voit que :

1) $f$ n'est pas finiment décidable en $x_0$ si et seulement si elle a un extremum non strict en $x_0$, cas où $ab = 0$ ;

2) $f$ est finiment décidable en $x_0$ si et seulement si elle n'a pas un extremum non strict en $x_0$, cas où $ab \neq 0$. Alors, $\max\{\lfloor \alpha \rfloor,\ \lfloor \beta \rfloor\}$ est son plus petit degré de décidabilité.

Par exemple, pour le polynôme

$$(9) \quad f(x,\ y) := 1\,260\, x^8\, y + 3\,360\, x^6\, y^3 - 315\, y^4 + 4\,032\, x^4\, y^5 + 2\,304\, x^2\, y^7 + 512\, y^9$$

de degré 9, les calculs sont maniables et montrent que $f$ n'a pas d'extremum à l'origine, le degré de décidabilité est 10 et les exposants $\alpha$ et $\beta$ sont respectivement 4 et 32/3.

L'article [2] s'adresse à un lecteur non spécialiste s'intéressant par exemple à des applications à la théorie de la stabilité [8]. Pour la théorie des variétés semi-analytiques nous adressons le lecteur à l'article systématique de Bierstone et Milman [3].

Pour prouver le théorème 3 nous avons également trouvé un résultat ne semblant pas être bien-connu, même s'il est assez simple et mérite d'être considéré par lui-même. On l'appelle *théorème analytique de Sard* : soient $\Omega$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V \subset \Omega$ une variété semi-analytique, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction analytique et $x_0 \in \Omega$, alors il existe un voisinage $U$ de $x_0$ tel que l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de $g$ à

$V \cap U$ soit fini. Il se peut que « l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction analytique d'une variété semi-analytique est localement fini » soit une meilleure forme mnémonique.

La technique de démonstration du théorème 3 est une élaboration de quelques idées présentées dans [1]. Le point principal est l'existence de deux courbes $\gamma_{\min}, \gamma_{\max} : ]-1, 1[ \to \mathbb{R}^n$, *analytiques*, telles que, pour tout $r > 0$ assez petit, l'infimum et le supremum définissant $m(r)$ et $M(r)$ sont atteints sur ces deux courbes. Par exemple, pour tout $r > 0$ assez petit,

$$m(r) = f(\gamma_{\min}(t)) \text{ pour le (seul) } t > 0 \text{ tel que } |\gamma_{\min}(t)| = r. \tag{10}$$

Note remise le 20 mars 1995, acceptée après révision le 21 juillet 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Â. Barone-Netto, Jet-detectable extrema, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 92, n° 4, 1984, p. 604-608.

[2] Â. Barone-Netto, G. Gorni et G. Zampieri, Local extrema of analytic functions, *Nonlinear Differential Equations Appl.*, Birkhäuser (à paraître).

[3] E. Bierstone et P. D. Milman, Semianalytic and Subanalytic Sets, *Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math.*, 67, 1988, p. 5-42.

[4] M. V. P. Garcia, A note on $k$-decidability, *X Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 1, 1987, p. 343-345.

[5] M. V. P. Garcia, A version of the curve selection lemma for real analytic sets, *35° Seminário Brasileiro de Análise*, 1992, p. 359-368.

[6] A. Genocchi et G. Peano, *Calcolo Differenziale*, Torino, Bocca, 29, 1884.

[7] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division*, Polska Akademia Nauk, Rozprawy Matematyczne XXII, 1961.

[8] L. Mazzi et A. Bacciotti, Some Remarks on $k$-asymptotic stability, *Boll. Un. Mat. Ital. A* (7), 8, 1994, p. 353-363.

[9] C. Scheeffer, Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Variablen, *Math. Ann.*, 35, 1890, p. 541-576.

[10] F. Severi, Sugli estremanti delle funzioni di due variabili, *Mem. R. Acad. Ital.*, 1, n° 1, 1930, p. 3-19.

*Â. B.-N. : Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, Caixa Postal 66 281, 05389-970 São Paulo, Brasil;*
*Barone@ime.usp.br*

*G. G. : Università di Udine, Dipartimento di Matematica e Informatica, via delle Scienze 206, 33100 Udine, Italia;*
*Gorni@dimi.uniud.it*

*G. Z. : Università di Messina, Dipartimento di Matematica, Salita Sperone 31, 98166 Sant'Agata, Messina, Italia.*
*Gaetano@pdmat1.unipd.it*