

SOBRE A OCORRÊNCIA DE PESOS NEGATIVOS NA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE KRIGAGEM

Jorge Kazuo Yamamoto

Departamento de Geologia Econômica e Geofísica Aplicada do IG/USP

Como é do conhecimento do usuário da Geoestatística a ocorrência de pesos negativos resultantes da solução de sistemas de krigagem ordinária está ligada ao efeito de peneiramento, pelo qual as amostras mais próximas (passantes na malha da peneira) recebem pesos positivos numericamente superiores em detrimento daquelas distantes (retidas na malha da peneira) que geralmente resultam em valores numericamente pequenos podendo inclusive ser negativos. Tais valores da variável de interesse não apresentassem extremos, comuns em distribuições lognormais. Nestes casos, os teores estimados podem resultar em valores negativos ou então em valores superiores ou inferiores aos valores originais. Pontos ou blocos com teores negativos são inadmissíveis, pois em depósitos minerais caso sejam minério o teor deverá ser positivo, abaixo do teor de corte, podendo inclusive ser igual a zero, mas nunca negativo.

Colocado o problema, descreve-se a seguir algumas soluções para eliminação de pesos negativos como publicadas na literatura especializada. As soluções propostas para eliminação de pesos negativos (Barnes & Johnson, 1984 e Baafi et al., 1986) baseiam-se na resolução do sistema de equações de krigagem ordinária e verificação dos pesos resultantes. Se todos forem positivos, o resultado é considerado; caso contrário, as amostras com pesos negativos são eliminadas do sistema e o novo resultado é analisado. Caso ainda persista algum peso negativo o procedimento é repetido até que resulte em todos os valores positivos. O algoritmo de Barnes & Johnson (1984), denominado "atualização da inversa", trabalha com a matriz inversa original do sistema de krigagem ordinária. Se ocorrer algum peso negativo, a amostra correspondente é eliminada do sistema e a inversa é atualizada, de modo que reflita a redução da dimensão do sistema, e os pesos positivos. Outro algoritmo de Baafi et al (1986), também resolve uma primeira vez o sistema de krigagem ordinária. Se todos os pesos forem positivos o resultado é aceito, caso contrário são gerados todos os subconjuntos possíveis de r amostras do conjunto inicial n amostras ($r < n$), os quais são resolvidos, aceitando-se como solução aquele subconjunto que apresente menor variância de estimação. Este algoritmo implica na resolução de um grande número de sistemas de krigagem ordinárias e, portanto, ineficiente do ponto de vista computacional. Pelo que foi exposto, os artigos tratam do problema a partir dos efeitos e não das causas da ocorrência de pesos negativos. Estas causas são o número e distribuição espacial das amostras escolhidas para os sistemas de krigagem ordinária. Este trabalho apresenta algumas configurações espaciais, bem como o mapeamento da região de ocorrência de pesos negativos. Quanto ao número, Yamamoto & Bettencourt (1992) sugerem utilizar 4 a 8 amostras, com a ressalva de analisar as distâncias envolvidas amostra a amostra, pois, segundo estes autores, não é recomendável utilizar aquela que se apresentar muito distante do ponto a ser estimado, visto que pouco ajudará na interpolação daquele ponto mesmo que exista alguma correlação geológica. Com relação à distribuição espacial, pode-se utilizar do procedimento de pesquisa, denominado quadrante, que garantiria uma boa amostragem espacial. Entretanto, nem sempre os quatro quadrantes apresentam amostras, havendo necessidade, então de relaxar o critério para que o ponto possa ser avaliado. Por exemplo, se o critério inicial era de 1 amostra por quadrante e apenas dois quadrantes estão amostrados, pode-se relaxar a condição inicial para duas amostras por quadrante totalizando as mesmas quatro amostras, porém sem a mesma distribuição espacial prevista. São nestas situações que ocorrem com maior frequência os pesos negativos - justamente quando não há boa amostragem espacial dos pontos. Assim, este trabalho apresenta algumas configurações espaciais de dados para dois, três e quatro pontos fixos, situados à mesma distância do ponto a ser interpolado e, portanto, todos com pesos positivos, e o mapeamento do peso da amostra adicional aos conjuntos originais. Os resultados obtidos encontram-se nas Figuras 1, 2 e 3, respectivamente para dois, três e quatro pontos fixos. Antes de passar a interpretação dos resultados obtidos é preciso ressaltar que para o caso de uma única amostra, o teor do ponto interpolado será igual ao teor da amostra, independentemente da distância - princípio dos pontos mais próximos (Popoff, 1966), e para o caso de duas amostras os

