

Algumas Noções e Exemplos da Teoria de Equações Diferenciais Parciais Funcionais*

Sergio M. Oliva[†]

18 de outubro de 1999

Resumo

Equações diferenciais parciais funcionais aparecem como modelos de sistemas físicos, biológicos e químicos que dependem simultaneamente de variáveis espaciais e temporais. Tais sistemas possuem comportamentos muito mais complexos que as equações funcionais ou parciais. Um estudo sistemático de tais equações, do ponto de vista de sistemas dinâmicos e/ou da teoria de semi-grupos, pode ser encontrado desde os anos setenta, e a teoria já está bem evoluída. Entretanto, apesar deste avanço, vários pesquisadores relutam em incluir a dependência funcional em seus modelos, perdendo assim vários aspectos dinâmicos.

O objetivo destas notas é ilustrar este vasto tópico, através de exemplos e alguns resultados básicos, tentando, na medida do possível, apresentar algumas semelhanças e diferenças com as equações diferenciais parciais e as equações funcionais.

*Apoio parcial do CNPQ - Proc.no. 300123/94-9

[†]Dept. Mat. Aplicada - IME - USP - Rua do Matão, 1.010 - CEP 05508-900 - São Paulo - SP - Brazil

Sumário

Resumo	i
Índice	ii
1 Introdução	1
2 Exemplos	1
<i>Exemplo 1. Ecologia Populacional</i>	2
<i>Exemplo 2. Teoria de Controle</i>	6
<i>Outros Exemplos</i>	9
3 Existência e Unicidade de Soluções	9
3.1 Resultados Abstratos	10
3.2 O Caso Autônomo	12
3.3 Diferenciabilidade com respeito a t	14
3.4 Aplicando os Resultados Abstratos	14
4 Dissipatividade e Crescimento Exponencial	15
Referências	16

1 Introdução

Equações diferenciais parciais funcionais aparecem como modelos de sistemas físicos, biológicos e químicos que dependem simultaneamente de variáveis espaciais e temporais. Tais sistemas possuem comportamentos muito mais complexos que as equações funcionais ou parciais. Um estudo sistemático de tais equações, do ponto de vista de sistemas dinâmicos e/ou da teoria de semi-grupos, pode ser encontrado desde os anos setenta, e a teoria já está bem evoluída. Entretanto, apesar deste avanço, vários pesquisadores relutam em incluir a dependência funcional em seus modelos, perdendo assim vários aspectos dinâmicos.

Nestas notas daremos uma pequena introdução ao assunto, começando com alguns exemplos, para mostrar a gama de aplicações possíveis. A partir daí, estabeleceremos um teorema de existência e unicidade de soluções, fortemente baseado nos resultados de Henry [8], para tanto restringiremos a classe de equações que estudaremos. Com isto aplicaremos estas noções à uma equação em particular e mostraremos um comportamento que não acontece nem em equações puramente parciais e nem em equações puramente retardadas.

Estas notas estão longe de serem completas ou mostrar a teoria por completo. Para isto indicamos o excelente livro de Wu [22], e um "survey" de Hale [5].

Esperamos, com estas notas, cativar novos pesquisadores a entrarem nesta fascinante área.

2 Exemplos

O objetivo desta seção é apresentar alguns exemplos de equações diferenciais funcionais semilineares abstratas e assim preparar o leitor para os teoremas de existência e unicidade que serão apresentados na próxima seção. Esta seção é baseada no livro de Wu [22], e não tem como objetivo ser uma fonte de referência na área de aplicação, mas sim apresentar alguns modelos matemáticos.

Por uma equação diferencial funcional semilinear abstrata, entendemos um sistema de evolução descrito por

$$\frac{du(t)}{dt} = A_T u(t) + F(u_t), \quad t \geq 0,$$

onde A_T é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X , F é uma aplicação não-linear com valores em X , definida em $C = C([-\tau, 0], X)$ e $u_t \in C$ é definido por $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, para todo $\theta \in [-\tau, 0]$, τ é uma constante não negativa. Uma definição mais precisa será dada mais adiante.

Muitas classes de equações diferenciais podem ser formuladas como uma equação diferencial funcional semilinear abstrata, tais como, equações de reação-difusão com retardamento, equações da onda e algumas equações que descrevem crescimento populacional. Nestas notas tomaremos como exemplo principal as equações de reação-difusão com um retardamento no termo de reação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d\Delta u(x, t) + f(x, u(x, t - \tau)), & x \in \Omega, t \geq 0, \\ u(x, t) = 0 \text{ ou } \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x, t) = \phi(x, t), & x \in \Omega, t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1)$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, Δ é o operador laplaciano em Ω , $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada normal exterior à Ω e ϕ é uma função dada.

A seguir, damos alguns exemplos para mostrar que tais equações aparecem naturalmente em várias áreas da ciência.

Exemplo 1. Ecologia Populacional

Para descrever a interação entre difusão espacial e retardamento temporal em ecologia populacional, iniciaremos com uma população formada somente por uma espécie, distribuída uniformemente em um hábitat isolado. Seja $u(t)$ o número de indivíduos (ou a densidade da população) num instante de tempo t . Então um modelo para o crescimento da população pode ser

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t)f(u(t)), \quad (2)$$

onde r é uma constante positiva, chamada de taxa de crescimento intrínseco e $uf(u)$ é a taxa de crescimento efetivo. Uma possível escolha para f , que

captura as características principais de um hábitat limitado é $f(u) = 1 - \frac{u}{K}$ que nos fornece a conhecida equação logística

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left(1 - \frac{u(t)}{K} \right), \quad (3)$$

onde cada solução não trivial, não negativa, converge para o equilíbrio estável $u \equiv K$, a *capacidade de sustentação* do hábitat, que é determinado por vários fatores, dentre eles, a oferta de alimento, espaço, predação.

Na equação (3), o mecanismo regulatório, que é dependente da densidade da população, age instantaneamente. Porém, na maioria das situações reais, estes efeitos regulatórios operam com alguma defasagem temporal. Um primeiro aprimoramento deste modelo para se incorporar esta defasagem é obtido ao se reformular o modelo (3) como

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left(1 - \frac{u(t-\tau)}{K} \right), \quad (4)$$

onde o retardamento τ pode se originar de diferentes causas, tais como período de incubação, gestação e longo período de renovação do suprimento alimentar. Esta equação também aparece como uma aproximação de um modelo populacional que é dependente das faixas etárias da população. A equação (4) foi introduzida inicialmente por Hutchinson [9] e Wangersky e Cunningham [21]. Mostrou-se que [veja, por exemplo, May [13]] (4) possui $u = K$ como equilíbrio exponencialmente estável, se $r\tau < e^{-1}$, um equilíbrio oscilatoriamente estável $u = K$, se $e^{-1} < r\tau < \frac{\pi}{2}$, e um ciclo limite estável se $r\tau > \frac{\pi}{2}$. Isto, como sugerido por May [12], representava fielmente os famosos dados experimentais de Nicholson [15] com "*blowfly*". É claro que termos regulatórios mais realísticos não devem depender somente da população em um tempo defasado exatamente de τ , mas sim de alguma média das populações passadas. Isto nos dá o seguinte

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left(1 - \frac{\int_{-\infty}^t Q(t-s)u(s)ds}{K} \right), \quad (5)$$

para alguma aplicação $Q : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ com $\int_0^{\infty} Q(s)ds = 1$. Equações como (4), (5) e suas modificações e generalizações foram muito estudadas, e

observaram-se muitos comportamentos dinâmicos complexos do crescimento populacional. Com isto, dados experimentais obtidos em laboratórios (tal como os chamados "patterns") puderam ser modelados convenientemente por estas equações. Para um relato mais detalhado dos resultados e problemas relacionados com sistemas ecológicos com termos hereditários, ver [22, 5, 7] e suas referências.

A dependência espacial do hábitat foi completamente desprezada nos modelos anteriores. Esta dependência pode complicar as relações ecológicas através de dois mecanismos: permite padrões não uniformes do hábitat, assim como das densidades populacionais; e permite o movimento (dispersão e migração) de um local a outro. Mais precisamente, em muitos, senão todos, sistemas ecológicos, as espécies podem se difundir no meio, além da evolução temporal. A difusão espacial provém da tendência das espécies migrarem para regiões com baixa densidade populacional. Isto será verdade se os fatores externos ao modelo (por exemplo, alimentação) estiverem uniformemente e continuamente distribuídos pelo tempo e espaço. Logo, nas regiões com alta densidade populacional, a comida ficará escassa, e os indivíduos da população tenderão a migrar para (ou terão uma maior expectativa de sobrevivência em) regiões com baixa densidade populacional.

O modelo de crescimento populacional em um hábitat heterogêneo está baseado em um conjunto de regras para o crescimento ou cinética local, e uma forma para a distribuição dos indivíduos ou comunicação entre os habitats locais. O modelo mais comum que incorpora estas características são as equações de reação e difusão. Como ilustração, vamos considerar uma população, constituída por única espécie, que se move em uma única dimensão (veja Levin [10]). Admitiremos que o fluxo por qualquer ponto x é o oposto do gradiente de concentração da espécie que se difunde $u(x, t)$ e proporcional ao gradiente com uma constante de proporcionalidade $\phi(x)$. Em outras palavras, o fluxo por x é $-\phi(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$. Suponha que a taxa de mudança local é $f(x, u(x, t))$. Considere x_1 e x_2 dois valores arbitrários de x e $U = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx$ a densidade total de população entre x_1 e x_2 . Então a taxa de variação de U , dada por $\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx$ é igual ao fluxo pelos pontos da fronteira x_2 e x_1 mais a variação do tamanho da população $\int_{x_1}^{x_2} f(x, u(x, t)) dx$, devido ao processo de crescimento localizado. Isto gera a seguinte equação

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u(x, t)) dx + \phi(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \phi(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1}.$$

Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo e por x_2 e x_1 serem dois pontos arbitrários, temos

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = f(x, u(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\phi(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]. \quad (6)$$

No caso especial em que $\phi(x)$ é uma constante D , (6) se torna

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = f(x, u(x, t)) + D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Se o hábitat tem comprimento finito, digamos L , então alguma condição na fronteira tem de ser imposta. As condições de fronteira de Dirichlet

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

ou de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0,$$

são as mais usuais. A primeira representa a situação onde o hábitat é circundado por regiões totalmente desfavoráveis, e portanto a densidade populacional não consegue ter valores positivos; o segundo caso descreve a situação em que a população não pode cruzar a fronteira do seu hábitat. Todas estas idéias se estendem, sem muitos problemas, para o caso de várias espécies em um hábitat com dimensões superiores e existe uma vasta literatura para a teoria de equações de reação-difusão.

