

## Legenda das Sessões Técnicas (Technical Sessions Acronyms):

- ED – Sistemas a Eventos Discretos
- EE – Educação em Engenharia
- EF – Eficiência Energética
- EP – Eletrônica de Potência
- IB – Instrumentação Eletrônica e Biomédica
- MI – Modelagem e Identificação de Sistemas
- MQ – Máquinas Elétricas
- PS – Processamento de Sinais
- RB - Robótica
- SC – Sistemas de Controle: Teoria e Aplicações
- SA – Sistemas de Automação
- SI – Sistemas Inteligentes
- SP – Sistemas de Potência

## Segunda-feira, Setembro 15, 2008 – SESSÕES ORAIS (ORAL SESSIONS)

SEG LUN MON	Paper Number	<b>EP1-Filtros Ativos de Potência</b> <b>Presidente: Pedro Gomes Barbosa, UFJF, Brasil</b> <b>Sala: Belo Horizonte</b>
10:30AM - 12:30PM	41745	<b>Análise de um filtro ativo em paralelo com cicloconversores e filtro passivo em um sistema de laminação siderúrgica</b> Celio Ferreira, Domingos Savio Lyrio Simonetti, Gilberto Sousa, <i>UFES, Brasil</i>
	38794	<b>Implementación en un DSP del control de un filtro activo de corrientes armónicas</b> Gonzalo Casaravilla, Gabriel Barbat, Andrés Silveyra, Gabriel Valiente, <i>Universidad de la República, Uruguay</i>
	41489	<b>Implementação de um filtro ativo monofásico com função integrada de suprimento de potência ativa para cargas CC e CA</b> Ruben Godoy, <i>UFMS, Brasil</i> Carlos Alberto Canesin, <i>UNESP, Brasil</i> João Pinto, Luigi Galoto Junior, Helder Maia, <i>UFMS, Brasil</i>
	42082	<b>Eliminação Seletiva de Harmônicos para Conversores em Ponte H de Sete Níveis com Fontes de Alimentação Variáveis usando Algoritmo Genético e Redes Neurais Artificiais</b> João Pinto, <i>UFMS, Brasil</i> Burak Ozpineci, <i>Oak Ridge National Laboratory, EUA</i> Faete Filho, Tiago Mateus, <i>UFMS, Brasil</i>
	41589	<b>Universal Power Filter with Photovoltaic Co-Generation for Single-Phase Systems with Shared-Leg</b> Welflen Santos, Montiê Vitorino, Lucas Hartmann, Maurício Corrêa, Cursino Jacobina, Edison da Silva, Alexandre Oliveira, <i>UFMG, Brasil</i>
	41499	<b>Computation of Instantaneous Active Power and Its Application to Active Power Filters</b> Gilvan Andrade Jr., Max Neri, Sreeramulu Naidu, <i>UFMG, Brasil</i>

- Teodiano Bastos, *UFES, Brasil*
- 37259 A vector field approach to guide small UAVs through a sequence of waypoints**  
 Guilherme Pereira, *UFMG, Brasil*  
 Diego Rebelo, *UFMG, Brasil*
- Paulo Iscold, Leonardo A. Borges Torres, *UFMG, Brasil*
- 40890 Reconfiguração Cinemática de um Robô Móvel Explorador**  
 Gustavo Freitas, *UFRJ, Brasil*  
 Fernando Lizarralde, *UFRJ, Brasil*  
 Liu Hsu, *UFRJ, Brasil*  
 Ney Reis, *PETROBRAS/CENPES, Brasil*
- 41803 A first analysis of convergence for an iterative algorithm to minimize loss energy in mobile robots**  
 Alain Segundo, *USP, Brasil*  
 José Cruz, *EPUSP, Brasil*  
 Reinaldo Bernardi, *USP, Brasil*

QUA  
MIE  
WED

**SA7-Aplicações em Controle e Automação III**  
**Presidente: Eduardo Rocha Loures, PUC-PR, Brasil**  
**Sala: Itajubá**

10:30AM -  
12:10PM

- 41847 Implementação de um Módulo Embarcado para automação de Processo Industriais Utilizando Software Elipse Scada e Fpga com Processador Nios II**  
 Edson Batista, *UCDB, Brasil*  
 Fábio Ribeiro, *UFMS, Brasil*  
 José Ricci, *UCDB, Brasil*  
 Alexandre Cesar Rodrigues da Silva, *UNESP - Julio de Mesquita Filho, Brasil*  
 Jenner Oliveira, Mauro Pereira, *UCDB, Brasil*  
 Luciano Gonda, *UCDB-GPEC, Brasil*
- 42100 Proposal of a model for a factory information system for automatic performance evaluation**  
 Eduardo Santos, *PUC-PR, Brasil*  
 Eduardo Rocha Loures, *PUC-PR, Brasil*  
 Fernando Deschamps, *PUC-PR, Brasil*  
 Marco Paula, *PUC-PR, Brasil*
- 41511 Compensação de Atrito em Válvulas de Controle**  
 Carlos Gury, *USP, Brasil*  
 Claudio Garcia, *USP, Brasil*  
 Daniel Uehara, *EPUSP, Brasil*
- 41598 Configuração Automática para um Sistema de Filtragem Online de Alta Complexidade**  
 Rodrigo Torres, *UFRJ, Brasil*  
 José Manoel de Seixas, *UFRJ, Brasil*
- 39827 Automação de um Sistema de Medição para Análise de Perda Fotoquímica em Plantas**  
 Rene Capitano, *UFMS, Brasil*  
 João Onofre Pereira Pinto, *UFMS, Brasil*  
 Mauro Henrique de Paula, *UFMS, Brasil*  
 Valdemir Antônio Laura, *Embrapa Gado de Corte, Brasil*