pesos serão sempre positivos, podendo uma amostra ter peso igual a zero se estiver no cone de sombra da outra (com peso um) e exatamente nas mesma direção. Para conjuntos com números de pontos maiores ou iguais a três, existe a probabilidade de ocorrência de pesos negativos, função da distribuição espacial (distância e separação angular entre amostras). Nas Figuras 1, 2 e 3, pode-se observar que o campo dos pesos negativos da amostra adicional situa-se sempre no cone de sombra das amostras fixas e este por sua vez depende da distribuição espacial das amostras, sendo tanto maior quanto mais agrupados estiverem as amostras. Dentro do cone de sombra, para o caso de número de amostras pequeno, existe uma região com valores positivos - vide especialmente Figura 1C e 1D. A distância da amostra ao ponto a ser estimado é fator de importância fundamental na escolha das amostras para a krigagem ordinária (veja a configuração elíptica das curvas de igual peso da amostra adicional). Se a amostragem espacial não for boa (Figuras 1A, 2A e 3A), amostra adicional pode estar distante até 3 vezes a distância da amostra mais próxima que ainda aquela estará auxiliando a interpolação. Se acontecer o contrário, a amostra adicional deve ser tomada, de preferência, até duas vezes a distância da amostra mais próxima. As considerações feitas permitem escolher com mais critério o conjunto de pontos de dados para estimação por meio da krigagem ordinária. Contudo, ainda não é possível estabelecerlas em algoritmo, tendo em vista que não se conhece a relação matemática que caracterize a distribuição espacial dos pontos de dados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAAFI, E.Y.; KIM, Y.C.; SZIDAROVSKY, F. 1986. On non negative weights of linear kriging estimation. Min. Eng., 38(6):437-442.
- BARNES, R.J. & JOHNSON, T.B. 1984. Positive kriging. In: Verly et al. (eds.) Geostatistical for natural resource characterization. Part I, p.231-244.
- POPOFF, C.C. - 1966. Computing reserves of mineral deposits: principles and conventional methods. Washington, Bureau of Mines. 113p. (I.C. 8283).
- YAMAMOTO, J.K. & BETTENCOURT, J. - 1992. Avaliação de Reservas. Apostila do curso de pós-graduação. 113p.(inédito)