A influência conjunta de retardamentos temporais, difusão espacial, e interações populacionais também foi estudada. Vários tipos interessantes de padrões espacio-temporais podem ser atribuídos a este efeito conjunto. Por exemplo, motivados pelo trabalho de Stirzaker [18], Murray [14] e Cohen, Hagan e Simpson [2] construíram o seguinte modelo genérico predador-presa, incorporando difusão espacial e retardamento temporal

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = & \alpha \Delta v(x, t) + h \left(\int_0^\infty K(s) v(x, t-s) ds \right) \\ & - m \left(\int_0^\infty H(s) v(x, t-s) ds \right), \end{aligned} \quad (7)$$

onde $v(x, t)$ é a população de presas no instante de tempo t e ponto x , o termo $h \left(\int_0^\infty K(s)v(x, t-s)ds \right)$ representa o processo de crescimento e decaimento da presa, e $m \left(\int_0^\infty H(s)v(x, t-s)ds \right)$ é a quantidade de presas consumidas pelo predador, mais ainda, K e H descrevem os efeitos hereditários. Murray [14] mostrou a existência de soluções do tipo "traveling waves" e Cohen, Hagan, e Simpson [2] estudaram sua estabilidade. Para considerarmos diretamente a dinâmica da população de predadores, temos de utilizar um sistema de duas equações de reação e difusão com retardamento e acopladas. Outras equações de reação e difusão mais gerais, ditas de Lotka-Volterra, também foram muito estudadas. E estas equações podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = & d_i \Delta u_i(x, t) \\ & + b_i u_i(x, t) \left[r_i - a_i \int_{-\tau_i}^0 u_i(x, t+s) d\mu_i(s) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^0 u_j(x, t+s) d\mu_{ij}(s) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

para $1 \leq i \leq n$. Aqui $u = (u_1, \dots, u_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, Ω é uma região aberta e limitada de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, d_i , b_i , a_i , τ_i são constantes positivas, μ_i e μ_{ij} são funções de variação limitada.

Várias interações entre retardamentos e difusão já foram estudadas, incluindo situações bem mais complexas que (8). Para mais referências, veja Wu [22].

Exemplo 2. Teoria de Controle

Existem inúmeros exemplos onde retardamento temporal e difusão espacial aparecem em *sistemas de controle*. Um exemplo interessante que gostaríamos de citar, mas que não trataremos aqui, é o caso de controle acústico, onde para se estabilizar um determinado ponto de equilíbrio, o mecanismo utilizado era o de aumentar o retardamento. Para isto veja Hale [5].

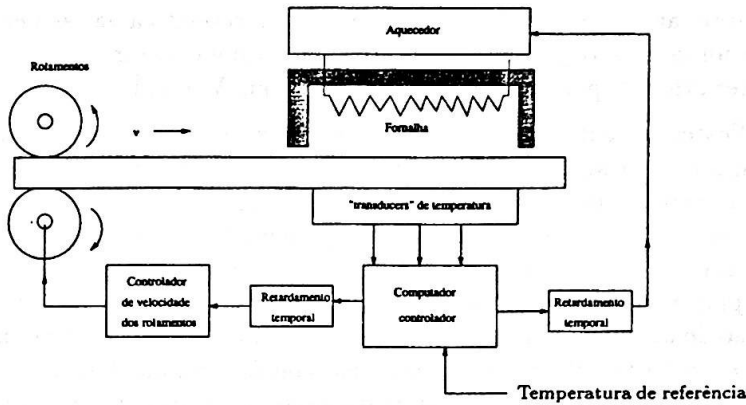


Figura 1: Esquema de uma fornalha controlada automaticamente

Nesta seção, como exemplo ilustrativo, seguiremos o trabalho de Wang [19], onde é considerado o modelo de uma fornalha controlada automaticamente, como ilustrado pela figura 1. O material a ser aquecido é alimentado para a fornalha através de roletes, cuja velocidade é regulada por um controlador de velocidade. A temperatura da fornalha varia através de um aquecedor conectado a um controlador de temperatura. O objetivo do controle automático é o de manter uma dada distribuição espacial de temperatura no material que é alimentado na fornalha. Isto pode ser atingido colocando-se “transducers” no material. Um computador utiliza as informações coletadas dos “transducers” para gerar os sinais de controle para o controlador de temperatura e de velocidade. Devido a presença de retardamentos temporais (ou os chamados “tempos mortos”) nos atuadores, na transmissão de informação e no processamento das informações, o sinal de controle pode estar retardado em tempo. Uma descrição simplificada deste sistema de controle pode ser dada pela equação

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + v(g(u(x, t - \tau)) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}) + c[f(u(x, t - r)) - u(x, t)]$$

definida em um domínio espacial unidimensional $0 < x < 1$, onde v é a velocidade instantânea do material, dependente da média espacial da distribuição de temperatura $u(x, t - \tau)$, e f representa a função de distribuição de temperatura da fonte, que depende de $u(x, t - r)$. Na prática, o interesse é de se

determinar a estabilidade dos equilíbrios com respeito a várias perturbações. Isso foi estudado por Wang [19] através do método direto de Liapunov, e posteriormente por vários outros autores (veja Wu [22]).

Posteriormente Wang [20] considerou um sistema parabólico no qual os retardamentos apareciam nas condições de fronteira. Tais sistemas aparecem fisicamente quando tentamos controlar um processo de difusão no qual os sinais retardados de realimentação são introduzidos pela fronteira do domínio espacial. Por exemplo, na teoria de controle de plasma, quer-se confinar um plasma num determinado domínio espacial Ω , limitado, através da introdução de uma barreira de potencial elétrico finito ou um "espelho magnético" ao redor de Ω . Para um plasma com colisões dominadas, a densidade de suas partículas é descrita por uma equação parabólica. Devido a inércia das partículas e o fato do potencial elétrico ser finito, ou ainda devido à força do campo magnético, a reflexão das partículas na fronteira do domínio não é instantânea. Consequentemente, o fluxo de partículas pela fronteira de Ω em um dado instante de tempo depende do fluxo de partículas que escaparam anteriormente e foram refletidas novamente para o interior de Ω em um instante de tempo posterior. Isto gera condições de fronteira contendo retardamentos temporais.

O sistema construído por Wang [20] consistia em uma equação parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t)u + f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

sujeito as seguintes condições de fronteira do tipo Neumann, só que com retardamentos,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \cos(\eta, x_i) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} = q(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)$$

e as condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, \theta) = u_0^*(x, \theta), \quad (x, \theta) \in \partial\Omega \times [-\tau, 0),$$

onde

$$A(t)u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

satisfazendo ainda a condição de elipticidade

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)z_i z_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n z_i^2$$

para todos $(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]$, $z \in \mathbb{R}^n$, onde $\alpha > 0$ é uma constante. A função f ou corresponde ao controle distribuído ou a uma função específica, definida em $\Omega \times (0,T)$, $\partial\Omega$ é a união de dois subconjuntos disjuntos Γ_1 e Γ_2 e

$$q(x,t) = \Phi(x)[b(x,t)u(w(x),t-\tau) + z(x,t)].$$

Nessa fórmula, Φ é uma dada função suave definida em $\partial\Omega$ com suporte compacto em Γ_1 , $\cos(\eta, x_i)$ é o i -ésimo cosseno diretor da normal exterior η em um ponto $x \in \partial\Omega$, b é uma dada função real suave definida em $\partial\Omega$, z ou representa o controle de fronteira ou é uma dada função definida em $\partial\Omega$, o retardo τ é uma constante positiva, w é uma bijeção continuamente diferenciável de $\partial\Omega$ sobre $\partial\Omega$ tal que $w(x) = x$ para $x \in \Gamma_2$ e $w(x) \in \Gamma_1$ se $x \in \Gamma_1$, cujo jacobiano não se anula em $\partial\Omega$, e as funções iniciais u_0 e u_0^* são funções dadas.

Outros Exemplos

Existem outros exemplos envolvendo modelos climatológicos, osciladores acoplados, materiais viscoelásticos, modelos populacionais estruturados, repressão genética, entre outros. Para uma ilustração destes vários exemplos, assim como uma referência mais estruturada deste assunto, podemos citar o livro de Wu [22].

3 Existência e Unicidade de Soluções

Nesta seção desenvolveremos os resultados abstratos sobre existência e unicidade de soluções de uma classe grande de equações diferenciais funcionais semilineares abstratas. Para tanto seguiremos de perto o trabalho de Oliveira [17], que adaptou os resultados de Henry [8] para este tipo de equações, a única diferença é que temos que adaptar os resultados para espaços fracionários, que é imediato.

Como o nosso objetivo é o de ilustrar os resultados, não provaremos os resultados, e encorajamos o leitor a estudar as referências indicadas.

3.1 Resultados Abstratos

Seja A um operador sectorial em um espaço de Banach X , de modo que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ e considere os espaços fracionários X^α , para $0 \leq \alpha < 1$, relacionados ao operador A , com a norma do gráfico. Para definições, exemplos e resultados, veja Henry [8].

Dado um número real $r \geq 0$, considere o espaço de Banach das funções contínuas $\varphi : [-r, 0] \rightarrow X^\alpha$ com a norma do supremo, que denotaremos por $C_\alpha = C([-r, 0], X^\alpha)$. $\{e^{-A_\alpha t} : t \geq 0\}$ sempre representará o semigrupo analítico gerado pelos operadores lineares fechados A_α em X^α , satisfazendo $\|e^{-A_\alpha t}\|_{L(X)} \leq M$, para todo $t \geq 0$ e uma constante $M \geq 1$.