QUA  
MIE  
WED

**SC12-Sistemas Lineares**  
**Presidente: Mauro Cunha, CEFET-Pelotas, Brasil**  
**Sala: Ouro Preto**

10:30AM -  
12:30PM

- 39061 Estimação de Parâmetros em Sistemas Lineares Variantes no Tempo**  
 Luiz Claudio Souza, *UFMG, Brasil*  
 Reinaldo Palhares, *UFMG, Brasil*
- 42215 Algoritmos Array Rápidos para Filtragem Robusta de Sistemas Singulares**  
 Gildson Jesus, *USP - São Carlos, Brasil*  
 Marco Terra, *USP, Brasil*  
 João Ishihara, *UnB, Brasil*
- 41725 Filtro de Kalman Robusto para Horizonte-Finito**

# ALGORITMOS *ARRAY* RÁPIDOS PARA FILTRAGEM ROBUSTA DE SISTEMAS SINGULARES

GILDSON JESUS\*, MARCO H. TERRA\*, JOÃO Y. ISHIHARA†

\**Departamento de Engenharia Elétrica - Universidade de São Paulo em São Carlos C.P.359, São Carlos, SP, 13566-590, Brasil*

†*Departamento de Engenharia Elétrica - Universidade de Brasília, Brasília/DF, 70.919-970, Brasil*

Emails: (gildson, terra)@sel.eesc.usp.br, ishihara@ene.unb.br

**Abstract**— In this paper it is considered practical issues on the computation of information filters for descriptor systems subject to parameters uncertainties. Fast *array* algorithms are developed to improve the computational advantages of recursive filters found in the literature. The known advantages of this kind of algorithm, that was originally developed for standard nominal state-space systems, remain valid when it is applied to descriptor systems subject to uncertainties. It is numerically more stable in sense that it presents better conditioning and reduced dynamical range. Numerical example, based on fixed-point implementations, is provided in order to demonstrate the advantages of this algorithm.

**Keywords**— Fast *array* algorithm, discrete-time, filtering, descriptor systems.

**Resumo**— Neste artigo são desenvolvidos algoritmos *array* rápidos para implementação de filtros de informação para sistemas singulares sujeitos a incertezas nos parâmetros. As vantagens desse tipo de algoritmo, que foi originalmente desenvolvido para sistemas convencionais no espaço de estado, permanecem válidas quando eles são aplicados em sistemas singulares incertos. Este algoritmo é mais estável numericamente, apresenta melhor condicionamento e reduz a faixa dinâmica dos valores calculados por aritmética de ponto fixo. Um exemplo numérico baseado em implementação de ponto fixo é apresentado para demonstrar as vantagens deste algoritmo.

**Keywords**— Algoritmos *array* rápidos, tempo discreto, filtragem, sistema descriptor.

## 1 Introdução

A abordagem para a filtragem de sistemas desenvolvidas em (Kalman, 1960), sintetizada através dos filtros de Kalman, tem sido aplicada em vários problemas práticos de engenharia. Apesar das intensas aplicações e das indiscutíveis vantagens desse tipo de abordagem, os filtros de Kalman nominais têm apresentado limitações numéricas que têm sido bastante estudadas nos últimos anos. Dentre essas limitações valem ser ressaltadas divergências devido a falta de fidelidade dos algoritmos numéricos ou modelagens não apropriadas dos sistemas a serem estimados (Jazwinski, 1970). Para contornar esses problemas têm sido desenvolvidos novos algoritmos para diferentes implementações do filtro. Neste artigo serão deduzidos algoritmos *array* rápidos para filtragem robusta de filtros de informação de sistemas singulares.

O filtro de Kalman calculado via algoritmo *array* rápido apresenta algumas vantagens sobre o filtro de Kalman calculado através da equação de Riccati. Ele aumenta a eficiência e a estabilidade numéricas devido ao uso de transformações ortogonais nos cálculos e reduz a faixa dinâmica dos valores calculados em implementações por aritmética de ponto fixo, veja (Hassibi et al., 2000) e as referências contidas nela.

Neste artigo serão abordados os problemas de filtragem robusta para sistemas lineares singulares nas formas filtrada e preditora. Serão apresentadas alternativas numéricas para os filtros recursivos desenvolvidos em (Terra et al., 2007).

Sistemas singulares foram mencionados pela primeira vez na literatura em 1973 (Singh and Liu, 1973). Tais sistemas têm sido bastante pesquisados na literatura. Esse interesse é motivado pelo fato de que muitos sistemas podem ser modelados naturalmente como um sistema singular. Aplicações para este tipo de modelo podem ser encontradas, por exemplo, em sistemas econômicos, circuitos elétricos e robótica.

