

O uso de estatística de multipontos como pós processamento da krigagem ordinária

The use of multiple-point statistics as post-processing for ordinary kriging

Raphael Martin Salaroli¹ , Marcelo Monteiro da Rocha¹ 

¹ Universidade de São Paulo, Instituto de Geociências, Departamento Geologia Sedimentar e Ambiental, Programa de Pós-graduação em Recursos Minerais e Hidrogeologia. Rua do Lago, 562, Cidade Universitária, Butantã, CEP: 15515-181, São Paulo, SP, BR. (raphael.salaroli@gmail.com; mmrocha@usp.br)

Recebido em 26 de janeiro de 2023; aceito em 11 de julho de 2024.

RESUMO

A suavização da krigagem representa um grande problema para os cálculos de recursos e reservas minerais, uma vez que valores altos são subestimados e valores baixos superestimados. A suavização atenua detalhes locais de variação espacial do analito, dificultando a detecção de padrões de valores altos. Este artigo propõe a utilização da estatística de multiponto como pós-processamento dos resultados da krigagem ordinária, com objetivo de atenuar esta suavização. A proposta utiliza o modelo de blocos estimado por krigagem como imagem de treinamento. Para os testes, um depósito de cobre sintético foi utilizado com o intuito de aferir os resultados obtidos em relação aos valores reais. Foram realizadas análises visuais, estatísticas e bloco a bloco entre as estimativas geoestatística e simulações por multiponto com o depósito sintético, a fim de entender se o uso da Estatística de Multipontos (MPS) como pós processamento é válido. Os resultados da MPS se apresentaram resultados sutilmente mais semelhantes ao depósito sintético, principalmente em faixas de teores mais baixas. Dessa forma, considerou-se que o uso da MPS como pós processamento da krigagem ordinária gera resultados positivos, ainda que não muito expressivos, sendo possível a aplicação da metodologia numa rotina de análise de recursos e reservas.

Palavras-chave: Geoestatística; *FILTERSIM*; Depósito sintético de Cobre; Efeito suavização; Simulação de múltiplos pontos.

ABSTRACT

Kriging smoothing represents a major drawback for mineral resources and reserves calculations, since high values are underestimated and low values are overestimated. Smoothing out local details of spatial variation in the analyte, makes patterns of high values more difficult to detect. This article proposes the use of multiple-point statistics as post-processing of ordinary kriging results, in order to mitigate this smoothing. The proposal uses the block model estimated by kriging as the training image. For the tests, a synthetic copper deposit was used in order to check the results obtained in relation to the real values. Visual, statistical and block-by-block analyzes were performed between geostatistical estimates and multiple-point simulations with the synthetic deposit, in order to understand whether the use of Multiple-point Statistic (MPS) as post-processing is valid. The MPS results were subtly more similar to the synthetic deposit, mainly in lower grade ranges. Thus, it was considered that the use of MPS as post-processing of ordinary kriging generates positive results, although not very expressive, making it possible to apply the methodology in the analysis of resources and reserves routine.

Keywords: Geostatistics; *FILTERSIM*; Copper synthetic deposit; Smoothing effect; Multipoint simulation.

INTRODUÇÃO

A krigagem é uma importante ferramenta utilizada extensivamente na indústria da mineração para estimar teores, ou qualquer característica de interesse, em locais não amostrados/analizados. Este conjunto de técnicas utiliza a função semivariograma (estatística de dois pontos) para fazer suas inferências. Apesar de ser eficaz no cumprimento do seu objetivo, este método geoestatístico possui limitações no tocante a reprodução de feições geológicas complexas e, na mineração, principalmente devido ao efeito de suavização que apresenta.

Existem alguns métodos de correção da suavização da krigagem, através do erro de suavização obtido pelo processo da validação cruzada (Yamamoto, 2005) e por equações de transformação da estatística convencional (Rezaee et al., 2011). Este artigo tentou apresentar uma alternativa, através do uso da Estatística Multiponto.

Guardiano e Srivastava (1993) introduziram o primeiro método de Estatística Multiponto (MPS). Na estatística de múltiplos pontos, ao invés da utilização da função semivariograma são utilizadas as imagens de treinamento (TI) para caracterização e reprodução de padrões existentes nas áreas de estudo.

A TI é a informação mais importante na MPS. É da TI que os padrões de distribuição espacial que serão reproduzidos na simulação são extraídos. Existem diversas maneiras de gerar as imagens de treinamento a serem empregadas na MPS, como, por exemplo, a modelagem em programas específicos ou simulações de processos físicos (Tahmasebi, 2018). Neste artigo é utilizado o resultado da krigagem ordinária como imagem de treinamento, uma vez que o modelo de blocos com a dispersão espacial de teores obtido com esta técnica é representativo da área de estudo. Foi avaliado se há ganho no conhecimento referente à dispersão de teores dos analitos avaliados para a área de estudo.