Consideremos agora a seguinte equação abstrata

$$\dot{u}(t) + A_\alpha u(t) = F(t, u_t), \quad t > 0 \quad (9)$$

onde $F : \mathbb{R} \times C_\alpha \rightarrow X$ é contínua.

A primeira providência é definir o que entendemos por uma solução.

Definição 1 Por uma solução de (9) com condição inicial $u_0 = \varphi \in C_\alpha$ entendemos uma função contínua $u : [-r, T) \rightarrow X^\alpha$, com $T > r$, tal que

- (i) $u(t) = \varphi(t)$, para $-r \leq t \leq 0$,
- (ii) para $0 < t \leq r$, u é uma solução da equação integral

$$u(t) = e^{-A_\alpha t} \varphi(0) + \int_0^t e^{-A_\alpha(t-s)} F(s, u_s) ds,$$

(iii) para $r < t < T$, a função u é C^1 , $u(t) \in D(A_\alpha)$ e $\dot{u}(t) + A_\alpha u(t) = F(t, u_t)$, para todo $t \in (r, T)$.

Observação 1

1. Mostraremos adiante (Teorema 3) que se, ao invés de continuidade em $[-r, 0]$, exigirmos que φ seja localmente Hölder contínua em $(-r, 0]$, então uma função contínua $u : [-r, T) \rightarrow X^\alpha$, com $T > 0$, satisfazendo (i) em $[-r, 0]$ e (ii) em $[0, T)$ é uma função C^1 em $(0, T)$. Neste caso, esta definição coincide com a definição usual da teoria de equações de evolução.

2. A hipótese $T > r$ não é muito restritiva, pelo menos nos exemplos que consideraremos, pois, como veremos, as hipóteses sobre a não linearidade implicará na existência de solução em intervalos de tempo arbitrariamente grandes.

Teorema 1 Suponha que $F : \mathbb{R} \times C_\alpha \rightarrow X$ é contínua e localmente lipschitziana na segunda variável. Dado $(s, \varphi) \in \mathbb{R} \times C_\alpha$, existem um número real $\rho = \rho(s, \varphi) > 0$ e uma única função contínua $u : [s - r, s + \rho] \rightarrow X^\alpha$ tal que $u_s = \varphi$ e

$$u(t) = e^{-A_\alpha(t-s)}\varphi(0) + \int_s^t e^{-A_\alpha(t-\sigma)}F(\sigma, u_\sigma)d\sigma, \quad (10)$$

para todo $s \leq t \leq s + \rho$.

A prova é uma simples aplicação do teorema da contração uniforme. É fácil ver que, se $u, v : [s - r, s + \tau] \rightarrow X^\alpha$ (qualquer $\tau > 0$) são soluções contínuas de (10) tais que $u_s = v_s = \varphi$, então $u = v$ em $[s - r, s + \tau]$. Este resultado nos permite considerar a solução *maximal* de (10) que passa por (s, φ) : para cada (s, φ) , definimos $\rho^*(s, \varphi) = \sup\{\rho > 0 : (10) \text{ possui uma solução contínua em } [s - r, \rho]\}$ e $u(s, \varphi) : [s - r, \rho^*(s, \varphi)) \rightarrow X^\alpha$, definida por $u(s, \varphi)(t) = \varphi(t - s)$, se $s - r \leq t \leq s$ e, se $s < t < \rho^*(s, \varphi)$, então $u(s, \varphi)(t) =$ o valor da solução de (10), no instante t , satisfazendo $u_s = \varphi$, definida em $[s - r, \rho]$, com $t < \rho$. Pelo resultado anterior, u é uma função contínua, bem definida, no intervalo $[s - r, \rho^*(s, \varphi))$ e é uma solução de (10) satisfazendo $u_s = \varphi$. Qualquer outra solução v de (10) que satisfaça a mesma condição inicial tem de ser uma restrição de $u(s, \varphi)$. Claramente, o intervalo maximal de existência de uma solução maximal de (10) tem de ser aberto pela direita e o caso $\rho^*(s, \varphi) = \infty$ não é excluído.

Lema 1 Suponhamos que a solução $u = u(s, \varphi)$ de (10) satisfazendo $u_s = \varphi$ está definida em $[s - r, \rho)$, para algum $\rho > s$, e seja T um número real tal que $s < T < \rho$. Então, existe um número $\delta > 0$ tal que qualquer solução $v = v(s, \psi)$ de (10), com $v_s = \psi$ e $\|\varphi - \psi\| < \delta$, está definida, pelo menos, em $[s - r, T]$. Além disto, para um t fixo, $s \leq t \leq T$, a aplicação $\varphi \mapsto u_t(s, \varphi)$ é contínua.

Proof: Veja Oliveira [17].

Lema 2 Considere $(s, \varphi) \in \mathbb{R} \times C_\alpha$ e $u : [s - r, \rho^*) \rightarrow X^\alpha$ uma solução maximal de (10) satisfazendo $u_s = \varphi$. Se $\rho^* < \infty$, então $\limsup_{t \rightarrow \rho^* -} \frac{|F(t, u_t)|}{1 + \|u_t\|} = \infty$.

Proof: Veja Oliveira [17].

Corolário 1 Além das hipóteses do Teorema 1 suponhamos que F satisfaz a seguinte hipótese: $F(B)$ é um conjunto limitado de X , para qualquer conjunto limitado B contido em $\mathbb{R} \times C_\alpha$. Seja $u(s, \varphi)$ e $\rho^*(s, \varphi)$ como acima, e suponha que $\rho^*(s, \varphi) < \infty$, então, $\limsup_{t \rightarrow \rho^*(s, \varphi) -} \|u_t(s, \varphi)\| = \infty$.

Proof: Veja Oliveira [17].

Teorema 2 Suponhamos que $F : \mathbb{R} \times C_\alpha \rightarrow X$ seja C^1 . Sejam $(s, \varphi) \in \mathbb{R} \times C_\alpha$, $u(s, \varphi) : [s - r, \rho^*(s, \varphi)) \rightarrow X^\alpha$ uma solução de (10) por (s, φ) e $s < T < \rho^*(s, \varphi)$. Então, existe uma vizinhança U de φ tal que, para todo $\psi \in U$, a solução $u(s, \psi)$ de (10) com $u_s(s, \psi) = \psi$ está definida pelo menos em $[s - r, T]$ e, para cada $s \leq t \leq T$, a aplicação $\psi \in U \mapsto u(s, \psi)(t) \in X^\alpha$ é C^1 e suas derivadas $(\frac{\partial u}{\partial \psi}(s, \varphi) \cdot \xi)(t) \equiv v(t)$ em (s, φ) aplicados a ξ formam uma solução de

$$v(t) = e^{-A_\alpha(t-s)}\xi(0) + \int_s^t e^{-A_\alpha(t-\sigma)} \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\sigma, u_\sigma(s, \varphi)) \cdot v_\sigma d\sigma \quad (11)$$

em $(s, T]$ e $v(t) = \xi(t - s)$ em $[s - r, s]$.

Proof: Veja Oliveira [17].

3.2 O Caso Autônomo

Suponhamos que a equação (10) seja autônoma, ou seja, $F(t, \varphi) = H(\varphi)$ não depende de t . Se $u : [-r, \rho^*(\varphi)) \rightarrow X^\alpha$ é uma solução maximal de (10) tal que $u_0(\varphi) = \varphi$ e $s \in [0, \rho^*(\varphi))$, então a função $v(t) = u(\varphi)(t + s)$, definida em $[-s - r, \rho^*(\varphi) - s]$ é uma solução de (10) satisfazendo $v_0 = u_s(\varphi)$, logo $v(t) = u(u_s(\varphi))(t)$, para todo $t \in [-s - r, \rho^*(u_s(\varphi))]$. Isto implica que $\rho^*(\varphi) - s \leq \rho^*(u_s(\varphi))$ e $u(\varphi)(t + s) = u(u_s(\varphi))(t)$ para todo $t, s \geq 0$ tal que $s - r \leq t + s < \rho^*(\varphi)$. Portanto, se $-r \leq \theta \leq 0$, então $u_{t+s}(\varphi)(\theta) = u(\varphi)(t + s + \theta) = u(u_s(\varphi))(t + \theta) = u_t(u_s(\varphi))(\theta)$, e com isto, $u_{t+s}(\varphi) =$

$u_t(u_s(\varphi))$ para todo $t, s \geq 0$ tal que $t + s < \rho^*(\varphi)$. Destas ponderações e dos resultados anteriores podemos concluir que, se (10) for autônoma e as soluções $u(\varphi)$ estão definidas em $[-r, \infty)$ para todo $\varphi \in C_\alpha$, então, a aplicação $U(t) : C_\alpha \rightarrow C_\alpha$ dada por $U(t)\varphi = u_t(\varphi)$ define um semigrupo (não-linear) fortemente contínuo $\{U(t) : t \geq 0\}$ em C_α .

Descreveremos agora a relação entre $\{U(t) : t \geq 0\}$ e $\{e^{-A_\alpha t} : t \geq 0\}$. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ o semi-grupo fortemente contínuo, definido em C_α pelo operador A_α , isto é,

$$(T(t)\varphi)(\theta) = \begin{cases} e^{-A_\alpha(t+\theta)}\varphi(0), & \text{se } t + \theta > 0 \\ \varphi(t + \theta) & , \text{se } -r \leq t + \theta \leq 0. \end{cases}$$

Se $u(\varphi)$ é uma solução fraca de $\dot{u}(t) + A_\alpha u(t) = H(u_t)$ tal que $u_0 = \varphi$, então

$$u(t) = \begin{cases} e^{-A_\alpha t}\varphi(0) + \int_0^t e^{-A_\alpha(t-s)}H(u_s)ds & , \text{se } t > 0 \\ \varphi(t) & , \text{se } -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Se $t \geq 0$ e $-r \leq \theta \leq 0$, temos

$$u_t(\varphi)(\theta) = \begin{cases} (T(t)\varphi)(\theta) + \int_0^{t+\theta} e^{-A_\alpha(t+\theta-s)}H(u_s(\varphi))ds & , \text{se } t + \theta > 0 \\ (T(t)\varphi)(\theta) & , \text{se } -r \leq t + \theta \leq 0 \end{cases}$$

Definindo $X_0 : [-r, 0] \rightarrow L(X)$ por $X_0(\theta) = 0$, se $-r \leq \theta < 0$ e $X_0(0) = I$, a integral acima pode ser escrita como

$$\int_0^{t+\theta} e^{-A_\alpha(t+\theta-s)}H(u_s(\varphi))ds = \int_0^t [T(t-s)X_0](\theta)H(u_s(\varphi))ds,$$

que justifica a igualdade

$$u_t(\varphi) = T(t)(\varphi) + \int_0^t [T(t-s)X_0]H(u_s(\varphi))ds$$

para $t \geq 0$. Definiremos aqui,

$$[T(t)X_0](\theta) = \begin{cases} e^{-A_\alpha(t+\theta)} & , \text{se } t + \theta > 0 \\ 0 & , \text{se } t + \theta \leq 0 \end{cases},$$

que é (formalmente) a definição anterior.