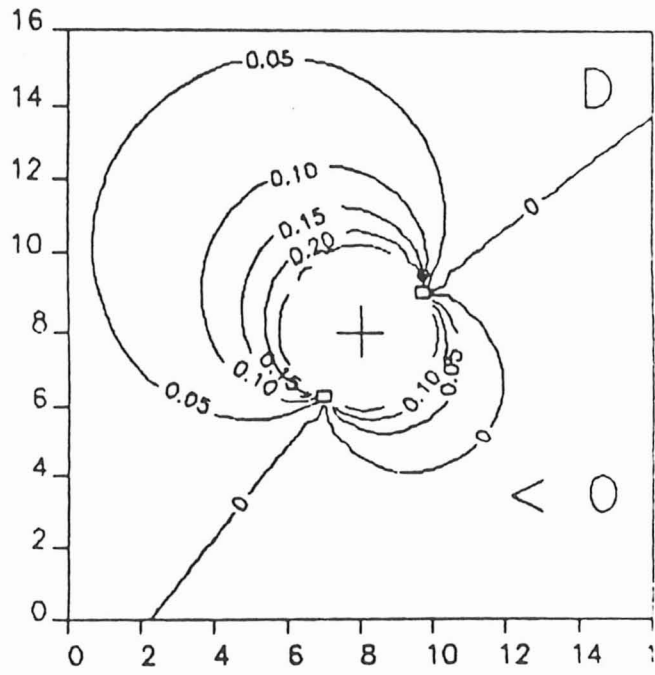
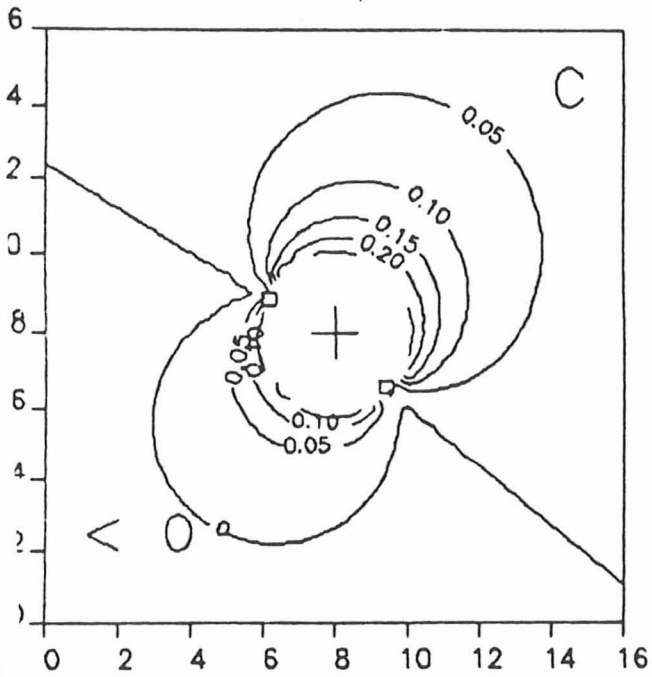
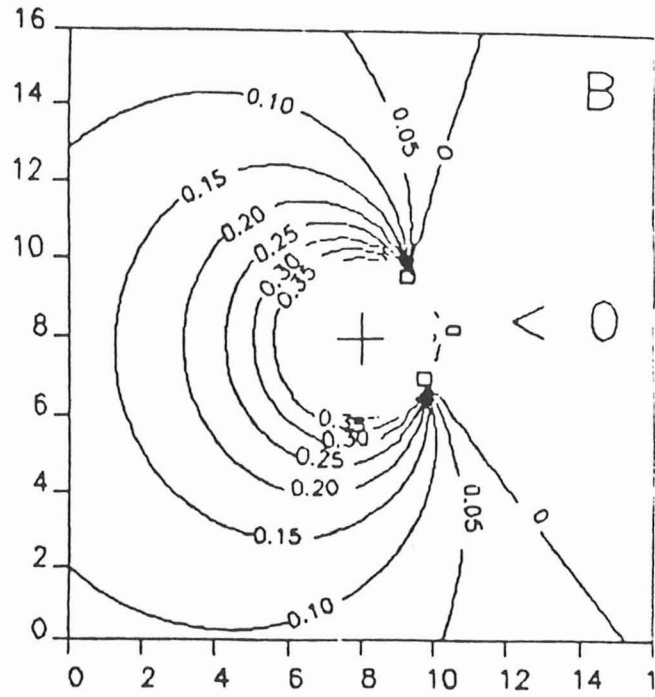
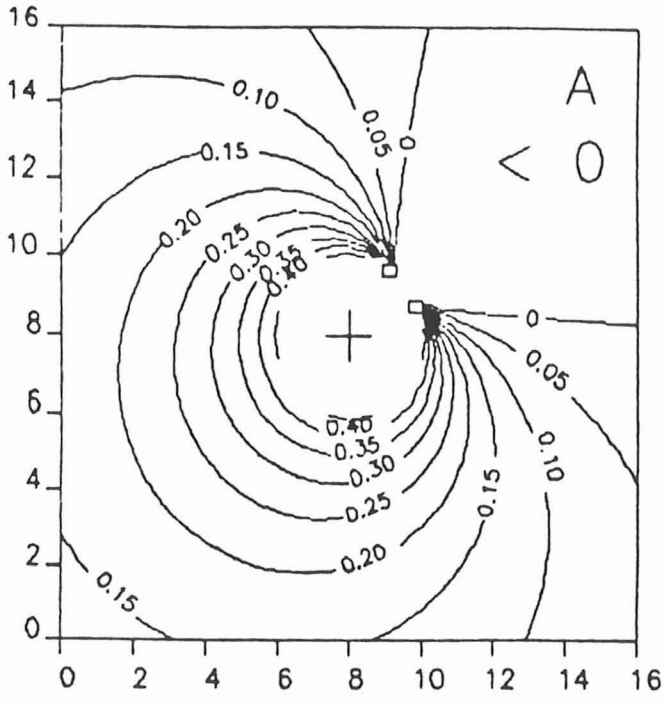


Figura 1: Padrões de variação do peso da amostra adicional para duas amostras fixas. Amostras fixas no primeiro quadrante (A); em dois quadrantes contínuos (B); e em quadrantes alternados (C e D).