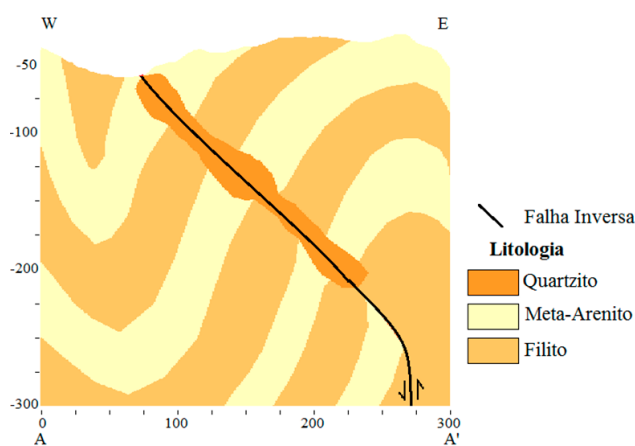
Neste artigo foi empregado o algoritmo de simulação multiponto *FILTERSIM* introduzido por Zhang (2006). Esta técnica utiliza filtros que são aplicados sobre a imagem de treinamento, reduzindo a dimensão dos padrões e agrupando padrões semelhantes e, desta forma, reduzindo o tempo de processamento – comumente elevado em técnicas correlatas como o ENESIM (Guardiano e Srivastava, 1993) e o SNESIM (Strebel, 2002).

Segundo Takafuji (2015), um depósito real não é a melhor forma de fazer estudos de confiabilidade de métodos, pois as posições acuradas dos contatos geológicos e os teores reais não são conhecidos. Neste contexto, uma vez que o objetivo deste artigo é verificar se há ganho com a aplicação do algoritmo *FILTERSIM* (Zhang, 2006) como um pós-processamento da krigagem, foi utilizado um banco de dados sintético. Desta forma é possível comparar os valores estimados pela krigagem ordinária e pós-processados pela MPS com o valor real do teor no depósito.

MATERIAIS E MÉTODOS

Base de dados

A base de dados utilizada neste artigo é uma base de dados sintética elaborada e utilizada por Takafuji (2015) e Takafuji et al. (2017) (Figura 1). Consiste em uma base de dados com teores de cobre dispersos em intercalações de filitos e meta-arenitos dobrados e falhados. Para mais informações sobre a criação da base de dados sintética, ver Takafuji (2015).



Fonte: Takafuji (2015)
Figura 1. Perfil do depósito sintético.

Esta base de dados foi amostrada com simulacros de furos de sondagem realizados em distâncias regulares de 20 metros entre eles. Os testemunhos foram regularizados em intervalos de 4 metros.

Geoestatística

Os dados utilizados nas geociências são representativos de uma certa localização no espaço, podendo ser tratados como funções regionalizadas representadas por variáveis regionalizadas $[Z(x)]$, como definidas em Matheron (1963).

Ao utilizar a geoestatística assume-se a hipótese intrínseca, que diz que a variância espacial entre dois pontos quaisquer separados por uma distância h será a mesma em todo o domínio. Mais detalhes sobre esta hipótese podem ser obtidos em Matheron (1971), Olea (1974), Journel e Huijbregts (1978), entre outros.

Os métodos geoestatísticos se baseiam na função semivariograma (Equação 1) para conhecer o comportamento espacial da variável regionalizada no espaço, que consiste na aplicação da variância espacial $[\gamma(h)]$ com diferentes distâncias h (passo) e plotar um gráfico de variância espacial versus o passo, denominado semivariograma (Matheron, 1971; Journel e Huijbregts, 1978; Yamamoto e Landim, 2013).

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2 \quad 1$$

Onde:

$\gamma(h)$	Semivariância espacial
h	Distância entre dois pontos amostrais (pares de pontos)
$Z(x_i)$	Variável regionalizada no ponto x_i
$Z(x_i + h)$	Variável regionalizada no ponto $x_i + h$
n	Número de pares de pontos separados por h

A partir da função semivariograma são realizadas as estimativas por geoestatística. No caso da Krigagem Ordinária, utilizada aqui, estimam-se pontos ou blocos no domínio $[Z^*(X_0)]$ utilizando um conjunto de amostras $Z(X_i)$ escolhidos em uma vizinhança que receberão pesos (λ_i) cujo somatório deve ser igual a 1, para que o valor estimado não seja enviesado (Journel e Huijbregts, 1978). Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em Goovaerts (1997), Yamamoto e Landim (2013) e Rossi e Deutsch (2014) entre outros.

Estatística multiponto (MPS)

Os métodos de estatística multiponto surgiram em 1993, com a proposta do algoritmo ENESIM, em Guardiano e Srivastava (1993), com o intuito de melhorar a reprodução de feições geológicas complexas como falhas e dobras, por exemplo.

A MPS utiliza múltiplos pontos para fazer suas inferências, através da relação de padrões existentes em uma imagem de treinamento (TI), representativa da região estudada, com os dados amostrais existentes.

A TI é uma base de dados de padrões geológicos, como modelos 3D, mapas geológicos, entre outros. (Caers e Zhang, 2004; Tahmasebi, 2018). Os padrões da TI são mapeados pelo algoritmo empregado e correlacionados a dados condicionantes, como dados de litologia ou teores, por exemplo. A TI deve ser grande o suficiente para garantir que todas as heterogeneidades contidas no domínio estejam representadas (Caers e Zhang, 2004).