3.3 Diferenciabilidade com respeito a t

Nesta seção obteremos condições suficientes para que a solução de (10) seja uma solução de (9). Suporemos que $F : \mathbb{R} \times C([-r, 0], X^\alpha) \rightarrow X$ é localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitziana em φ .

Lema 3 *Suponhamos que $\{e^{At} : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico em um espaço de Banach X e seja $f : (0, T) \rightarrow X$ uma função localmente Hölder contínua com $\int_0^\rho \|f(s)\| ds < \infty$ para algum $\rho > 0$. Para $0 \leq t < T$, defina $F(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds$. Então, F é contínua em $[0, T)$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, com $F(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$, $\dot{F}(t) = AF(t) + f(t)$ em $(0, T)$ e $F(t) \rightarrow 0$ em X quando $t \rightarrow 0+$.*

Proof. Veja Henry [8].

Nos resultados seguintes, a função $u : [-r, T] \rightarrow X^\alpha$ será uma solução de (10) em $[0, T]$ sujeita a condição inicial $u_0 = \varphi$.

Teorema 3 *Suponhamos que $\varphi : [-r, 0] \rightarrow X^\alpha$ é contínua e localmente Hölder contínua em $(-r, 0]$. Então, $t \mapsto u(t) : (-r, T] \rightarrow X^\alpha$ e $t \mapsto F(t, u_t) : (0, T] \rightarrow X$ são localmente Hölder contínuas e portanto, $t \mapsto u(t)$ é C^1 em $0 < t < T$, além disto, $\frac{du}{dt} \in X^\gamma$, para todo $\frac{n}{2p} < \gamma < \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}$.*

Proof. Veja Oliveira [17] e Henry [8].

Teorema 4 *Suponhamos que $\varphi : [-r, 0] \rightarrow X^\alpha$ seja contínua e u esteja definida em $[-r, T]$, para algum $T > r$. Então, u é localmente Hölder contínua em $(0, r]$, e portanto, u é C^1 em $r < t \leq T$.*

Proof. Veja Oliveira [17].

3.4 Aplicando os Resultados Abstratos

Vamos considerar nesta seção, a equação (1) com condições de Neumann, onde tomaremos, como ilustração, a não-linearidade f como sendo a mesma considerada por Hutchinson, ou seja

$$f(u, v) = \alpha u(t) \left(1 - \frac{u(t - \tau)}{K} \right), \quad (12)$$

Para estabelecer a existência e unicidade globais de solução neste caso, basta considerar o espaço $X = L^2(\Omega)$ e $A_d : D(A_d) \subset X \rightarrow X$ o operador autoadjunto definido por

$$\begin{aligned} D(A_d) &= \left\{ \phi \in H^2(\Omega) : \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \right\}, \\ A_d \phi &= -d\Delta \phi, \quad \forall \phi \in D(A_d). \end{aligned} \quad (13)$$

Vamos denotar por X_d^α os espaços fracionários associados a A_d munidos da norma do gráfico. Neste caso, podemos escrever então a equação na forma abstrata do capítulo anterior, onde as soluções estarão no espaço $C([- \tau, 0], X_d^\alpha)$.

É fácil se verificar que a não-linearidade neste caso é Lipschitz contínua e que as soluções estarão globalmente definidas.

Para maiores detalhes vide Wu [22] e Carvalho e Oliveira [1].

Observação 2 Poderíamos considerar a mesma não linearidade, só que na fronteira, ou seja a nossa condição de fronteira seria

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha u(t) \left(1 - \frac{u(t - \tau)}{K} \right)$$

na fronteira de Ω . Neste caso temos que utilizar espaços fracionários com potências negativas; para maiores informações veja [16].

4 Dissipatividade e Crescimento Exponencial

Nesta seção queremos explorar um pouco mais o exemplo da última seção, para ilustrar algumas diferenças existentes entre as equações retardadas, parciais e as expostas neste texto.

Observe que se tomarmos $\tau = 0$ em (12), então (1) se torna uma equação parabólica semilinear, onde a não linearidade é dissipativa. Pode se mostrar que tal equação é dissipativa, e na realidade possui um atrator compacto global em H^1 ; para maiores detalhes vide [6] e [8].

Caso $\tau > 0$ e $d = 0$, a equação (1) se torna a equação logística, que também possui um atrator compacto global, como mencionado na introdução.

Vejamos o que acontece se considerarmos $\tau, d > 0$. Então seguindo os artigos de Luckhaus [11] e Friesecke [3, 4] temos o seguinte teorema.

Teorema 5 *Se considerarmos a equação (1) com a não linearidade (12), então existe uma constante K , independente da condição inicial ϕ , tal que*

$$\sup_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq K,$$

se uma das seguintes condições é satisfeita:

- (1) Ω é um intervalo de um espaço de dimensão um;
- (2) $d > d_0$, para alguma constante d_0 suficientemente grande;
- (3) $0 \leq \tau < \tau_0$, para alguma constante τ_0 suficientemente pequena.

Mais tarde, Friesecke estendeu estes resultados, dando contra-exemplos, para quando (1), (2) ou (3) falham. Ou seja, existem soluções globais, que crescem exponencialmente rápido.

Referências

- [1] Carvalho, A.N. e Oliveira, L.A.F., *Delay-Partial Differential Equations with Some Large Diffusion*, Nonlinear Analysis, vol.22, n.9, 1057-1095, 1994.
- [2] Cohen, D.S., Hagan, P.S. e Simpson, H.C., *Spatial Structures in Predator-Prey Communities with Hereditary Effects and Diffusion*, Math. Biosci., 44, 167-177, 1979.
- [3] Friesecke, G., *Convergence to Equilibrium for Delay-Diffusion Equations with Small Delay*, J. of Dyn. and Diff. Equations, 5, No. 1, 1993.
- [4] Friesecke, G., *Exponentially Growing Solutions for a Delay-Diffusion Equation with Negative Feedback*, J. Diff. Eq. 98, 1-18, 1992.
- [5] Hale, J., *Effects of Delays on Dynamics*. In Topological Methods in Differential Equations and Inclusions (Eds. Granas and Frigon), 191-238, Kluwer, 1995.

- [6] Hale, J., *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, 25, AMS, 1988.
- [7] Hale, J. e Lunel, S.M.V., *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1993.
- [8] Henry, D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, 1981.
- [9] Hutchinson, G.H., *Circular Causal Systems in Ecology*, Ann. N.Y. Acad. Sci., 50, 221-246, 1948.
- [10] Levin, S.A., *Spatial Pattern in the Structure of Ecological Communities*, in Lect. Notes on Math. in the Life Scie., Vol. 8, Amer. Math. Soc., Providence, pp. 1-76, 1976.
- [11] Luckhaus, S., *Global Boundedness for a Delay Differential Equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 2 (1986), Vol. 294, 767-774.
- [12] May, R.M., *Stability and Complexity in Model Ecology*, 2nd. Ed., Princeton University Press, Princeton, 1975.
- [13] May, R.M., *Mathematical Aspects of the Dynamics of Animal Populations*, in Studies in Mathematical Biology, II: Population and Communities, Amer. Math. Soc., Providence, pp. 317-366, 1978.
- [14] Murray, J.D., *Spatial Structures in Predator-Prey Communities - a Non-linear Time Delay Diffusion Model*, Math. Biosci., 30, 73-85, 1976.
- [15] Nicholson, A.J., *The Self Adjustment of Populations to Change*, Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol., 22, 153-173, 1957.
- [16] Oliva, S.M, *Boundary Delay in Reaction-Diffusion Equations: Existence and Convergence to Equilibrium*, J. Dyn. Diff. Eq, 11, n. 2, April 1999.
- [17] Oliveira, L.A.F., *Instability of Homogeneous Periodic Solutions of Parabolic-Delay Equations*, Journal of Differential Equations 109, No. 1, 42-76, 1994.
- [18] Stirzaker, D., *On the Population Model*, Mat. Biosci., 23, 329-336, 1975.

- [19] Wang, P.K.C., *Asymptotic Stability of a Diffusion System with Time-Delays*, J. Appl. Mech., **30E**, 500-504, 1963.
- [20] Wang, P.K.C., *Optimal Control of Parabolic Systems with Boundary Conditions involving Time Delays*, SIAM J. Control, **13**, 274-293, 1975.
- [21] Wangersky, P. J. e Cunningham, W.J., *Timelag in Population Models*, Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol. **22**, 329-338, 1957.
- [22] Wu, J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **119**, Springer-Verlag, 1996.

Geometric theory for a quenching problem

Daniel Bauman Henry

IME-USP

October 1999

We will study a singular parabolic problem introduced by Kawarada [K] in 1975 and further studied by many authors [AW, CK, L, KN], aside from related "quenching" problems for other equations (for recent references, see [KN]). The solution quenches if it approaches the (finite) boundary of the region where the flow is smooth, at a finite time; after quenching, the mathematical model must change. Quenching is usually distinguished from Blow-up, when the solution tends to "infinity" at finite time. Both notions depend on the topology employed, but we consider only a simple unambiguous case:

(Kawarada's problem):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda / (1 - u) \text{ with } u < 1 \text{ in } \{0 < x < 1\} \times \{t > 0\} \\ u = 0 \text{ in } \{x = 0 \text{ or } 1\} \times \{t > 0\} \end{cases}$$

Here we have quenching at time $t^* (0 < t^* < \infty)$ if the solution exists in $0 < t < t^*$ but $\max_x u(x, t) \rightarrow 1$ as $t \rightarrow t^*$; this means $\max_x |u_t(x, t)| \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow t^*$ (see theorem 5 below) which was Kawarada's original definition of quenching in [K], but the more general form described above is now more common. Kawarada and many subsequent authors treated only the special initial value $u|_{t=0}=0$; we allow any (moderately smooth) initial value, bounded below and with $\sup_x u(x, 0) < 1$.