De acordo com o conhecimento dos autores, algoritmos *array* rápidos ainda não foram usados para calcular filtros robustos de sistemas singulares. O objetivo deste trabalho é preencher essa lacuna.

## 2 Filtragem de Sistemas Singulares

Os algoritmos *array* robustos rápidos que serão apresentados neste artigo foram desenvolvidos para estimar o seguinte sistema singular

$$\begin{aligned}(E + \delta E)x_{i+1} &= (F + \delta F)x_i + w_i, \\ y_i &= (H + \delta H)x_i + v_i, \\ i &= 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{1}$$

sendo  $x_i \in \mathbb{R}^n$  a variável descritora,  $y_i \in \mathbb{R}^p$  a medida de saída,  $w_i \in \mathbb{R}^m$  e  $v_i \in \mathbb{R}^p$  ruídos de processo e medida,  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$  matrizes conhecidas do sistema nominal.  $\delta E$ ,  $\delta F$  e  $\delta H$  são perturbações variantes no tempo para as matrizes do sistema nominal

$$P_{i+1|i}^{-1}\hat{x}_{i+1|i} = E^T Q^{-1}(I + F(P_{i|i-1}^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1}F^T Q^{-1})^{-1}F(P_{i|i-1}^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1}P_{i|i-1}^{-1}\hat{x}_{i|i-1} + E^T Q^{-1}(I + F(P_{i|i-1}^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1}F^T Q^{-1})^{-1}F(P_{i|i-1}^{-1} + H^T R^{-1}H)^{-1}H^T R^{-1}y_i \quad (2)$$

definidas como

$$\delta F = M_f \Delta_i N_f; \quad (3)$$

$$\delta E = M_f \Delta_i N_e; \quad (4)$$

$$\delta H = M_h \Delta N_h; \quad (5)$$

$$\|\Delta\| \leq 1 \quad (6)$$

sendo  $M_f$ ,  $M_h$ ,  $N_e$ ,  $N_f$ ,  $N_h$  matrizes conhecidas e  $\Delta$  uma matriz arbitrária limitada. A condição inicial e os ruídos de processo e de medida,  $\{x_0, w_i, v_i\}$ , são assumidos como sendo variáveis aleatórias de média zero não correlacionadas com estatísticas de segunda ordem

$$\mathcal{E}\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ w_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ w_j \\ v_j \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q\delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & R\delta_{ij} \end{bmatrix} > 0$$

sendo  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  caso contrário. Os filtros nominais na forma de informação (desenvolvidos para o sistema (1) quando  $\delta F = 0$ ,  $\delta E = 0$ , e  $\delta H = 0$ ) apresentados a seguir, são baseados em equações algébricas de Riccati e foram desenvolvidos em (Terra et al., 2007). O filtro de informação singular na forma filtrada é definido da seguinte forma

$$P_{i|i}^{-1} = E^T Q^{-1} E + H^T R^{-1} H - E^T Q^{-1} F \times (P_{i-1|i-1}^{-1} + F^T Q^{-1} F)^{-1} F^T Q^{-1} E \quad (7)$$

$$P_{i|i}^{-1} \hat{x}_{i|i} = E^T Q^{-1} F (F^T Q^{-1} F + P_{i-1|i-1}^{-1})^{-1} \times P_{i-1|i-1}^{-1} \hat{x}_{i-1|i-1} + H^T R^{-1} y_i. \quad (8)$$

Note que (8) é uma recursão para a estimativa filtrada de informação  $P_{i|i}^{-1} \hat{x}_{i|i}$  que pode ser obtida sem a necessidade de calcular  $P_{i|i}$ . Visto que (7) e (8) propagam a inversa da covariância do erro, essas equações são particularmente interessantes quando não existe informação a respeito da condição inicial  $x_0$  (zeros em  $P_0^{-1}$  são associados com valores infinitos em  $P_0$ ). Vale salientar que, apesar dessa particularidade a existência dos filtros de informação é garantida para quaisquer condições iniciais. A estimativa preditora recursiva na forma de informação é definida da seguinte forma

$$P_{i+1|i}^{-1} = E^T Q^{-1} E - E^T Q^{-1} F (P_{i|i-1}^{-1} + H^T R^{-1} H + F^T Q^{-1} F)^{-1} F^T Q^{-1} E \quad (9)$$

e Equação (2).  $\diamond$

## 2.1 Estimativas Robustas na Forma de Informação

As estimativas robustas na forma de informação do sistema (1), que serão apresentadas nesta seção foram desenvolvidas em (Terra et al., 2007) e são baseadas nos filtros singulares robustos desenvolvidos em (Ishihara et al., 2004). Para simplificar as expressões dos filtros, é assumido que  $N_e^T N_f = 0$ . Não existe perda de generalidade em adotar esta suposição desde que as matrizes  $M_f$ ,  $N_e$  e  $N_f$  no erro de modelagem (3) e (4) podem ser sempre escritas como

$$M_f = \begin{bmatrix} M_f^{11} & M_f^{12} \\ M_f^{21} & M_f^{22} \\ \dots & \dots \\ M_f^{m1} & M_f^{m2} \end{bmatrix}$$

$$N_e = \begin{bmatrix} N_e^{11} & N_e^{12} & \dots & N_e^{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ N_f^{21} & N_f^{22} & \dots & N_f^{2n} \end{bmatrix}$$

sendo  $M_f^{kj}$ ,  $N_e^{1j}$  e  $N_f^{2j}$  matrizes de dimensões apropriadas.