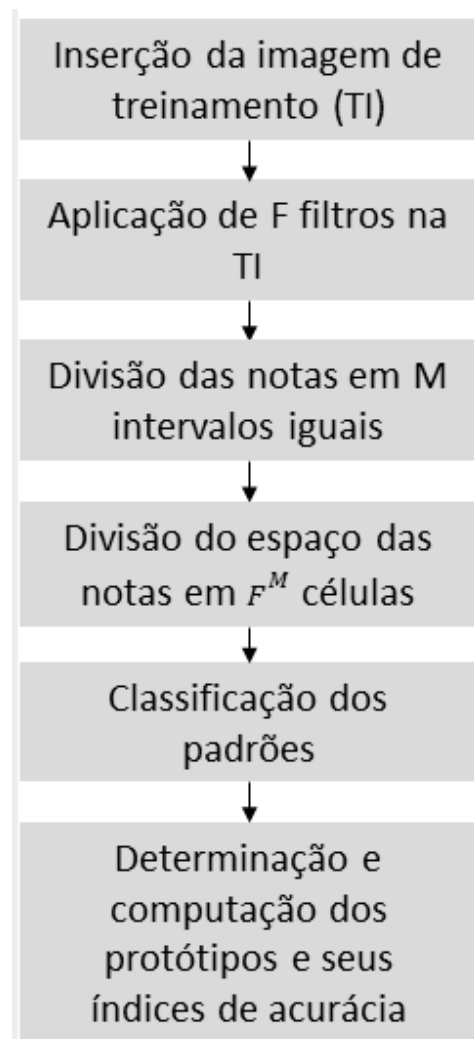
As técnicas de MPS, assim como a geoestatística, assumem a função regionalizada como estacionária e ergódica. Dessa forma, entende-se que as estatísticas dos dados sejam invariantes à translação, permitindo sua inserção numa base de dados (Rossi e Deutsch, 2014), ou seja, são estacionárias, e que as estatísticas das realizações da estatística de multipontos convirjam para as estatísticas de $Z(x)$ (Mariethoz e Caers, 2015), sendo ergódicas.

Filtersim

O *FILTERSIM* foi proposto por Zhang (2006), com o objetivo de utilizar a MPS em variáveis contínuas e diminuir o tempo de processamento das simulações de múltiplos pontos, uma vez que os algoritmos da época demandavam muito tempo de processamento (Zhang, 2006).

O problema do tempo de processamento foi solucionado reduzindo a dimensão dos padrões da TI a partir da aplicação de filtros. Zhang (2006) definiu como filtro uma janela (template) t com n pixels, dando um peso a cada pixel, com n pesos diferentes. Esse *template* percorre toda TI e gera notas de filtragens para cada padrão encontrado. A aplicação dos filtros reduz a dimensionalidade dos padrões, transformando os diversos pixels de um padrão em notas de filtragem levando à redução do tempo de processamento. Os padrões filtrados são agrupados levando em consideração a sua semelhança e posteriormente é determinado o protótipo de cada classe de padrões como a média dos padrões encontrados na classe e o índice de acurácia, que mede a semelhança entre os padrões da classe. (Zhang, 2006). Ilustra-se na Figura 2 as etapas para classificação de padrões da TI.

Para realizar as simulações, é preciso estabelecer o *seed*, que é um número que determinará o ponto inicial do caminharmento do *template* (t) do algoritmo. O diagrama apresentado na Figura 3 indica as etapas da simulação do *FILTERSIM*.



Fonte: Zhang (2006)

Figura 2. Sequência de etapas para a classificação de padrões de imagens de treinamento.

Pode-se observar neste diagrama que há a distinção entre os tipos de dados. D1 é um dado da base de dados, D2 é um dado simulado e D3 é um dado simulado aleatoriamente. Esta distinção ocorre, pois, pesos diferentes são atribuídos a cada tipo de dado, e o usuário é o responsável por essa definição.

Os dados simulados possuem a mesma dimensão do *template*, sendo que os dados internos simulados, chamados de *inner patch*, são tratados como D2 e as bordas como D3, portanto, serão simuladas posteriormente.

Mais detalhes sobre o *FILTERSIM* podem ser encontrados em Mariethoz e Caers (2015), Remy et al. (2009) e em Zhang (2006).

RESULTADOS

Krigagem ordinária

Análise geoestatística

O variograma experimental foi calculado segundo a direção de maior continuidade. Desta forma, as direções de cálculo foram $0^\circ/45^\circ$, $180^\circ/0^\circ$ e $0^\circ/135^\circ$. Para os pares ortogonais que estão no plano da direção de maior continuidade (u e v), a tolerância angular foi de 45° , o passo foi de 20 m, a tolerância do passo foi de 10 m e o número de passos foi 15. Já para a direção W, estes valores são, respectivamente, 10° , 4 m, 2 m e 48 passos. O variograma experimental foi modelado (Figura 4) e na Tabela 1 apresentam-se os parâmetros do modelo teórico do variograma. Na Tabela 2 são apresentados os parâmetros de

vizinhança definidos a partir dos resultados da validação cruzada (Figura 5).