This is a singular gradient flow. Regular gradient flows, even in infinite dimensions, often allow a simple global analysis; a common conclusion is that every solution exists for all positive time and converges to an equilibrium as $t \rightarrow \infty$. (Some examples may be found in [He 1], [He 2], [Ha]). For a singular gradient flow, some solutions may exist for only a finite time before quenching or blow up, or perhaps could exist for all positive time without converging to an equilibrium. In Kawarada's problem, there is a Liapunov function $v(\varphi) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (\varphi'(x))^2 + \lambda \log(1 - \varphi(x)) \right) dx$

for $\varphi \in H_0^1(0,1)$ with $\max_x \varphi(x) < 1$ - which decreases strictly along any non-equilibrium solution u

$$\frac{d}{dt} v(u(t, \cdot)) = - \int_0^1 (u_{xx} + \lambda / (1 - u))^2 dx$$

But this fact is not decisive, as for regular gradient flows, since $V(u(t, \cdot))$ may tend to $-\infty$ and we can only conclude $u(t, \cdot)$ must come close to the singular set $\{\varphi: \max \varphi \geq 1\}$. On certain global solutions, however, V remains bounded, and this fact is important in the analysis; the maximum principle allows us to extend the results to more general solutions.

We also need a recent result (1996) of Brezis et alia [BCMR] - slightly generalized here as Theorem 1 - which says (in our case) any pointwise - increasing global solution $u(t, \cdot)$ converges to an equilibrium W in $L_1(0,1)$, with $u(t, x) \uparrow W(x)$ as $t \rightarrow \infty$ for all x . Only special solutions are increasing in time at each point, but there are enough (with help from the maximum principle) to analyze the behavior from any initial value. Theorems 2, 3 and 4 show every solution of Kawarada's problem (for any given $\lambda > 0$) either quenches or exists for all positive time and converges to an equilibrium as $t \rightarrow \infty$. Theorem 5 refers to Kawarada's original definition of

"quenching" $[K]: \max_x |u_t(x, t)| \rightarrow \infty$ rather than $\max_x u(x, t) \rightarrow 1$; we show these events are simultaneous.

Our argument uses a generalized version of a result of Brezis et alia [BCMR:Th.1]; the proof is only slightly different but is included for the sake of completeness.

Theorem 1 Suppose $n \geq 1, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ is an open bounded connected set and $\partial\Omega$ is a C^2 hypersurface which is the disjoint union of closed sets $\partial_N\Omega$ and $\partial_D\Omega$ (one of which may be empty). Assume $\beta: \partial_N\Omega \rightarrow [0, \infty]$ is C^1 , when $\partial_N\Omega \neq \emptyset$, and $s \rightarrow g(s): [a, b) \rightarrow [0, \infty)$ is C^1 , increasing (=non decreasing) and convex, $-\infty \leq a \leq 0 < b \leq +\infty$. Finally suppose, for some m_0 in $a < m_0 < b$, $g(m_0) > \lambda_1 m_0$ and $g'(m_0) > \lambda_1$ [λ_1 defined below] and in case $b = +\infty$, $\int_{m_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s) - \lambda_1 s} < \infty$.

Here λ_1 is the principal eigenvalue λ of the problem $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$ in Ω , $\phi = 0$ in $\partial_D\Omega$, $\frac{\partial\phi}{\partial N} + \beta\phi = 0$ in $\partial_N\Omega$, with $\phi \neq 0$; the corresponding eigenfunction ϕ_1 may be assumed to satisfy $\phi_1 > 0$ in $\Omega \cup \partial_N\Omega$, $\phi_1 = 0$ and $\partial\phi_1/\partial N < 0$ in $\partial_D\Omega$ and $\int_{\Omega} \phi_1 = 1$ (Note $\lambda_1 > 0$ except for the Neumann problem where $\partial_D\Omega = \emptyset$, $\beta \equiv 0$, $\lambda_1 = 0$).

Consider a globally defined solution u of $u_t = \Delta u + g(u)$ with $a \leq u < b$ in $\overline{\Omega}$ ($0 < t < \infty$)

$u = 0$ in $\partial_D\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial N} + \beta u = 0$ in $\partial_N\Omega$, for all $t > 0$ which we suppose is eventually increasing: for some $t_0 \geq 0$ $u_t(x, t) \geq 0$ for a.e. $x \in \Omega$ and $t = t_0$ - and so, for all $t > t_0$ and $x \in \overline{\Omega}$, by the maximum principle. Then for each x , define $W(x)$ by $u(t, x) \uparrow W(x)$ $g(u(t, x)) \uparrow g(W(x))$ as $t \rightarrow +\infty$ with $a \leq W(x) \leq b$ $g(W(x)) \leq +\infty$ ($< +\infty$ where $W(x) < b$);

In case $a=-\infty$, we suppose $u|_{t=0}$ is bounded below so the same is true for W .

We have $\int_{\Omega} W < \infty$, $\int_{\Omega} g(W) \delta < \infty$

Where $\delta(x) \equiv 1$ if $\partial_D \Omega = \emptyset$, $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial_D \Omega)$ if $\partial_D \Omega \neq \emptyset$ (so $W(x) < b$ a.e. in Ω) and, for all $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ with $\Psi = 0$ in $\partial_D \Omega$,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial N} + \beta \Psi = 0 \quad \text{in } \partial_N \Omega, \text{ we have } \int_{\Omega} (W \Delta \Psi + g(W) \Psi) = 0$$

(Such a function W we will call an " L_1 -weak equilibrium". If such W also satisfied $W \in H^2(\Omega)$ it would be a strict equilibrium with $\Delta W + g(W) = 0$ and $a \leq W < b$ a.e. in Ω , $W = 0$ in $\partial_D \Omega$ and

$$\frac{\partial W}{\partial N} + \beta W = 0 \quad \text{in } \partial_N \Omega.$$

Remark In our application, $n=1$, $\Omega = (0,1)$, $\partial_D \Omega = \emptyset$, $g(s) = \lambda/(1-s)$ with $a=-\infty$, $b=1$, and we see below any L_1 -weak equilibrium is a strict equilibrium (lemma 1).

The hypothesis of convexity, as well as the assumption that $g(x,s)$ depends only on s , allows us to apply Jensen's inequality; $g(\int_{\Omega} \phi d\mu) \leq \int_{\Omega} g(\phi) d\mu$ for any probability measure μ and any measurable $\phi: \Omega \rightarrow [a,b]$. [If ϕ a simple function, this is merely the definition of convexity; in general, take limits of simple functions]. In our case $\mu(S) = \int_S \phi_1 dx$ for measurable $S \subset \Omega$. This suggests further generalizations, which we won't pursue here.

Proof For simplicity, we suppose $t_0=0$ so u is always pointwise increasing in t . Note $u(t, \cdot)$ is bounded below, uniformly in $R_+ \times \Omega$, whether a is finite or not. Using the eigenvalue λ_1 and eigenfunction ϕ_1 defined above,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \varphi_1 = \int \varphi_1 g(u) - \lambda \varphi_1 u \geq g\left(\int_{\Omega} \varphi_1 u\right) - \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 u$$

for $t > 0$, if $\int_{\Omega} u(t^1) \varphi_1 \geq m_0$ for some $t^1 > 0$, it follows that $\int_{\Omega} u(t) \varphi_1$ would tend to b ($\leq +\infty$) at a finite time t^* so $u(t^*, x) = b$ a.e. $g(u(t^*, x)) = +\infty$ a.e. which is false. Thus $\int_{\Omega} u(t, \cdot) \varphi_1 < m_0$ for all $t > 0$, and $u(t, x) \geq -B > -\infty$ always.

$$\text{Now } \int_t^{t+1} \int_{\Omega} \varphi_1 (\Delta u + g(u)) = \left[\int_{\Omega} \varphi_1(u) \right]_t^{t+1} \leq m_0 + B$$

$$\text{so } \int_t^{t+1} \int_{\Omega} \varphi_1 g(u) \leq m_0(1 + \lambda_1) + B$$

for any $t > 0$. Since $t \rightarrow g(ut)$ is increasing, for all $t > 0$,

$$\int_{\Omega} g(u(t, \cdot)) \leq \int_{\Omega} \varphi_1 g(u(t, \cdot)) \left(\sup \frac{\delta}{\varphi_1} \right) \leq m_0(1 + \lambda_1) + B \sup_{\Omega} \frac{\delta}{\varphi_1} + m_1 < \infty$$

Finally, if $\lambda_1 > 0$, we may choose ζ_0 so $\Delta \zeta_0 = -1$ in Ω , $\zeta_0 = 0$ in $\partial \Omega$, $\partial \zeta_0 / \partial N + \beta \zeta_0 = 0$ in $\partial_N \Omega$; this implies ζ_0 / δ and ζ_0 / φ_1 are bounded in Ω so

$$\int_{\Omega} (u(t)) \leq \int_t^{t+1} \int_{\Omega} u = \int_t^{t+1} \int_{\Omega} (-\zeta_0 \Delta u) = \int_t^{t+1} \int_{\Omega} (\zeta_0 (-u_t + g(u)))$$

$$= - \left[\int_{\Omega} \zeta_0 u \right]_t^{t+1} + \int_t^{t+1} \int_{\Omega} (\zeta_0 g(u))$$

$$\leq B \int_{\Omega} \zeta_0 + \sup \left(\frac{\zeta_0}{\varphi_1} \right) m_0 + \sup \left(\frac{\zeta_0}{\delta} \right) m_1 = m_2 < \infty$$

for all $t > 0$. In case $\lambda_1 = 0$ ($\partial \Omega = \partial_N \Omega$, $\beta = 0$) We have $\varphi_1 = 1/\text{vol}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u(t) = \int_{\Omega} u(t) \varphi_1 \text{ vol}(\Omega) < m_0 \text{ vol}(\Omega).$$

In every case, therefore $\int_{\Omega} W = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t, \cdot) < \infty$ (and $u(t, \cdot) \rightarrow W$ in $L_1(\Omega)$, by Lebesgue's monotone convergence theorem); similarly $g(u(t, \cdot)) \rightarrow g(W)$ in $L_1(\Omega; \delta(x) dx)$, $\int_{\Omega} g(W) \delta < \infty$. Finally let Ψ be in $C^2(\bar{\Omega})$ with $\Psi=0$ on $\partial_D \Omega$, $\partial \Psi / \partial N + B \Psi = 0$ in $\partial_N \Omega$; $\int_{\Omega} u_t = \int_{\Omega} \Psi (\Delta u(t) + g(u(t))) = \int_{\Omega} u(t) \Delta \Psi + \Psi g(u(t)) \rightarrow \int_{\Omega} (W \Delta \Psi + \Psi g(W))$ so $[\int_{\Omega} \Psi u]^{t+1} = \int_{\Omega} (W \Delta \Psi + \Psi g(W)) + o(1) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$ and the proof is complete.