Para a estimativa filtrada robusta o seguinte problema de otimização é resolvido:

$$\min_{x_0} \max_{\delta H} \left[ \|x_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \|z_0 - (H + \delta H)x_0\|_{R^{-1}}^2 \right] \quad (13)$$

para  $i = 0$  e

$$\min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta E, \delta F, \delta H\}} \left[ \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|(E + \delta E)x_{i+1} - (F + \delta F)x_i\|_{Q^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - (H + \delta H)x_{i+1}\|_{R^{-1}}^2 \right] \quad (14)$$

para  $i > 0$ , sendo as incertezas modeladas de acordo com (3)-(6).

Os filtros singulares robustos na forma filtrada e preditora apresentados a seguir foram deduzidos baseados em problemas fundamentais de otimização resolvidos em (Sayed, 2001) e nas referências contidas nela. Para se encontrar o ótimo robusto para ambos os filtros é necessário ajustar um parâmetro  $\hat{\lambda}$  que minimiza a seguinte função

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda \geq \|H^T W H\|} G(\lambda) \quad (15)$$

sendo

$$G(\lambda) := \|x(\lambda)\|_{Q(\lambda)}^2 + \lambda \|N_a x(\lambda) - N_b\|^2 + \|Ax(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^2.$$

$$Q(\lambda) := Q + \lambda N_a^T N_a;$$

$$W(\lambda) := W + W H (\lambda I - H^T W H)^{\dagger} H^T W.$$

Para calcular a estimativa ótima filtrada robusta, as

$$P_{i+1|i+1}^{-1} = E^T \hat{Q}^{-1} E - E^T \hat{Q}^{-1} F (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda} N_f^T N_f + F^T \hat{Q}^{-1} F)^{-1} F^T \hat{Q}^{-1} E + H^T \hat{R}^{-1} H + \hat{\lambda} [N_h^T N_h + N_e^T N_e] \quad (10)$$

$$P_{i+1|i+1}^{-1} \hat{x}_{i+1|i+1} = E^T \hat{Q}^{-1} (I - F (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda} N_f^T N_f)^{-1} F^T \hat{Q}^{-1})^{-1} F (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda} N_f^T N_f)^{-1} P_{i|i}^{-1} \hat{x}_{i|i} + H^T \hat{R}^{-1} y_{i+1} \quad (11)$$

seguintes identificações devem ser feitas entre a função  $G(\lambda)$  de (15) e o problema de otimização (14)

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \begin{bmatrix} -F & E \\ 0 & H \end{bmatrix}; \quad b \leftarrow \begin{bmatrix} F \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\ \delta A &\leftarrow \begin{bmatrix} -\delta F & \delta E \\ 0 & \delta H \end{bmatrix}; \quad \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} \delta F \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \\ Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad W \leftarrow \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \\ N_a &\leftarrow \begin{bmatrix} -N_f & N_e \\ 0 & N_h \end{bmatrix}; \quad N_b \leftarrow \begin{bmatrix} N_f \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \\ H &\leftarrow \begin{bmatrix} M_f & 0 \\ 0 & M_h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

e para condição inicial, as seguintes identificações são consideradas

$$\begin{aligned} A &\leftarrow H; \quad b \leftarrow z_0; \quad \delta A \leftarrow \delta H; \\ \delta b &\leftarrow 0; \quad Q \leftarrow P_0^{-1}; \quad W \leftarrow R_0^{-1}; \\ H &\leftarrow M_h; \quad N_a \leftarrow N_h; \quad N_b \leftarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Para a estimativa preditora robusta o seguinte problema de otimização é resolvido:

$$\begin{aligned} \min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_i\}} &\left[ \|x_i - \hat{x}_{i|i-1}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \right. \\ &\| (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) x_{i+1} - (F_i + \delta F_i) x_i \|_{Q_i^{-1}}^2 + \\ &\left. \|z_i - (H_i + \delta H_i) x_i\|_{R_i^{-1}}^2 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

para  $i > 0$ , sendo que as condições iniciais são dadas por  $\hat{x}_{0|-1} := \bar{x}_0$ ,  $P_{0|-1} = P_0$ .

Para calcular a estimativa ótima preditora robusta, as seguintes identificações devem ser feitas entre a função  $G(\lambda)$  de (15) e o problema de otimização (18)

$$\begin{aligned} A &\leftarrow \begin{bmatrix} -F & E \\ H & 0 \end{bmatrix}; \quad b \leftarrow \begin{bmatrix} F \hat{x}_{i|i-1} \\ z_i - H \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}; \\ \delta A &\leftarrow \begin{bmatrix} -\delta F & \delta E \\ \delta H & 0 \end{bmatrix}; \quad \delta b \leftarrow \begin{bmatrix} \delta F \\ \delta H \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \\ Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad W \leftarrow \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix}; \\ H &\leftarrow \begin{bmatrix} M_f & 0 \\ 0 & M_h \end{bmatrix}; \quad N_b \leftarrow \begin{bmatrix} N_f \\ N_h \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1}. \\ N_a &\leftarrow \begin{bmatrix} -N_f & N_e \\ N_h & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

O algoritmo array rápido para filtro de informação robusto de sistemas singulares apresentado na próxima seção é baseado no seguinte algoritmo desenvolvido em (Terra et al., 2007).