Estimativa de teores

Para realizar a krigagem ordinária, foi criado um modelo de blocos que engloba todas as amostras, com os parâmetros apresentados na Tabela 3. Foi necessário utilizar uma fronteira convexa aos dados para evitar a estimativa em locais externos à mineralização.

A malha amostral é de 20×20 , no entanto optou-se por utilizar blocos com tamanhos inferiores a estes para a comparação da estimativa com o depósito sintético ser mais detalhada. Foi realizado a discretização dos blocos em

Tabela 1. Parâmetros de ajuste do modelo teórico do variograma.

Parâmetros	Estrutura 1	Estrutura 2	Estrutura 3	Estrutura 4
Amplitude u	65	210	220	220
Amplitude v	60	210	∞	∞
Amplitude w	50	60	150	∞
Contribuição ao patamar	0,055	0,11	0,011	0,023
Efeito pepita		0,01		
Rotação		$0^\circ/45^\circ$		
Modelo		Esférico		

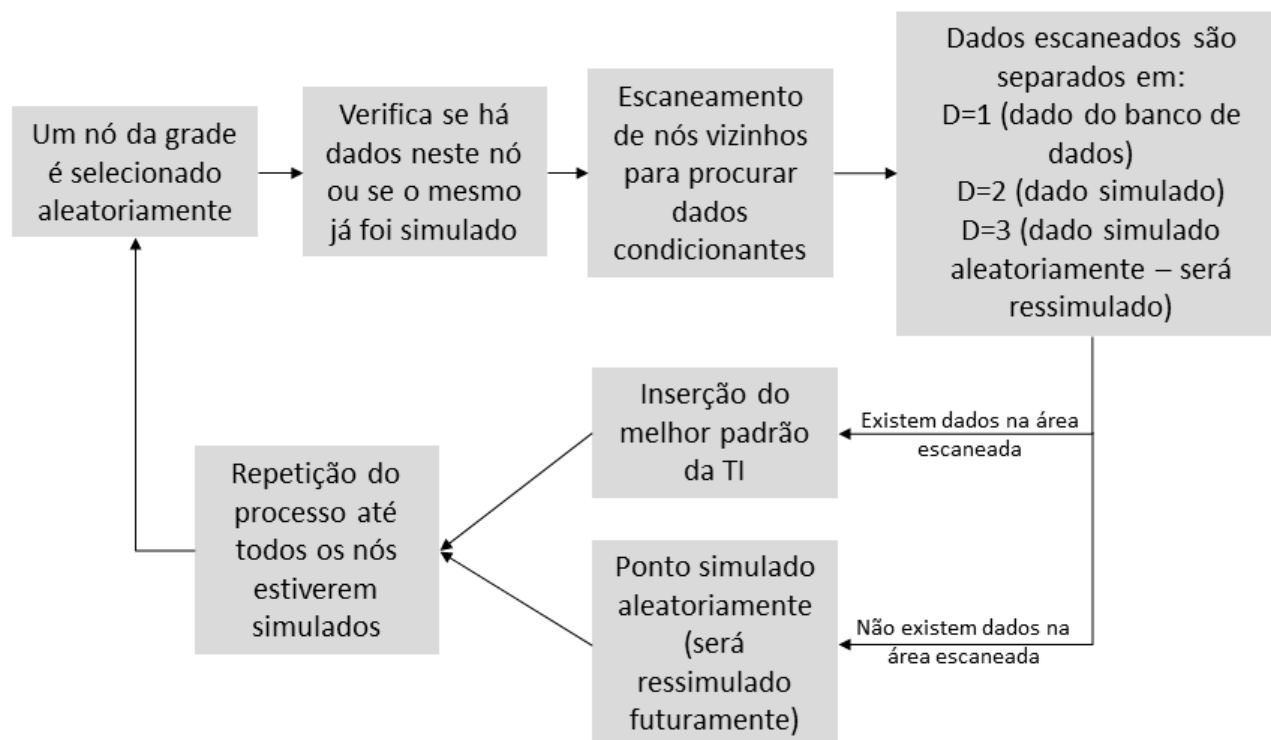


Figura 3. Diagrama resumindo o processo de simulação do algoritmo *FILTERSIM*.