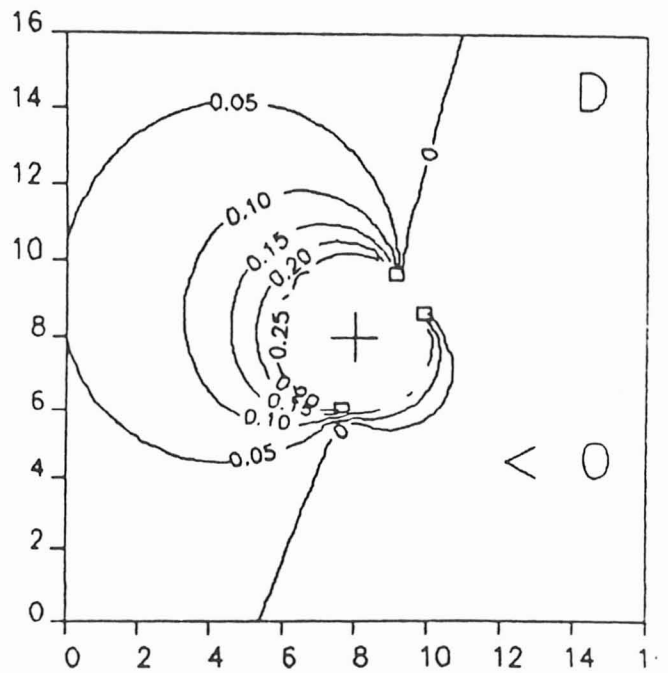
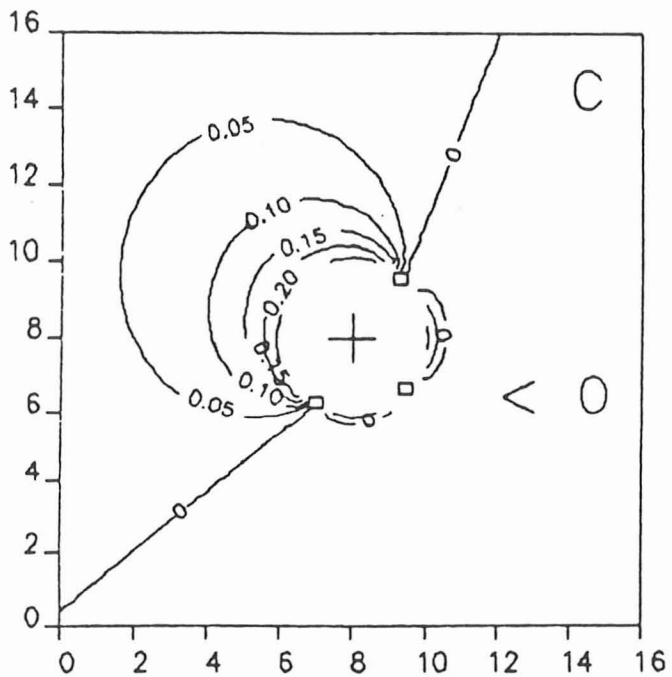
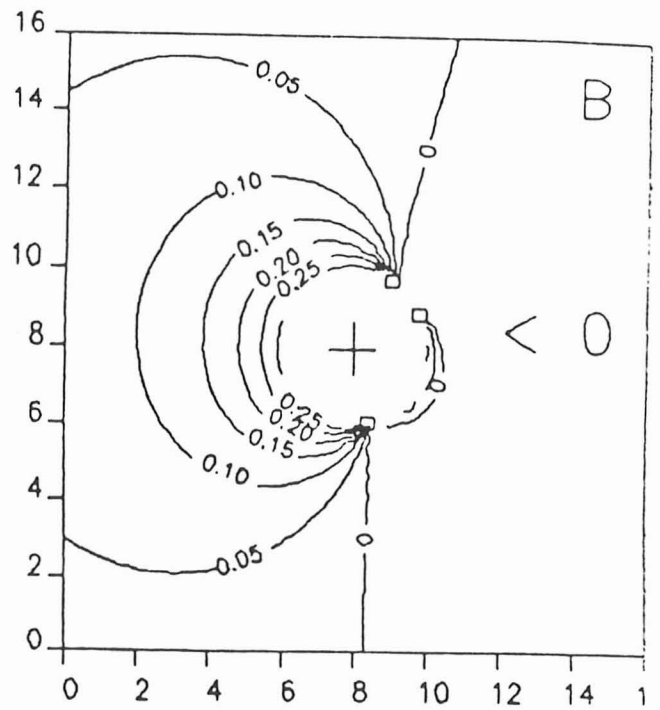
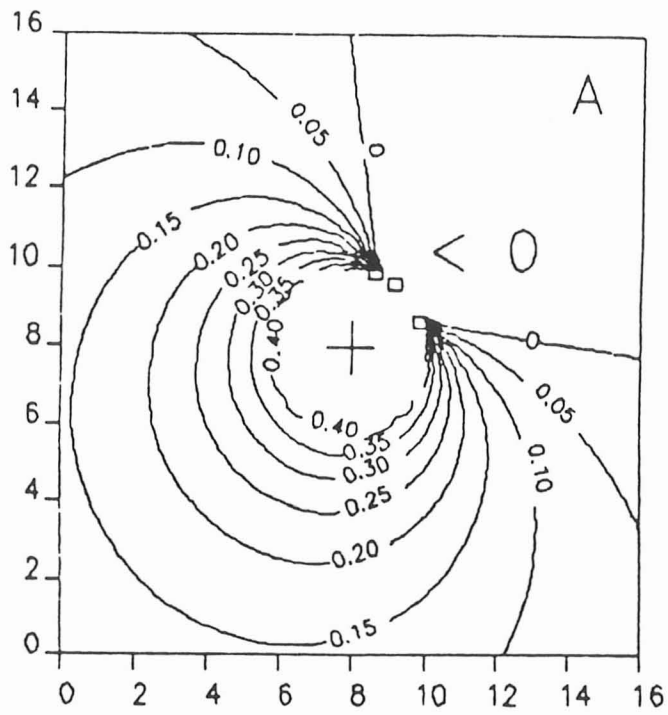