---

### Filtragem Robusta de Informação

---

**Passo 0:** (Condições Iniciais): Se  $M_{h,0} = 0$  então

$$\begin{aligned} P_{0|0}^{-1} &:= P_0^{-1} + H^T R^{-1} H; \\ P_{0|0}^{-1} \hat{x}_{0|0} &:= H^T R^{-1} y_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Caso contrário determine o parâmetro escalar ótimo  $\hat{\lambda}_{-1}$  minimizando a função  $G(\lambda)$  de (15) sobre o intervalo  $\lambda > \|M_h^T R^{-1} M_h\| e$

$$\begin{aligned} \hat{R}^{-1} &:= R^{-1} + R^{-1} M_h (\hat{\lambda}_{-1} I - M_h^T R^{-1} M_h)^{-1} \\ &\quad \times M_h^T R^{-1}; \\ P_{0|0}^{-1} &:= P_0^{-1} + H^T \hat{R}^{-1} H + \hat{\lambda}_{-1} N_h^T N_h; \\ P_{0|0}^{-1} \hat{x}_{0|0} &:= H^T \hat{R}^{-1} y_0. \end{aligned} \quad (23)$$

**Passo 1:** Se  $M_f = 0$  e  $M_h = 0$  então  $\hat{\lambda} := 0$ . Caso contrário determine o parâmetro escalar ótimo  $\hat{\lambda}$  minimizando a função  $G(\lambda)$  de (15)

$$\hat{\lambda} > \lambda_l := \left\| \begin{bmatrix} M_f^T & 0 \\ 0 & M_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_f & 0 \\ 0 & M_h \end{bmatrix} \right\|$$

e substitua os parâmetros  $\{Q^{-1}, R^{-1}\}$  por parâmetros corrigidos

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{-1} &:= Q^{-1} + Q^{-1} M_f (\hat{\lambda} I - M_f^T Q^{-1} M_f)^{-1} \\ &\quad \times M_f^T Q^{-1}; \\ \hat{R}^{-1} &:= R^{-1} + R^{-1} M_h (\hat{\lambda} I - M_h^T R^{-1} M_h)^{-1} \\ &\quad \times M_h^T R^{-1}; \end{aligned} \quad (24)$$

**Passo 2:** Atualize  $\{P_{i|i}^{-1}, P_{i|i}^{-1} \hat{x}_{i|i}\}$  para  $\{P_{i+1|i+1}^{-1}, P_{i+1|i+1}^{-1} \hat{x}_{i+1|i+1}\}$  com (10) e (11).

---

**Observação 2.1** Uma condição suficiente para a existência desse filtro de informação robusto é que  $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$  tenha posto coluna completo.

**Observação 2.2** O ajuste ótimo desse filtro não é possível ser feito online. Para este tipo de aplicação filtros subótimos podem ser ajustados com  $\lambda = (1 + \alpha) \lambda_l$  sendo que para qualquer  $\alpha > 0$  há garantia de estabilidade desse filtro.

O algoritmo array rápido para filtragem preditiva de informação robusta de sistemas singulares a ser apresentado na próxima seção é baseado no seguinte filtro robusto preditivo, veja (Terra et al., 2007) para mais detalhes.

$$P_{i+1|i}^{-1} = \mathcal{E}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{E} - \mathcal{E}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{F} (P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} \mathcal{H} + \mathcal{F}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{F})^{-1} \mathcal{F}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{E} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} P_{i+1|i}^{-1} \hat{x}_{i+1|i} &= \mathcal{E}^T \mathcal{Q}^{-1} (I + \mathcal{F} (P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} \mathcal{H})^{-1} \mathcal{F}^T \mathcal{Q}^{-1})^{-1} \mathcal{F} (P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} \mathcal{H})^{-1} P_{i|i-1}^{-1} \hat{x}_{i|i-1} \\ &+ \mathcal{E}^T \mathcal{Q}^{-1} (I + \mathcal{F} (P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} \mathcal{H})^{-1} \mathcal{F}^T \mathcal{Q}^{-1})^{-1} \mathcal{F} (P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} y_i \end{aligned} \quad (21)$$

### Predição Robusta de Informação

**Passo 0:** (Condições Iniciais):

$$P_{0|-1}^{-1} := P_0^{-1}, \quad P_{0|-1}^{-1} \hat{x}_{0|-1} := P_0^{-1} \bar{x}_0. \quad (25)$$

**Passo 1:** Se  $M_f = 0$  e  $M_h = 0$ , então  $\hat{\lambda} = 0$ . Caso contrário determine o parâmetro escalar ótimo  $\hat{\lambda}$  minimizando a correspondente função  $G(\lambda)$  de (15)

$$\hat{\lambda} > \lambda_t := \left\| \begin{bmatrix} M_f^T & 0 \\ 0 & M_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_f & 0 \\ 0 & M_h \end{bmatrix} \right\|$$