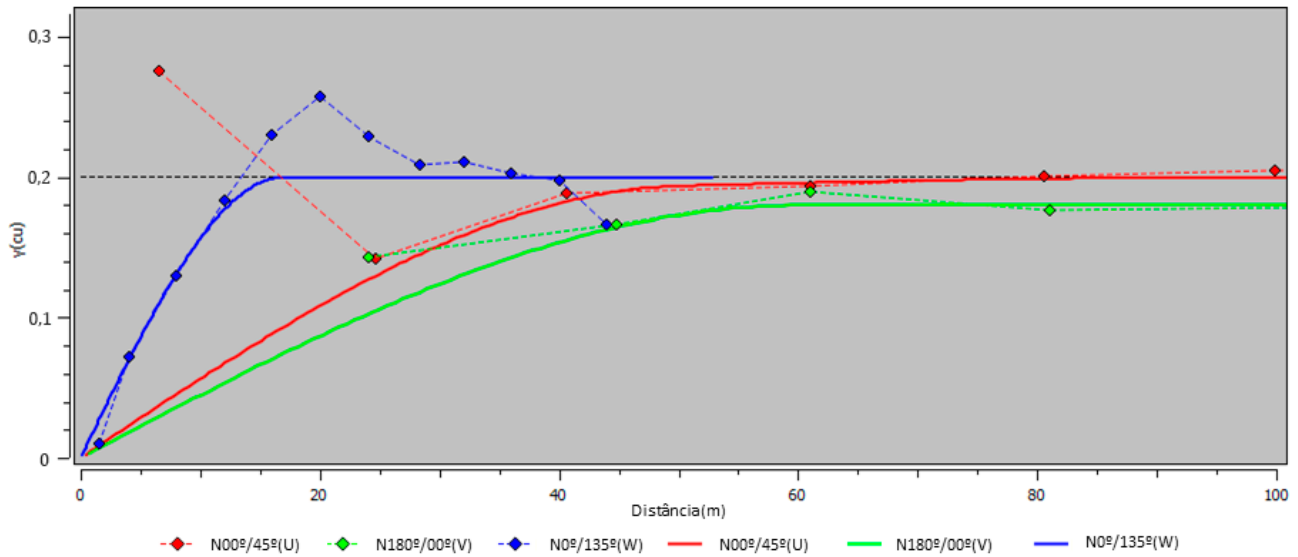


Figura 4. Variograma ajustado com os parâmetros presentes na Tabela 1.

Tabela 2. Parâmetros de vizinhança.

ROTAÇÃO	DADOS CONDICIONANTES		DISTÂNCIAS DE BUSCA		
	MIN	MAX	MAX	MED	MIN
N0°/45°	6	8	65	60	50

Tabela 3. Parâmetros do modelo de blocos utilizado.

	X	Y	Z
Origem	0	0	-300
Tamanho nó	5	10	4
Número de nós	62	60	76

2 x 2 x 1. Os resultados da estimativa por krigagem ordinária são apresentados nas Figuras 6 e 7. Os histogramas estão nas Figuras 8, 9, 10.

Estatística multiponto (MPS)

Após realizada a estimativa por krigagem ordinária, foram calculadas 100 simulações por *FILTERSIM*, com o emprego da estimativa por krigagem ordinária como TI e como dados condicionantes foram utilizadas as amostras obtidas a partir das sondagens.

Com relação aos pesos utilizados para cada tipo de dado (D1, D2, D3), foi escolhido utilizar D1=50%, D2=40% e D3=10%. Estas porcentagens foram escolhidas com o intuito dos dados condicionantes (D1) apresentarem um pequeno destaque em relação aos dados simulados (D2) e um D3 baixo para conferir uma pequena aleatoriedade à simulação. A Tabela 4 contém os parâmetros utilizados para as simulações.

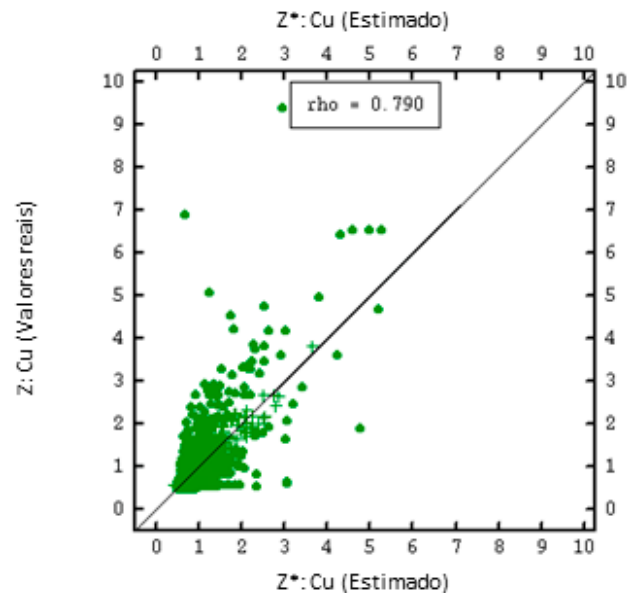


Figura 5. Resultado da validação cruzada com os parâmetros das tabelas 1 e 2.

Comparações dos resultados

A princípio, os resultados da estimativa e da simulação foram comparados visualmente. Para isso foram selecionadas seções nos planos X^Z e Y^Z do modelo de blocos do depósito sintético, da estimativa por krigagem ordinária, da média por E-type das 100 realizações calculadas pelo método *FILTERSIM* e, por fim, de uma realização tomada ao acaso (realização 85).

Os resultados obtidos por todos os métodos foram considerados adequados, uma vez que os padrões de distribuição espacial dos teores de cobre do depósito sintético (Figuras 6A, 7A) foram, em algum grau, reproduzidos.