Figura 2: Padrões de variação do peso da amostra adicional para três amostras fixas. Amostras fixas no primeiro quadrante (A); em dois quadrantes (B); e em três quadrantes (C e D).

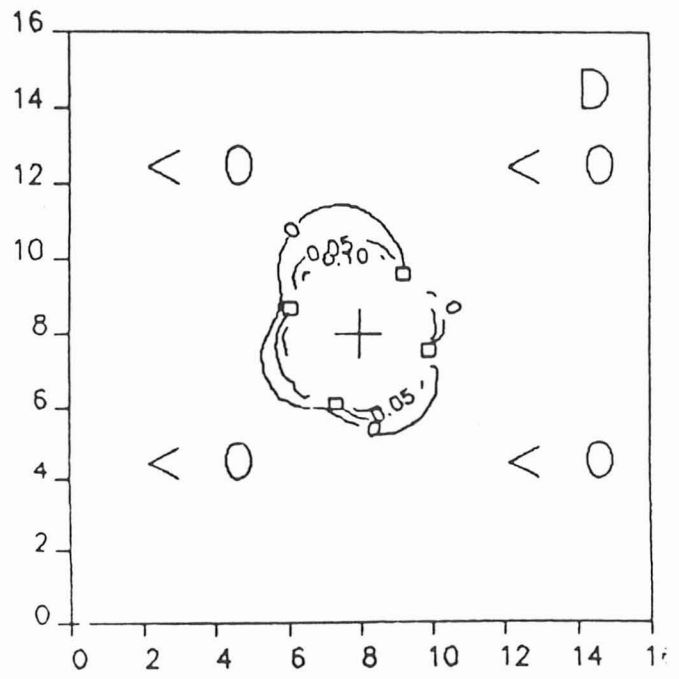
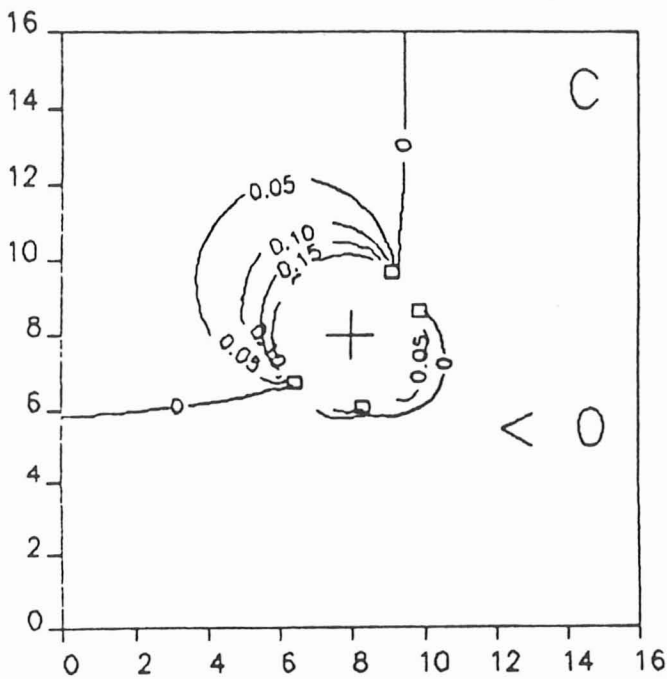