Theorem 2 (The equilibrium problem) For a certain $\lambda^* > 0$ ($\lambda^* \approx 2.34183$), the equilibrium problem

$$\begin{cases} \varphi'' + \frac{\lambda}{1-\varphi} = 0 \text{ and } \varphi < 1 \text{ in } 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = 0 = \varphi(1) \end{cases}$$

has no solution $\lambda > \lambda^*$, exactly one solution φ^* if $\lambda = \lambda^*$, and two solutions φ_1, φ_2 if $0 < \lambda < \lambda^*$. We have $0 < \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ in $0 < x < 1$, $0 < \lambda < \lambda^*$, φ_1 is asymptotically stable while the linearization about φ_2 has just one unstable eigenvalue, with the rest of the spectrum stable. As $\lambda \rightarrow \lambda^* -$, $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \varphi^*$; for $\lambda = \lambda^*$, the linearization in φ^* has one eigenvalue zero, with the rest of the spectrum stable.

Remark Every equilibrium solution φ (for $\lambda > 0$) is strictly concave and symmetric about $X = \frac{1}{2}$: $\varphi(x) = \varphi(1-x)$.

$\lambda^* = 2/x^{*2}$ where $x^* > 0$: maximizes $x^* \rightarrow e^{-x^{*2}} \int_0^x e^{y^2} dy$; $x^* \approx 0.924139$

Proof It is obvious, for $\lambda > 0$, that any equilibrium solution φ is strictly concave, has a unique maximum and is symmetric about that maximum point. Then the boundary condition

$\varphi(0)=0=\varphi(1)$ implies the maximum occurs at $X=1/2$ and $\varphi'(x)>0$

in $0 \leq x < 1/2$, so $\varphi'(x) = \sqrt{2\lambda \log \frac{1-\varphi(x)}{1-m}}$

in $0 \leq x < 1/2$, where $m=\varphi(1/2) = \max \varphi < 1$. Change of variables to $\theta \geq 0$, with $\theta^2 = 2\lambda \log \frac{1-\varphi}{1-m}$ gives the existence (or nonexistence) results claimed.

Since $\lambda \rightarrow \varphi_{1,2}(x, \lambda)$ are smooth families of equilibrium solutions in $0 < \lambda < \lambda^*$, φ_1 and φ_2 are hyperbolic (0 is not an eigenvalue of the linearization), by lemma 3, p.188, [He 2]. But (λ^*, φ^*) is a bifurcation point, so 0 is an eigenvalue of the linearization at φ^* . As $\lambda \rightarrow 0^+$, $\varphi_1 \rightarrow 0$ so φ_1 is asymptotically stable for small $\lambda > 0$, hence for all $0 < \lambda < \lambda^*$; $\varphi_1 \rightarrow \varphi^*$ as $\lambda \rightarrow \lambda^*$ so the spectra are also close.

The spectrum of the linearization at φ^* (with $\lambda = \lambda^*$) has all nonzero eigenvalues stable, and 0 is the principal eigenvalue. For λ slightly less than λ^* , also φ_2 is near φ^* with all the spectrum stable, except perhaps for the eigenvalue near zero; and that must be unstable, by a result of Crandall and Rabinowitz [CR]. Then for all $0 < \lambda < \lambda^*$, the linearization at φ_2 has a unique unstable eigenvalue, as claimed.

Theorem 2 treats strict equilibria, while Theorem 1 treats L_1 weak equilibria - but in our problem, these coincide.

Lemma 1 Let $W: [0,1] \rightarrow [0,1]$ be measurable, $\lambda > 0$, $g(x) = \lambda / (1-W(x))$

where $W(x) < 1$, $g(x) = +\infty$, where $W(x) = 1$, $\int_0^1 x(1-x)g(x)dx < \infty$ and for

all $\Psi \in C^2[0,1]$ with $\Psi(0)=0=\Psi(1)$, $\int_0^1 W\Psi'' + g\Psi = 0$ Then - after possible correction on a set of measure zero - W is C^2 in $[0,1]$ with $\max W < 1$, $W(0)=W(1)=0$ and $W'' + \lambda/(1-W) = 0$ in $[0,1]$, i.e. W is a strict equilibrium.

Proof Note $0 < g(x) < \infty$ a.e. in $0 < x < 1$, since g is locally integrable in $(0, 1)$.

Let $G(x) = \int_{1/2}^x (x - y)g(y)dy$ in $0 < x < 1$, which is locally C^1 with $G'(x) = \int_{1/2}^x g$ absolutely continuous in $0 < x < 1$ and $G'' = g$ a.e. For

$\Psi \in C_c^\infty((0, 1))$, $\int_0^1 (\Psi''G - \Psi g) = 0$ so $\int_0^1 (\Psi''(G+W)) = 0$. Thus the locally integrable function $W+G$ has $(W+G)'' = 0$ as a distribution in $(0, 1)$, so $W(x) + G(x) = C_0 + C_1x$ a.e. in $0 < x < 1$ for some constants C_0, C_1 . Redefining W on a set of measure zero, if necessary, we may suppose equality holds everywhere so W is C^1 with W' absolutely continuous and $W < 1$ a.e. (since $g < \infty$ a.e.). Choose an interval $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ where $W < 1$; then W is C^2 in (α, β) with

$$W'' + \lambda / (1 - W) = 0 \quad \text{so } W'(x)^2 + 2\lambda \log \frac{1}{1 - W(x)} = \text{constant in } (\alpha, \beta) \text{ and}$$

$\max W < 1$. If the interval (α, β) is chosen as large as possible, $W(x) \leq \text{constant} < 1$ in $0 < x < 1$ so W'' is bounded in $[0, 1]$, so W and W' extend continuously to $[0, 1]$. For $C^2\Psi$ with $\Psi(0) = 0 = \Psi(1)$,

$$0 = \int_0^1 (\Psi''W - \Psi W'') = [\Psi'W - \Psi W']_{x=0}^1 = W(1)\Psi'(1) - W(0)\Psi'(0), \text{ which implies } W(0) = 0 = W(1).$$

Lemma 2 Let $u < 1$, $u_t = u_{xx} + \lambda / (1 - u)$ in $\{0 < x < 1\} \times \{t > 0\}$ with $u = 0$ for $x = 0, 1$ ($t > 0$): u is a globally defined solution. Assume $\lambda > 0$ and $u_{t=0+}$ has values in $[a, b]$ where $-\infty < a \leq 0 \leq b < 1$. Then for sufficiently large $t_0 > 0$, when $t \geq t_0$

$u(t, x) \geq \frac{\lambda}{4}x(1-x)$ in $0 \leq x \leq 1$, i.e., every globally defined solution is eventually positive.

Proof $\mu(t, x) = a \leq 0$ (constant) satisfies $\mu_t = \mu_{xx}$ with $\mu \leq 0$ at $x=0, 1$ so the maximum principle shows $u(t, x) \geq \mu(t, x) = a$ for all $t \geq 0, 0 \leq x \leq 1$. Then $\lambda/(1-u) \geq \lambda/(1+|a|)$ so similarly $u \geq \mu$ where $\mu_t = \mu_{xx} + \frac{\lambda}{1+|a|}$ ($\mu=0$ at $x=0, 1$) with $\mu|_{t=0} = a$.

But $\mu(t, x) \rightarrow \frac{\lambda}{2(1+|a|)} x(1-x)$ (equally for the x -derivative) as $t \rightarrow \infty$, so eventually $u(t, x) \geq \frac{\lambda}{4(1+|a|)} x(1-x)$, say for $t \geq t_0^*$. We may thus suppose $u|_{t=t_0^*} \geq 0$ in $[0, 1]$ - or, replacing a by 0 , t_0^* by 0 , conclude that eventually $u(t, x) \geq \frac{\lambda}{4} x(1-x)$.

Theorem 3 If $\lambda > \lambda^*$, every solution quenches ($\max_{[0,1]} u(\cdot, t)$ reaches 1 in finite time).

Proof We show there are no globally defined solutions, by contradiction. Every global solution is eventually positive, by lemma 2, so we may suppose $u|_{t=0} \geq 0$. Let u^0 be the solution with initial value $u^0|_{t=0} = 0$; then $1 > u \geq u^0$ on $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$. But $\frac{\partial}{\partial t} u^0 = \lambda > 0$ at $t=0$ so u^0 is a globally defined, pointwise increasing solution. By theorem 1, u^0 converges to an L_1 -weak equilibrium, which is a strict equilibrium by lemma 1. For $\lambda > \lambda^*$, there are no such equilibria (Th.2) so there can be no global solution u or u^0 .