Comparando os resultados obtidos pode-se destacar

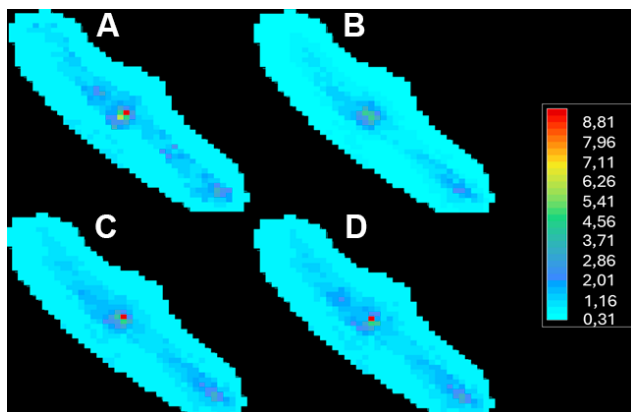


Figura 6. Modelo de blocos com teores de cobre, cortados por uma fronteira convexa. Corte no eixo X^Z . (A) Depósito sintético; (B) Krigagem Ordinária; (C) MPS - Média 100 realizações; (D) MPS - Realização 85.

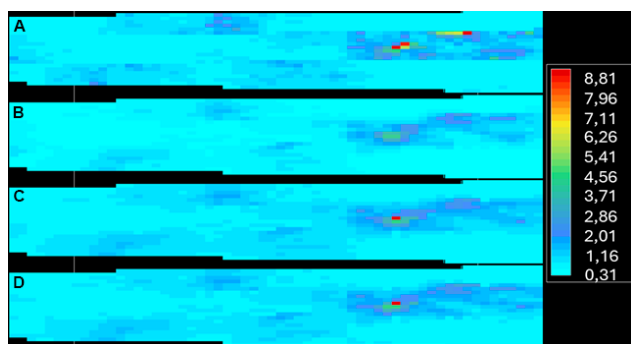


Figura 7. Modelo de blocos com teores de cobre, cortados por uma fronteira. Corte no eixo Y^Z . (A) Depósito sintético; (B) Krigagem Ordinária; (C) MPS - Média 100 realizações; (D) MPS - Realização 85.

Tabela 4. Parâmetros para as simulações multiponto.

Parâmetro	Valor
Número de realizações	100
Semente/ <i>Seed</i>	3323738
Dimensões <i>template</i>	11 x 11 x 5
Dimensões <i>innerpatch</i>	7 x 7 x 3
Imagem de Treinamento	Estimativa por KO
Dados condicionantes	Dados amostrais não regularizados
Grades Múltiplas	3
Peso dados (D1, D2, D3)	50%, 40%, 10%

que todos apresentam resultados suavizados, uma vez que os valores extremos, menores e maiores, de teor de cobre estão atenuados. Esta suavização é mais acentuada nas estimativas por krigagem ordinária como pode ser observado na Figura 6B e 7B. Embora a suavização também exista nos resultados obtidos pelas simulações por MPS (Figuras 6C, 7C, além das Figuras 6D, 7D) ela é menos pronunciada,

sobretudo na realização 85. Há, ainda, na MPS, alguns locais onde os valores originais do depósito são reproduzidos integralmente, pois são locais com amostras e, portanto, os valores são inseridos diretamente na célula que as contém.

Além da comparação visual realizou-se a análise quantitativa dos resultados obtidos em função do depósito sintético. A primeira comparação feita utilizou as estatísticas descritivas do depósito com aquelas obtidas por krigagem ordinária e MPS (resultados globais). Os teores do depósito sintético também foram divididos em faixas, e como os pontos do depósito sintético coincidem com as células do modelo de blocos eles foram utilizados para a seleção dos blocos estimados e simulados. Este procedimento permite comparar diretamente os teores obtidos pelos dois métodos aos teores do depósito sintético e, deste modo, verificar a qualidade das inferências bloco a bloco no modelo, além de fazer as comparações entre as estatísticas descritivas obtidas, para as diferentes faixas de teores. As faixas foram definidas como $Cu \leq 1$ e $Cu > 1$, levando em consideração que a primeira faixa de teores contempla, aproximadamente, 90% dos blocos, e a segunda faixa, com valores mais elevados, apenas 10%, possibilitando o entendimento das inferências com teores altos e baixos, separadamente.

Analisando a estatística descritiva e o histograma (Tabelas 5, 6, 7, além das Figuras 8, 9, 10), é possível observar que as estatísticas das simulações multipontos são semelhantes à krigagem, assim como ambas as técnicas reproduzem as estatísticas descritivas do depósito. Com relação ao coeficiente de correlação entre o depósito sintético e as inferências, nota-se que a média das realizações apresenta uma correlação ligeiramente superior.

A presença de valores inferiores ao mínimo do depósito sintético, ocorreu em função da utilização de amostras fora do trecho mineralizado durante a krigagem ordinária, em regiões na borda da mineralização e, como se utilizou os resultados da krigagem como TI da simulação por MPS estes valores também estão presentes nestes resultados. Também é possível observar que o valor máximo nas simulações está próximo ao do depósito sintético, uma vez que o algoritmo do *FILTERSIM* associa os valores das amostras ao bloco, quando a amostra está contida no bloco.