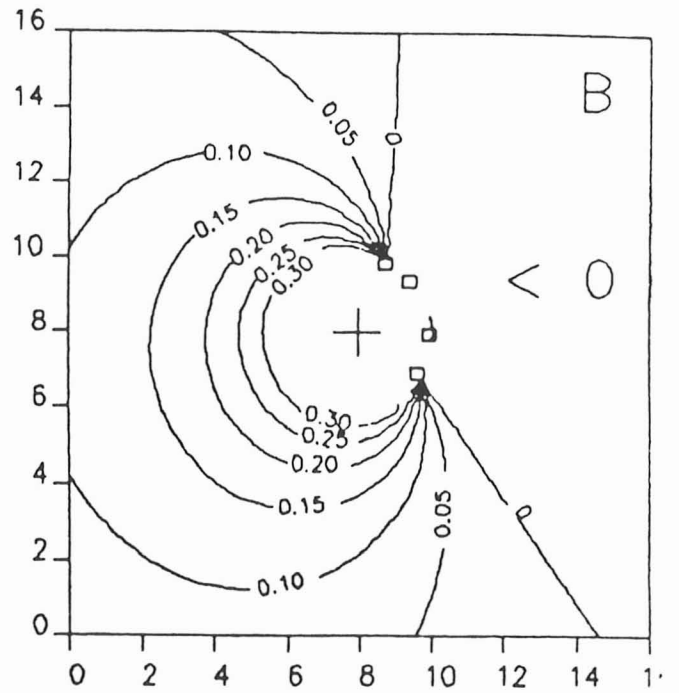
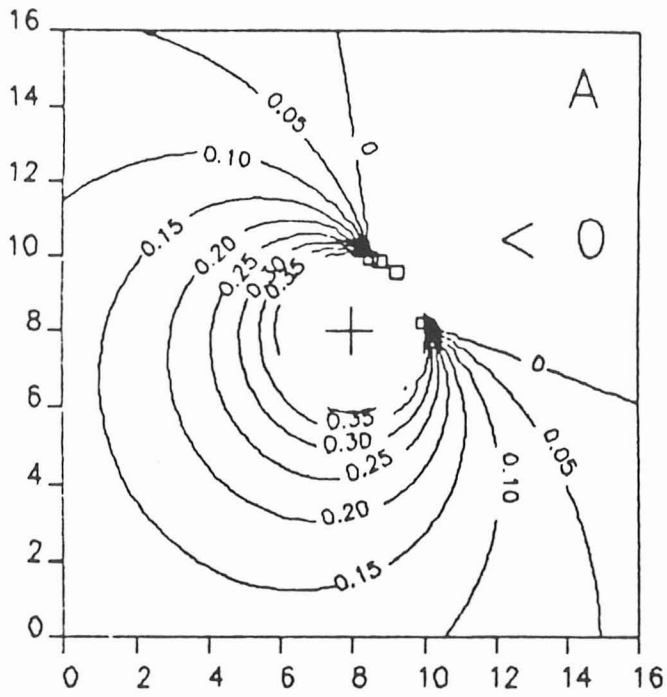


Figura 3: Padrões de variação do peso da amostra adicional para quatro amostras fixas. Amostras fixas no primeiro quadrante (A); em dois quadrantes (B); em três quadrantes (C) e em quatro quadrantes (D).