When $0 < \lambda \leq \lambda^*$, there certainly exist global solutions - the equilibria, for example. We can treat the case $\lambda = \lambda^*$ together with $0 < \lambda < \lambda^*$, if we write $\phi_1 = \phi_2 = \phi^*$, $W^u(\phi_2) = W^{cu}(\phi^*)$, $W^s(\phi_2) = W^{ss}(\phi^*) = \partial W^s(\phi_2)$, $W^s(\phi_1) = \text{interior } W^s(\phi^*)$, when $\lambda = \lambda^*$.

In every case ($0 < \lambda \leq \lambda^*$), $W^u(\phi_2)$ is a smooth curve, $W^s(\phi_2)$ is a smooth hypersurface and $W^s(\phi_1)$ is an open set.

Lemma 3 For $0 < \lambda \leq \lambda^*$, the curve $W^u(\phi_2)$ is the disjoint union of Γ_+ , ϕ_2 and Γ_- where $\Gamma_{\pm}$ are curves, $\Psi \in \Gamma_+$ implies $\Psi > \phi_2$ in $(0,1)$ and Ψ is in the quenching set, $\Psi \in \Gamma_-$ implies $\Psi < \phi_2$ in $(0,1)$ and $\Psi \in W^s(\phi_1)$.

Remark For ($0 < \lambda < \lambda^*$), $W^u(\phi_2)$ is an analytic curve; for $\lambda = \lambda^*$, $W^u(\phi_2)$ is C^m near ϕ_2 (for any given $m < \infty$).

Proof The linearization about ϕ_2 is $\Psi \rightarrow \Psi'' + \frac{\lambda}{(1 - \phi_2)^2} \Psi$, which has principal eigenvalue $\mu_1 (\geq 0; \mu_1 > 0 \text{ if } \lambda < \lambda^*)$ for the eigenfunction Ψ_1 ($\Psi_1(x) > 0$ in $0 < x < 1$; $\Psi_1 = 0$ and $\Psi_1' \neq 0$ at $x = 0, 1$). The curve $W^u(\phi_2)$ may be described (near ϕ_2) by $\theta \rightarrow \Psi(\theta) = \phi_2 + \theta \Psi_1 + O(\theta^2)$, θ near 0 in $\mathbb{R}$ with $\Psi(\cdot)$ a smooth (C^m) map of $\mathbb{R}$ (near 0) into $C^1[0,1]$ (at least). Thus if $\theta_1 < \theta_2$ (both near 0), $\Psi(\theta_1)(x) < \Psi(\theta_2)(x)$ in $0 < x < 1$ and the x -derivatives at $x = 0, 1$ are also distinct. [The flow in $W^u(\phi_2)$ is given by $\dot{\theta} = \mu_1 \theta + O(\theta^2)$].

The results used here are not stated in this form, but in equivalent versions. Thus in [Hel], theorem 6.1.2 proves (in more general form) the existence of the curve $W^u(\phi_2)$; smoothness (in both θ and λ) is proved in Th. 6.1.7.

Write $\Gamma_{\pm} = \{\Psi(\theta) : \pm\theta > 0, |\theta| \text{ small}\}$.

If $\Psi \in \Gamma_-$, u is the solution with $u|_{t=0} = \Psi$, then $u(t, \cdot) \leq \Psi$ ($\leq \phi_2 < 1$) on $\mathbb{R}^+ \times [0,1]$ and $V(u(t, \cdot))$ decreases to a finite limit as $t \rightarrow \infty$. It follows that $u(t, \cdot)$ converges to some equilibrium below ϕ_2 , which can only be ϕ_1 . If $\Psi \in \Gamma_+$ and u is the solution starting at Ψ , then $u_t(t, x) > 0$ [$u_t = (\Psi_1 + O(\theta))(\mu_1 \theta + O(\theta^2))$]. If u were

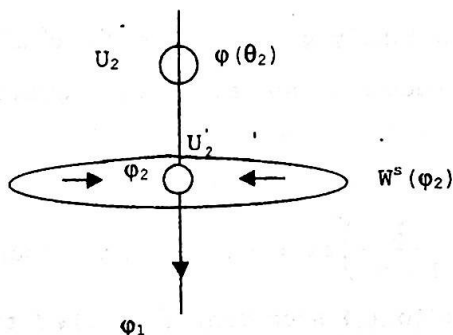
globally defined, Theorem 1 (and lemma 1) would provide an equilibrium strictly above φ_2 - but that contradicts Th.2. Thus u is not global and $\max u(t, \cdot)$ reaches 1 in finite time.

Lemma 4 A neighborhood of φ_2 is contained in $Q \cup W^s(\varphi_1) \cup W^s(\varphi_2)$ (or, $Q \cup W^s(\varphi^*)$ when $\lambda = \lambda^*$), where Q is the quenching set.

Proof Choose small $\theta_{1,2}$ with $0 < \theta_1 < \theta_2$; a small C^1 - neighborhood of $\Psi(\theta_2)$, denoted U_2 , has $\Psi(\theta_1) \leq \varphi$, for all $\varphi \in U_2$.

The solution starting in $\Psi(\theta_1)$ quenches, so all U_2 is in the quenching set Q .

Let U'_2 be a very small ball, centered at φ_2 ; $W^s(\varphi_2)$ is a hypersurface and divides U'_2 in two parts, one meeting Γ_+ and the other meeting Γ_- . We choose U'_2 small, so any solution starting in U'_2 remains near φ_2 for a longtime, while it approaches exponentially to $W^u(\varphi_2)$ (see [He 1], 6.1.3). If the solution always remains near φ_2 , it is in $W^s(\varphi_2)$; otherwise it must leave above (near Γ_+) or below (near Γ_-). In the first case, it passes through $U_2 \subset Q$ so $\Psi \in Q$; in the second case, $\Psi \in W^s(\varphi_1)$.



Lemma 5 Every globally defined solution tends to an equilibrium as $t \rightarrow +\infty$.

Proof Suppose u is a globally defined solution which does not converge to an equilibrium; since ϕ_1 is asymptotically stable u must always remain outside a neighborhood of ϕ_1 , and by lemma 4 we also have $u(t, \cdot) \notin U'_2$ since $U'_2 \subset Q \cup W^s(\phi_1) \cup W^s(\phi_2)$.

By lemma 2, u is eventually positive and we may assume $u|_{t=0} \geq 0$. For $0 \leq \theta \leq 1$, let u^θ be the solution with initial value $u^\theta|_{t=0} = \theta u|_{t=0}$, so $u^\theta|_{t=0} = 0$ $u^1 = u$ and $u^0 \leq u^\theta < u^1 = u$ on $R^+ \times [0, 1]$, for all $0 \leq \theta \leq 1$, so these u^θ all globally defined. Since $u^\theta|_{t=0} = 0 \leq \phi_1$, $u^\theta \leq \phi_1$, and u^θ is pointwise increasing in time to an equilibrium, which can only be ϕ_1 ; thus $u^\theta(t, \cdot) \in W^s(\phi_1)$ for $t \geq 0$ and $\theta = 0$, and also for small $\theta > 0$ since $W^s(\phi_1)$ is open. For some θ^* in $0 < \theta^* \leq 1$, $u^\theta(t, \cdot) \in W^s(\phi_1)$ for $0 \leq \theta < \theta^*$, $t \geq 0$, but $u^{\theta^*}(t, \cdot) \notin W^s(\phi_1)$. Since $u^{\theta^*}(t, \cdot)$ is in the boundary of $W^s(\phi_1)$ and $V \geq \phi_1$ in $W^s(\phi_1)$, we have $V(u^{\theta^*}(t, \cdot)) \geq V(\phi_1) > -\infty$ and $t \rightarrow V(u^{\theta^*}(t, \cdot))$ decreases to a finite limit as $t \rightarrow +\infty$.

If $u^{\theta^*}(t, \cdot) \in W^s(\phi_2)$ then $\theta^* < 1$ and for some $t^* > 0$, $u^{\theta^*}(t^*, \cdot) \in U'_2$, so with θ slightly greater than θ^* , $u^\theta(t^*, \cdot)$ is in U'_2 above $W^s(\phi_2)$ and u^θ quenches so also $u(\geq u^\theta)$ quenches contrary to hypothesis.

Thus $u^{\theta^*}(t, \cdot) \notin W^s(\phi_1) \cup W^s(\phi_2)$, $V u^{\theta^*}(t, \cdot) \rightarrow L (\geq V(\phi_1))$ as $t \rightarrow +\infty$ and $\int_0^\infty dt \int_0^1 \left(u_{xx}^{\theta^*} + \frac{\lambda}{1 - u^{\theta^*}} \right)^2 dx < \infty$. We may choose, as above, a neighborhood U of $\{\phi_1, \phi_2\}$ such that $u^{\theta^*}(t, \cdot) \notin U$ for all $t \geq 0$. Then choose $t_k \rightarrow +\infty$ so $\Psi_k = u^{\theta^*}(t_k, \cdot)$ has $\int_0^1 \left(\Psi_k'' + \frac{\lambda}{1 - \Psi_k} \right)^2 dx \rightarrow 0$ and

$$\int_0^1 \left((\Psi'_k)^2 - 2\lambda \log \frac{1}{1 - \Psi_k} \right) \rightarrow 2L \quad \text{as } k \rightarrow \infty, \quad \text{while } \Psi_k \notin U. \quad \text{If}$$

$$f_k = \Psi'_k + \frac{\lambda}{1 - \Psi_k}, \quad \int_0^1 f_k^2 \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \text{for a constant } B_k,$$

$$(\Psi'_k(x))^2 + 2\lambda \log \frac{1}{1 - \Psi_k(x)} = 2 \int_0^x f_k \Psi'_k + B_k \quad \text{in } 0 \leq x \leq 1. \quad \text{Define}$$

$$N_k = \sqrt{\int_0^1 (\Psi'_k)^2}; \quad \text{then } 2\lambda \int_0^1 \log \frac{1}{1 - \Psi_k} = N_k^2 - 2L + o(1) \text{ so}$$

$$2N_k^2 - 2L + o(1) = B_k + 2 \int_0^1 dx \int_0^x f_k \Psi'_k = B_k + o(N_k) \quad \text{and so}$$

$$\Psi'_k(x)^2 + 2\lambda \log \frac{1}{1 - \Psi_k(x)} = 2N_k^2 + o(N_k) - 2L + o(1) \quad \text{uniformly in } 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{If } N_k \text{ were bounded (perhaps on a subsequence), } \log \frac{1}{1 - \Psi_k(x)}$$

would be uniformly bounded and $\Psi_k(x) \leq \text{constant} < 1$, so $\int_0^1 (\Psi'_k)^2$

would be bounded. A subsequence would then converge in

$H^s(0,1)$ when $s < 2$ (and weakly in H^2) to an equilibrium - but the

equilibria are in U and $\Psi_k \notin U$ for all k . Thus $N_k \rightarrow +\infty$ as