Em todas as faixas de teores, global, $Cu \leq 1$ e $Cu > 1$ a média das 100 realizações multiponto apresentam valores mais próximos aos do depósito sintético, inclusive quando comparada com a realização 85, escolhida ao acaso.

Com o intuito de medir a acuracidade de cada método adotado, foi calculada, para cada bloco, a razão entre o estimado e o depósito real para a krigagem ordinária e o depósito real e as realizações da simulação por MPS (Equações 2 e 3). Estas porcentagens foram colocadas em um diagrama de pontos para visualizar com mais facilidade o comportamento das simulações, da média das 100 realizações e da estimativa por krigagem ordinária (Figura 11). Também ocorreu a separação do depósito nos intervalos para cobre menor ou igual a 1 e cobre superior a 1, com intuito de averiguar em teores baixos e altos as simulações e estimativa (Figuras 12, 13).

Tabela 5. Estatística descritiva de todo trecho mineralizado.

ESTATÍSTICAS GLOBAIS							
	n	mín.	máx.	\bar{X}	s ²	C.V	Correl. depósito
Depósito sintético	40715	0,50	9,38	0,69	0,16	0,58	-
Estimativa Krigagem Ordinária	40715	0,31	6,10	0,69	0,09	0,44	0,740
MPS Média 100 realizações	40715	0,31	9,35	0,68	0,09	0,44	0,764
MPS Realização 85	40715	0,31	9,35	0,68	0,10	0,46	0,722

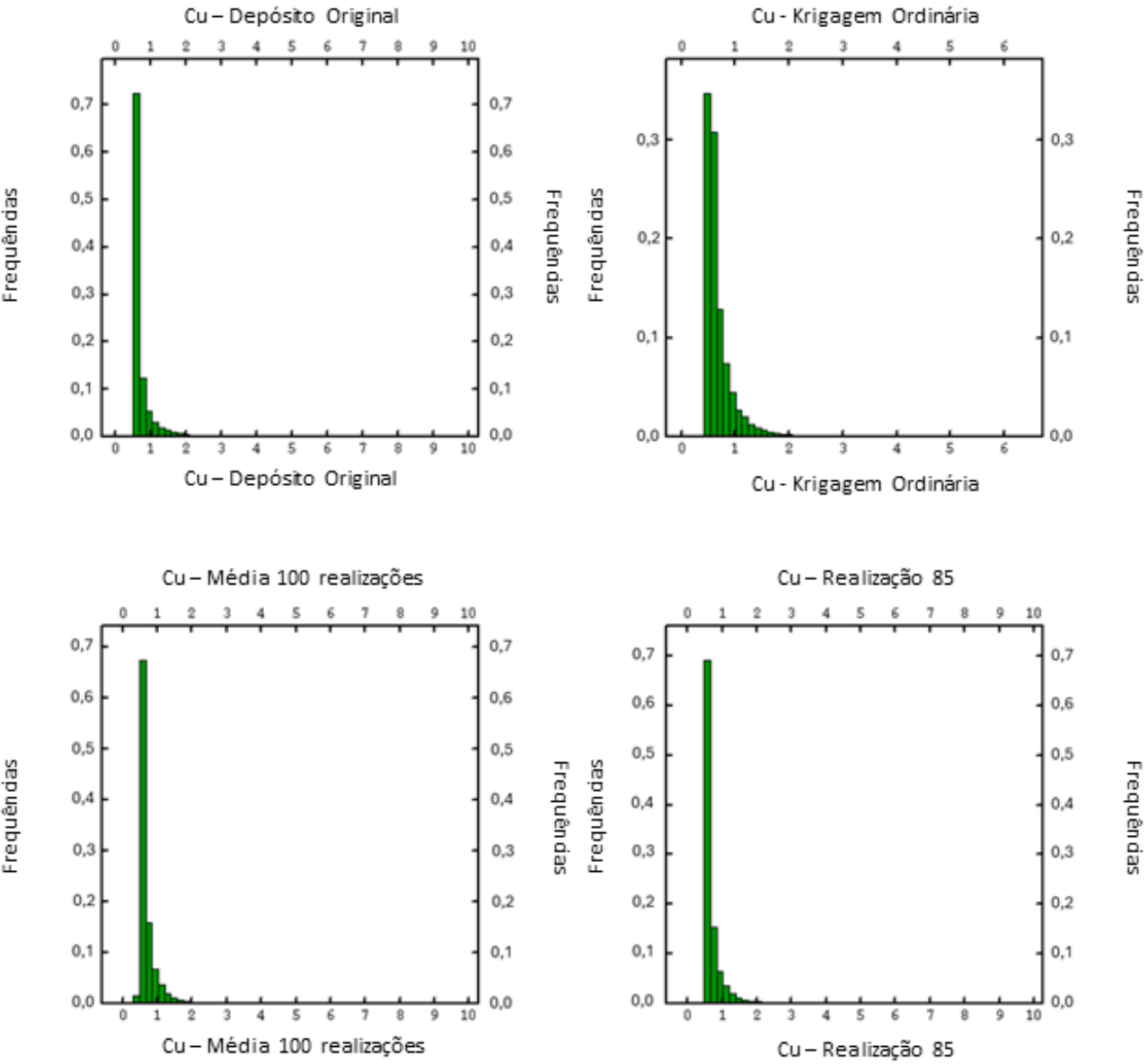


Figura 8. Histograma das estatísticas de todo trecho mineralizado.