" PRECISÃO NO CÁLCULO DE MDT'S A PARTIR DA DIGITALIZAÇÃO DE CURVAS DE NÍVEL."

Jorge Kazuo Yamamoto ¹

Roberto Hisayoshi Sameshima ²

¹ Departamento de Geologia Econômica do IGc-USP.

² Pós-Graduando do Departamento de Geologia Econômica do IGc-USP.

Os modelos digitais de terrenos são representações da topografia por meio de malhas regulares em cujos nós são calculadas as cotas, a partir de informações de cotas de pontos digitalizados. A digitalização de curvas de nível pode ser feita de modo contínuo (com amostragem a intervalo de tempo pré-definido) ou de modo discreto, procurando-se digitalizar pontos equidistantes.

Obviamente poderá haver redundância de informações quando a digitalização de um trecho reto da curva de nível for digitalizado dessa forma. Entretanto, há de se ressaltar a importância da digitalização no sentido de não ser criado um número excessivo de pontos, que é um sério limitante à maioria dos algoritmos de interpolação.

Este trabalho apresenta os resultados de testes de precisão de mdt's gerados a partir de um conjunto de pontos de dados representativos da topografia de uma área de 1500 x 1500 metros, localizada entre as coordenadas 24°37'45" a 24°38'35" de latitude sul e 48°43'25" a 48°44'20" de longitude oeste, região da Serra de Paranapiacaba, folha Barra do Rio Pardo (x-12), DAEE 1957.

Para os fins deste trabalho foram digitalizados 2524 pontos, com um espaçamento médio entre os pontos de uma mesma curva de nível em torno de 50 metros (0,5 cm da escala).

A precisão de um mdt está relacionada a sua capacidade de reconstituir a topografia que lhe deu origem. Assim, quanto menor for o erro dessa reconstituição, melhor a precisão do mdt. O mdt sendo representado por uma malha regular de pontos nas duas direções, pode ter sua precisão controlada pelo número de nós em ambas as direções. Dessa forma, com o conjunto de pontos de dados passou-se ao cálculo de mdt's sucessivamente mais refinados com o incremento do número de nós.

Para o cálculo do mdt, foi escolhido neste trabalho, o método de interpolação sobre a rede de triângulos, definida sobre o conjunto de 2524 pontos. A triangulação de Delaunay (Pettinati, 1983) foi utilizada para geração da rede de triângulos. A interpolação dentro do domínio de cada triângulo foi efetuada a partir do ajuste matemático de um plano, representado por um polinômio bivariado de grau 1.

Uma vez calculado o mdt, o teste para aferir a sua precisão foi feita com o próprio conjunto de pontos de dados que o originou. Assim, foram utilizadas as localizações dos pontos de dados originais, com as quais foram calculadas as respectivas cotas interpoladas diretamente do mdt, que por sua vez foram comparadas estatisticamente com as cotas originais.

A interpolação do valor de um ponto, agora a partir do mdt, foi feita por meio do ajuste bilinear (Rogers & Adams, 1976). A interpolação bilinear de um ponto (u,w), dentro de uma célula, definida pelos 4 nós contíguos, pode ser feita como ilustra a Figura 1.

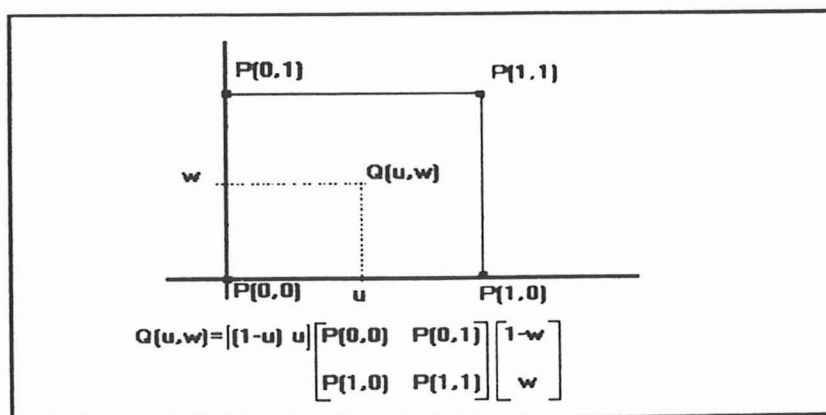


FIGURA 1 - Interpolação bilinear do ponto (u,w) em uma célula do mdt (adaptado de Rogers & Adams, 1976).