$k \rightarrow +\infty$; we suppose in particular that $N_k > 4$.

$$\text{Let } I_k = \{x : \Psi_k(x) < 1 - \exp(-N_k^2 / 2\lambda)\} : \text{ in } I_k,$$

$$2\lambda \log \frac{1}{1 - \Psi_k(x)} < N_k^2 \quad \text{so for all } x$$

$$(\Psi'_k(x))^2 + N_k^2 > (\Psi'_k(x))^2 + 2\lambda \log \frac{1}{1 - \Psi_k} = 2N_k^2 + o(N_k)$$

$$\text{or } |\Psi'_k(x)| > \sqrt{N_k^2 + o(N_k)} \geq N_k - 1 (> 3) \text{ in } I_k$$

Now $\Psi_k(x) < 1 - \exp(-N_k^2 / 2\lambda)$ (or $(x \in I_k)$ in intervals $[0, \alpha_k)$ and

$(1 - \beta_k, 1)$ with $0 < \alpha_k$, $\beta_k < \frac{1}{N_k - 1}$ while $\alpha_k, 1 - \beta_k$ are not in I_k . In

fact if $\alpha_k \leq x \leq 1 - \beta_k$, $x \notin I_k$, since Ψ_k is strictly monotonic in

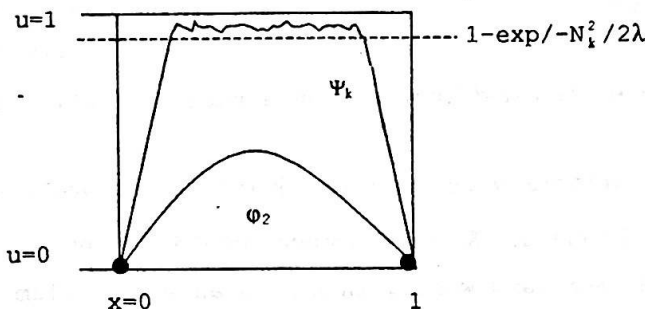
each interval contained in I_k ($|\Psi'_k| \geq N_k - 1 > 0$) and is never negative.

Thus for large k , $\Psi_k(0) = 0$ and

$$\Psi'_k(x) \geq N_k - 1 \text{ in } [0, \alpha_k]; \Psi_k(x) \geq 1 - \exp(-N_k^2/2\lambda) \text{ in } [\alpha_k, 1 - \beta_k]$$

$$\Psi_k(1) = 0 \text{ and } \Psi'_k(x) \leq -(N_k - 1) \text{ in } [1 - \beta_k, 1]$$

so $\Psi_k(x) > \phi_2(x)$ in $0 < x < 1$, and in fact Ψ_k is above some point of $\Gamma_+ \subset Q$. This implies $\Psi_k \in Q$, u^{θ^*} quenches so also u quenches - again, contrary to hypothesis. Now the proof is complete.



Theorem 4 If $0 < \lambda < \lambda^*$ (recalling our convention $\phi_1 = \phi_2 = \phi^*$ for $\lambda = \lambda^*$) the state space X is the disjoint union of the (open) sets Q and $W^s(\phi_1)$ and the (closed) hypersurface $W^s(\phi_2)$ which is their common boundary with Q above and $W^s(\phi_1)$ below. If $\lambda = \lambda^*$, $W^s(\phi^*)$ is a manifold with boundary and $X = Q \cup W^s(\phi^*)$.

Proof This is nearly included above, but it remains to prove: $\partial W^s(\phi_1) = W^s(\phi_2) = \partial Q$ and Q is open.

In fact, part of the argument for lemma 5 shows a solution in $\partial W^s(\phi_1)$ is necessarily global and so is in $W^s(\phi_2)$. Conversely, given a solution in $W^s(\phi_2)$, any solution starting

slightly above [or below] the given solution must be in Q [or $W^s(\phi_1)$], as is clear if we follow this solution until it is near ϕ_2 . Thus $W^s(\phi_2)$ is in $\partial W^s(\phi_1) \cap \partial Q$. In particular, $W^s(\phi_1) \cup W^s(\phi_2)$ is closed so its complement Q is open. Since ∂Q is disjoint from the open sets Q and $W^s(\phi_1)$, it must be in $W^s(\phi_2)$, and thus $\partial Q = W^s(\phi_2)$.

The original definition of "quenching" (in Kawarada [K] at time t^* asks that $\max_x |u_t(x, t)| \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow t^*-$, rather than $\max_x u(x, t) \rightarrow 1$. It is clear $\max_x |u_t(x, t)|$ will not blow up before the first time $\max_x u(x, t)$ reaches 1; we show these events are simultaneous.

Theorem 5 If $\lambda > 0, 0 < t^* < \infty$ and u is a solution of (1) in $\{0 \leq x \leq 1\} \times 0 < t < t^*\}$, then $\max_x u(x, t) \rightarrow 1$ as $t \rightarrow t^*-$ if and only if $\max_x |u_t(x, t)| \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow t^*$.

Proof Suppose $\max_x u(x, t) \rightarrow 1$ as $t \rightarrow t^*$ but $\max_x |u_t(x, t)|$ remains bounded - say $|u_t| \leq B$ on $\{0 \leq x \leq 1\} \times \{t_0 \leq t < t^*\}$ (for some t_0 in $0 < t_0 < t^*$). We show this is impossible, which proves the theorem. Note $\frac{d}{dt} V(u(t, \cdot)) = -\int_0^1 u_t^2$ is bounded in $t_0 \leq t < t^*$, so $V(u(t, \cdot))$ is also bounded. If $t_k \rightarrow t^*$, $\Psi_k = u(t_k, \cdot)$,

$\max \left| \Psi_k' + \frac{\lambda}{1 - \Psi_k} \right| \leq B$ and $\int_0^1 \left((\Psi_k')^2 - 2\lambda \log \frac{1}{1 - \Psi_k} \right) \leq C$ for some constant C .

Let $N_k^2 = \int_0^1 (\Psi_k')^2$; $\left| \frac{d}{dx} \left((\Psi_k')^2 + 2\lambda \log \frac{1}{1 - \Psi_k} \right) \right| \leq 2B |\Psi_k'|$ in $(0, 1)$

so $(\Psi'_k(x))^2 + 2\lambda \log \frac{1}{1 - \Psi_k(x)} = 2N_k^2 + \sigma_k C + 2BN_k \sigma_k$ with $\tau_k = \tau_k(x)$ in $[-1, 1]$.

Since $\frac{1}{1 - \Psi_k(x)}$ is unbounded above, $N_k \rightarrow \infty$.

Where $\Psi_k(x) \leq 1 - \frac{1}{N_k^2}$, we have $\Psi'_k(x)^2 \geq 2N_k^2 - C - 2BN_k - 4\lambda \log N_k$, so

for large k (and N_k) $|\Psi'_k(x)| \geq \sqrt{2} N_k - B (> 0)$ and Ψ_k is strictly monotonic in any interval where $\Psi \leq 1 - 1/N_k^2$. In particular $\Psi_k(x) \leq 1 - 1/N_k^2$ in $[0, \alpha_k] \cup (1 - \beta_k, 1]$

with equality when $x = \alpha_k$ or $1 - \beta_k$ and $0 < \alpha_k, \beta_k < \frac{1}{\sqrt{2}N_k - B}$. In

$\alpha_k \leq x \leq 1 - \beta_k$, $\Psi_k \geq 1 - \frac{1}{N_k^2}$ so

$$\Psi_k'' + \lambda N_k^2 \leq \Psi_k'' + \frac{\lambda}{1 - \Psi_k} \leq B, -\Psi_k'' \geq \lambda N_k^2 - B$$

(> 0 , for large k).

Thus $\Psi'(\alpha_k) + |\Psi'(1 - \beta_k)| = \int_{\alpha_k}^{1 - \beta_k} -\Psi_k'' \geq (\lambda N_k^2 - B)(1 - \alpha_k - \beta)$

so $2(\sqrt{2}N_k - B) \geq \Psi'(\alpha_k) + |\Psi'(1 - \beta_k)| \geq (\lambda N_k^2 - B) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}N_k - B}\right)$.

But this is false when N_k is large.

References

[AW] A. Acker and W. Walter, On the global existence of solutions of parabolic differential equations, Nonlin. Anal. 2, (1978) p. 495-505

- [BCMR] H. Brezis, T. Cazenave, Y. Martel and A. Ramiandriosa, Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited, Adv. Diff. Eq. 1 (1996), p.73-90.
- [CK] C.Y. Chang and M.K. Kwong, Quenching phenomena for singular nonlinear parabolic equations, Nonlin. Anal. 12 (1998), p.1377-1383.
- [CR] M.G. Crandall and P. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, J. Func. Anal. 8, (1971), p 321-340.
- [Ha] J.K. Hale, Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, AMS Surveys 25, Am.Math.Soc., (1988)
- [He1] D.B. Henry, Geometric Theory of Semi-linear Parabolic Equations, Lect. Notes in Math. 840, Springer-Verlag, (1981)
- [He2] D.B. Henry, Some infinite dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic equations. J.Diff.Eq. 59, (1985), p.165-205.
- [K] H. Kawarada, On solutions of initial - bounday problem for $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$, Publ. RIMS 10, (1975), p.729-736
- [KN] L. Ke and S.Ning, Quenching for degenerate parabolic equations, Nonlin. Anal. 34 (1998), p. 1123-1135
- [L] H.A. Levine, Advaaances in quenching, in Nonlinear Diffusion Equations 3, Eds. N.G. Lloyd, W.M.Ni, L.A. Peletier and J.Serrin, Birkhäuser Boston (1992).