**Passo 2:** Se  $\hat{\lambda} \neq 0$ , substituindo os parâmetros  $\{Q^{-1}, R^{-1}, F\}$  por parâmetros corrigidos

$$\mathcal{Q}^{-1} := \begin{bmatrix} \hat{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}^{-1} := \begin{bmatrix} \hat{R}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\hat{R}^{-1} := R^{-1} + R^{-1} M_h (\hat{\lambda} I - M_h^T R^{-1} M_h)^{-1} M_h^T R^{-1};$$

$$\mathcal{E} := \begin{bmatrix} E \\ \sqrt{\hat{\lambda}} N_e \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} := \begin{bmatrix} F \\ \sqrt{\hat{\lambda}} N_f \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} := \begin{bmatrix} H \\ \sqrt{\hat{\lambda}} N_h \end{bmatrix}$$

sendo  $\hat{Q}^{-1}$  dado por (24).

**Passo 3:** Atualize  $\{P_{i|i-1}^{-1}, P_{i|i-1}^{-1} \hat{x}_{i|i-1}\}$  para  $\{P_{i+1|i}^{-1}, P_{i+1|i}^{-1} \hat{x}_{i+1|i}\}$  com as equações (20) e (21).

**Observação 2.3** Uma condição suficiente para a existência deste filtro preditor robusto é que  $E$  tenha posto coluna pleno.

### 3 Algoritmos Array Rápidos para Filtragem Robusta de Sistemas Singulares

Os algoritmos *array* rápidos apresentados a seguir, trazem algumas vantagens sobre os procedimentos para estimativa de sistemas singulares baseados em equações recursivas de Riccati. Reduzem a faixa dinâmica dos valores calculados baseados em aritmética de ponto fixo e o esforço computacional. Apresentam cálculos mais seguros da matriz de covariância do erro de estimativa, que pode apresentar erros de arredondamento que tornam a matriz não-Hermitiana. Aumentam a estabilidade numérica devido ao uso de transformações ortogonais nos cálculos.

A seguir serão apresentados resultados auxiliares que serão utilizados para na dedução dos algoritmos *array* rápidos.

**Definição 3.1** (Hassibi et al., 1999) Para qualquer matriz de assinatura  $J$  (matriz diagonal com +1 ou -1 na diagonal e zeros no resto), a matriz  $\Theta$  será  $J$ -unitária se  $\Theta J \Theta^T = J$ .

**Lema 3.1** (Hassibi et al., 2000) Seja  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times m$  (com  $n \leq m$ ), e seja  $J = (I_p \oplus -I_q)$  uma matriz assinatura com  $p + q = m$ . Se  $A J A^T = B J B^T$  tem posto completo, então existe uma matriz  $J$ -unitária  $\Theta$  tal que  $A = B \Theta$ .

O algoritmo *array* rápido para a estimativa robusta filtrada de sistemas singulares na forma de informação é apresentado a seguir.

#### Algoritmo Array Rápido I

**Passo 1:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|0}^{-1} &= \Pi_0 \\ P_{1|1}^{-1} &= E^T \hat{Q}^{-1} E - E^T \hat{Q}^{-1} F (\Pi_0 + \hat{\lambda} N_f^T N_f \\ &+ F^T \hat{Q}^{-1} F)^{-1} F^T \hat{Q}^{-1} E + H^T \hat{R}^{-1} H \\ &+ \hat{\lambda} [N_h^T N_h + N_e^T N_e]. \end{aligned} \quad (27)$$

**Passo 2:** Calcular  $M_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_i$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & M_i \\ K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \Theta_i = \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & M_{i+1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

sendo

$$\begin{aligned} M_i S_i M_i^T &= P_{i+1|i+1}^{-1} - P_{i|i}^{-1} \\ R_{e,i} &= P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda} N_f^T N_f + F^T \hat{Q}^{-1} F \\ K_{f,i} &= E^T \hat{Q}^{-1} F R_{e,i}^{-T/2} \end{aligned} \quad (29)$$

sendo  $\hat{Q}^{-1}$  dada em (24) e  $S_i$  uma matriz assinatura.

A dedução desse algoritmo é feita da seguinte maneira. Considere a Equação de Riccati (10) e

$$\delta P_{i+1} = P_{i+2|i+2}^{-1} - P_{i+1|i+1}^{-1} = M_{i+1} S_{i+1} M_{i+1}^T. \quad (30)$$

Para sistemas invariantes no tempo,  $\delta P_{i+1}$  é uma matriz Hermitiana. Pode-se considerar  $S_{i+1} = S_i = I$ , desde que  $\Pi_0 = 0$  em (27). A subtração definida em (30) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} P_{i+2|i+2}^{-1} - P_{i+1|i+1}^{-1} &= -P_{i+1|i+1}^{-1} + E^T \hat{Q}^{-1} E \\ -K_{f,i+1} K_{f,i+1}^T &+ H^T \hat{R}^{-1} H + \hat{\lambda} [N_h^T N_h + N_e^T N_e] \\ K_{f,i+1} &= E^T \hat{Q}^{-1} F R_{e,i+1}^{-T/2} \\ R_{e,i+1} &= P_{i+1|i+1}^{-1} + \hat{\lambda} N_f^T N_f + F^T \hat{Q}^{-1} F \end{aligned} \quad (31)$$



e o respectivo complemento de Schur de (31) é dado por

$$\begin{bmatrix} R_{e,i+1} & F^T \hat{Q}^{-1} E \\ E^T \hat{Q}^{-1} F & W \end{bmatrix} \quad (32)$$

sendo

$$\begin{aligned} W &= -P_{i+1|i+1}^{-1} + E^T \hat{Q}^{-1} E + H^T \hat{R}^{-1} H \\ &+ \hat{\lambda} [N_h^T N_h + N_e^T N_e]. \end{aligned} \quad (33)$$