Observe-se que a interpolação dentro de uma célula só é possível quando os 4 nós apresentarem informações de cota, caso contrário o ponto não poderá ser interpolado. Isto deverá acontecer na fronteira dos dados, onde um nó do mdt foi determinado justamente porque estava fora da área da fronteira.

Para aferição dos mdt's, as seguintes estatísticas foram utilizadas:

- média e desvio padrão (para os dados interpolados e originais);
- erro RMS (raiz quadrada da somatória das diferenças ao quadrado, dividida pelo número de pares de pontos);
- coeficiente de correlação.

Além dessas, foram calculadas também as retas dos mínimos quadrados, representadas pelos seus coeficientes *a* e *b*.

Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 1.

NÓS		MDT									
		11x11	21x21	31x31	41x41	51x51	61x61	71x71	81x81	91x91	100x100
ABERTURA		150,00	75,00	50,00	37,50	30,00	25,00	21,40	18,80	16,70	15,20
INTERPOLADO	x	784,32	779,08	776,99	775,96	775,36	775,26	774,91	774,77	774,82	775,04
	s	47,39	54,74	57,13	58,54	59,31	59,58	60,12	60,3	60,15	59,77
ORIGINAL	x	785,21	778,99	777,02	775,97	775,4	775,27	774,89	774,8	774,86	775,05
	s	51,25	56,3	57,92	59,15	59,8	60,02	60,49	60,66	60,43	60,04
ERRO RMS		10,37	5,11	3,44	2,73	2,33	2,02	1,8	1,63	1,49	1,37
COEF. CORREL.		0,98109	0,99616	0,99830	0,99898	0,99927	0,99945	0,99957	0,99966	0,99971	0,99975
NÚM. PARES		1628	2061	2231	2313	2347	2355	2360	2375	2377	2385
COEF. RETA	a	-46,89	-19,24	-9,4	-7,33	-5,88	-5,36	-4,45	-4,28	-3,33	-3,31
	b	1,061	1,025	1,012	1,009	1,008	1,007	1,006	1,005	1,004	1,004

TABELA 1 - Valores das estatísticas e coeficientes da reta dos mínimos quadrados, obtidos para medida da precisão do mdt.

Analisando-se os resultados obtidos, verifica-se que, como seria de se esperar, com o aumento do número de nós do mdt há melhoria na precisão do mdt, conforme diminuição do erro RMS e aumento do coeficiente de correlação. Considerando-se que a amostragem das curvas de nível foi feita com um espaçamento médio de 50 metros, o mdt calculado com abertura de 50,0 m (31x31 nós) apresentou um erro RMS de 3,44 m. Entretanto, o mdt calculado com 61x61 nós (abertura igual a 25,0 m.) apresenta um erro RMS de 2,02 m., o que pode ser considerado satisfatório para a reprodução das elevações do terreno. Pode-se observar ainda na Tabela 1 que, a partir de 61x61 nós a diminuição do erro RMS não é significativa, pois para um mdt de 100x100 nós, o erro RMS permaneceu ainda em 1,37 m, que reproduziu com precisão as topografias originais.

Assim, considerando os resultados obtidos, pode-se utilizar, em princípio mdt's com aberturas iguais à metade do espaçamento médio entre os pontos de digitalização das curvas de nível, que reproduziu com precisão as topografias originais.

Referências bibliográficas.

- Pettinati, F. - 1983 - Modelamento digital e representação gráfica de superfícies. São Paulo. 177p. (Dissertação de mestrado apresentada à Escola Politécnica da USP);
- Rogers, D.F. & Adams, J. A. - 1976 - Mathematical elements for computer graphics. New York, McGraw Hill. 239 p.