A matriz  $A_i$  definida como

$$A_i = \begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & M_i \\ K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

é denominada de *pré-array* e é definida a partir da seguinte fatoração de (32)

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & M_i \\ K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,i}^{T/2} & K_{f,i}^T \\ M_i^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Seja  $\Theta_i$  uma matriz  $(I \oplus S_i)$ -unitária que triangulariza  $A_i$ . Então

$$A_i \Theta_i = \begin{bmatrix} X_{i+1} & 0 \\ Y_{i+1} & Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

para algum  $\Theta_i$  tal que

$$\Theta_i \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \Theta_i^T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Uma questão que surge nesta etapa é sobre a existência de  $\Theta_i$ . Sabe-se que

$$R_{e,i+1} = P_{i+1|i+1}^{-1} + \hat{\lambda} N_f^T N_f + F^T \hat{Q}^{-1} F = R_{e,i} + M_i S_i M_i^T$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & M_i \\ K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,i}^{T/2} \\ M_i^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{T/2} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (38)$$

Pelo Lema 3.1, conclui-se que sempre existe uma rotação  $(I \oplus S_i)$ -unitária  $\Theta_i$  relativa ao seguinte array

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & M_i \\ K_{f,i} & 0 \end{bmatrix} \Theta_i = \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{f,i+1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

O cálculo completo do *pós-array* pode ser feito elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade (36) e identificando as respectivas posições de ambas as matrizes resultantes

$$\begin{aligned} X_{i+1} X_{i+1}^T &= P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda} N_f^T N_f + F^T \hat{Q}^{-1} F \\ &\quad + P_{i+1|i+1}^{-1} - P_{i|i}^{-1}; \\ X_{i+1} &= R_{e,i+1}^{1/2}; \\ Y_{i+1} X_{i+1}^T &= E^T \hat{Q}^{-1} F; \\ Y_{i+1} &= E^T \hat{Q}^{-1} F R_{e,i+1}^{-T/2}; \\ Y_{i+1} &= K_{f,i+1}; \end{aligned}$$

$$Y_{i+1} Y_{i+1}^T + Z_{i+1} S_i Z_{i+1}^T = E^T \hat{Q}^{-1} F R_{e,i}^{-1} F^T \hat{Q}^{-1} E;$$

$$\begin{aligned} Z_{i+1} S_i Z_{i+1}^T &= E^T \hat{Q}^{-1} F R_{e,i}^{-1} F^T \hat{Q}^{-1} E \\ &\quad - E^T \hat{Q}^{-1} F R_{e,i+1}^{-1} F^T \hat{Q}^{-1} E; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{i+1} S_i Z_{i+1}^T &= P_{i+2|i+2}^{-1} - P_{i+1|i+1}^{-1}; \\ Z_{i+1} &= M_{i+1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Que resulta na recursão dita de Chandrasekhar (28).  $\diamond$

O algoritmo *array* rápido para a predição robusta de sistemas singulares na forma de informação é definido a seguir.

---

### Algoritmo Array Rápido II

---

**Passo 1:** Calcular as condições iniciais

$$\begin{aligned} P_{0|-1}^{-1} &= \Pi_0 \\ P_{1|0}^{-1} &= \mathcal{E}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{E} - \mathcal{E}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{F} (\Pi_0 + \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} \mathcal{H} \\ &\quad + \mathcal{F}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{F})^{-1} \mathcal{F}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (41)$$

**Passo 2:** Calcular  $L_{i+1}$  utilizando uma matriz unitária  $\Theta_i$  de dimensões apropriadas

$$\begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & L_i \\ K_{p,i} & 0 \end{bmatrix} \Theta_i = \begin{bmatrix} R_{e,i+1}^{1/2} & 0 \\ K_{p,i+1} & L_{i+1} \end{bmatrix} \quad (42)$$

sendo

$$\begin{aligned} L_i S_i L_i^T &= P_{i+1|i}^{-1} - P_{i|i-1}^{-1} \\ R_{e,i} &= P_{i|i-1}^{-1} + \mathcal{H}^T \mathcal{R}^{-1} \mathcal{H} + \mathcal{F}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{F} \\ K_{p,i} &= \mathcal{E}^T \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{F} R_{e,i}^{-T/2} \end{aligned} \quad (43)$$

e  $S_i$  uma matriz assinatura.

A dedução deste algoritmo é análoga à dedução do algoritmo *array* rápido para estimativa filtrada robusta na forma de informação.  $\diamond$

**Observação 3.1** *Se as incertezas forem anuladas ( $M_f = M_h = N_e = N_f = N_h = 0$ ) os algoritmos array rápidos apresentados nesta seção recaem nos algoritmos array rápidos para as estimativas nominais filtrada e preditora na forma de informação. Que são alternativas para os cálculos das equações de Riccati (7) e (9).*

**Observação 3.2** *Pode-se notar que as dimensões dos pré-arrays dos algoritmos para filtragem e predição robustos deduzidos em (Terra et al., 2007) são  $(4n + m + p) \times (2n)$  e  $(3n + m + p) \times (2n)$  respectivamente. Os pré-arrays dos algoritmos rápidos deduzidos nesse artigo têm dimensões semelhantes  $(2n) \times (2n)$ , tanto para o caso filtrado como para o caso preditivo. Para ambos os algoritmos array rápidos há portanto um número menor de operações por iteração.*

## 4 Exemplos Numéricos

Nesta seção serão aplicados os algoritmos apresentados nas seções anteriores para filtragem robusta, tanto através do cálculo baseado na equação de Riccati quanto no algoritmo *array* rápido I desenvolvido, do Sistema (1) considerando os seguintes valores numéricos

$$E = \begin{bmatrix} 1.14 & 0 & 0 \\ 0 & 1.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.97 & 0 & 0 \\ 0.27 & -0.78 & 0 \\ 0.12 & 0.12 & 0.68 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0.32 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 \end{bmatrix}, N_e = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, N_h = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix}, M_h = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix},$$

e  $\hat{\lambda} = 40$ . Foram calculados os valores singulares de  $P_{ii}^{-1}$  para três diferentes implementações: ponto flutuante, ponto fixo para equação de Riccati explícita e para o algoritmo *array* rápido. O cálculo feito com ponto flutuante foi utilizado como referência. Os desempenhos tanto da equação de Riccati quanto do algoritmo *array* são idênticos com ponto flutuante. Para o cálculo com ponto fixo, foi usada uma arquitetura em 16-bits que pode representar números no intervalo de  $-65.543$  a  $65.543$ . Essas implementações foram feitas via MatLab através do *fix-point Simulink toolbox*. Pode-se notar na Figura (1), a vantagem do algoritmo *array* rápido em comparação com a implementação por equação de Riccati explícita. Na implementação em ponto fixo da equação de Riccati ocorreram erros numéricos. Com o algoritmo *array* rápido, o resultado do cálculo em ponto fixo foi equivalente ao resultado obtido no cálculo em ponto flutuante.

## 5 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre implementações computacionais alternativas para o problema de estimativa robusta de sistemas singulares utilizando algoritmos *array* rápidos. Estimativas feitas através dessa abordagem se diferenciam dos algoritmos *array* convencionais pois consideram as matrizes de parâmetros do sistema invariantes no tempo. O aumento da velocidade computacional advém desse fato. Também são boas alternativas se comparados com as equações recursivas de Riccati. Esses algoritmos minimizam problemas causados por erros de arredondamento que podem tornar a matriz de covariância não-Hermitiana. O exemplo numérico apresentado mostra a robustez numérica desta alternativa de implementação.

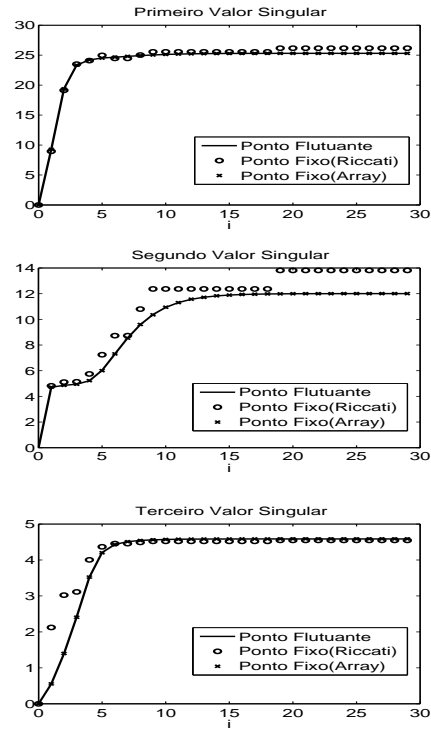


Figura 1: Valores singulares de  $P_{ii}^{-1}$ .

## Referências

- Hassibi, B., Kailath, T. and Sayed, A. H. (1999). *Indefinite-Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to  $H_2$  and  $H_\infty$  Theories*, SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Hassibi, B., Kailath, T. and Sayed, A. H. (2000). Array algorithms for H-infinity estimation, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(4): 702–706.
- Ishihara, J. Y., Terra, M. H. and Campos, J. C. T. (2004). Robust kalman filter for descriptor systems, *Proceedings of American Control Conference, Boston, MA, June/July 2004*.
- Jazwinski, A. (1970). *Stochastic processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York, NY.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* **82D**: 35–45.
- Sayed, A. H. (2001). A framework for state-space estimation with uncertain models, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-46**(7): 998–1013.
- Singh, S. P. and Liu, R. W. (1973). Existence of state equation representation if linear large-scale dynamic systems, *IEEE Transactions on Circuit Theory* **20**(3): 239–246.
- Terra, M. H., Ishihara, J. Y. and Padoan, A. C. J. (2007). Information filtering and array algorithms for descriptor systems subject to parameter uncertainties, *IEEE Transactions on Signal Processing* **5**(1): 1–9.