Tabela 6. Estatísticas descritivas para o cobre na faixa de teores menor ou igual a 1.

ESTATÍSTICAS PARA INTERVALO Cu≤1							
	n	mín.	máx.	\bar{x}	s ²	C.V	Correl. depósito
Depósito sintético	36431	0,500	1,00	0,588	0,013	0,194	-
Estimativa Krigagem Ordinária	36431	0,313	3,341	0,630	0,031	0,282	0,612
MPS Média 100 realizações	36431	0,314	2,967	0,618	0,025	0,258	0,653
MPS Realização 85	36431	0,313	3,106	0,619	0,029	0,274	0,592

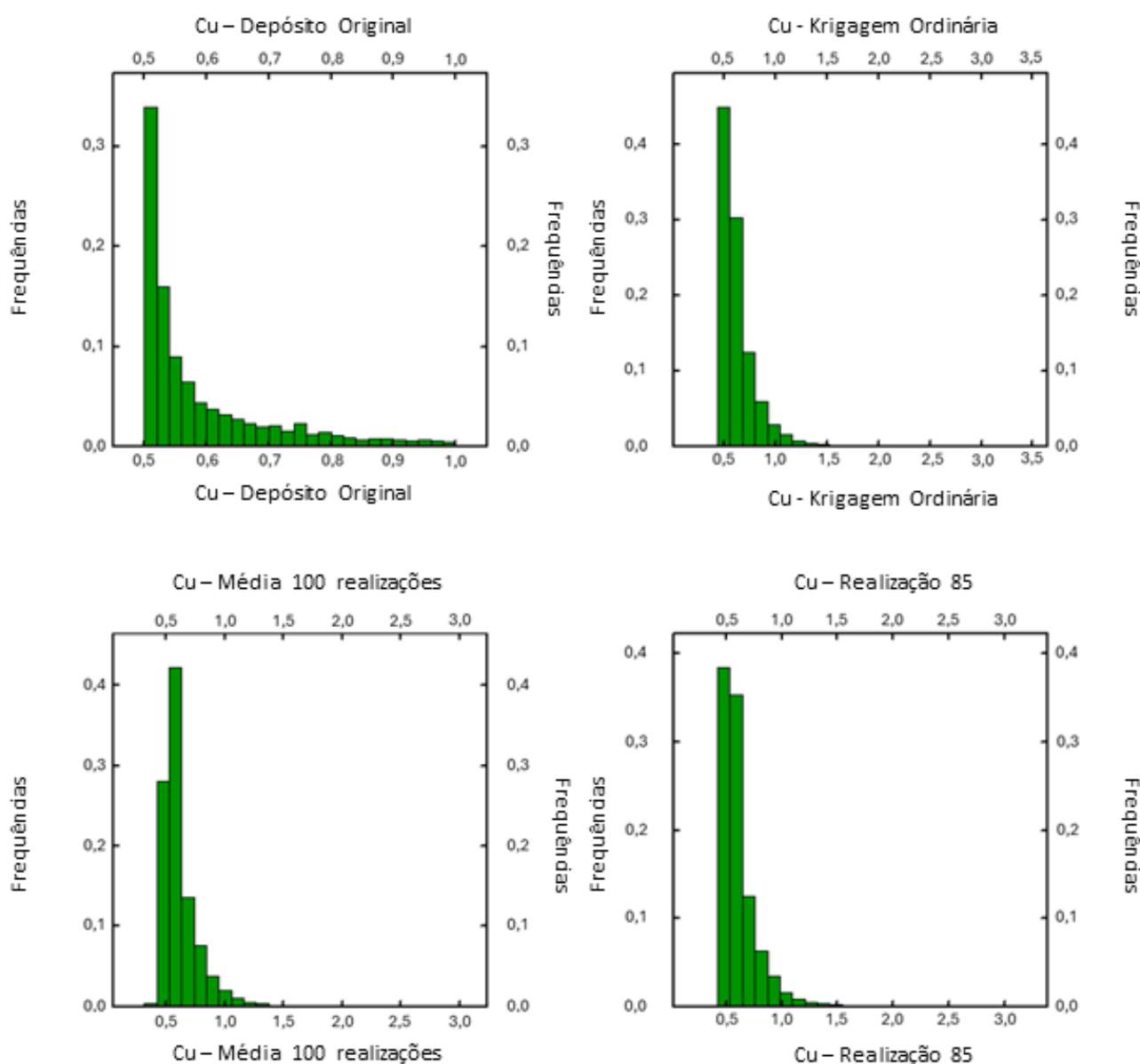
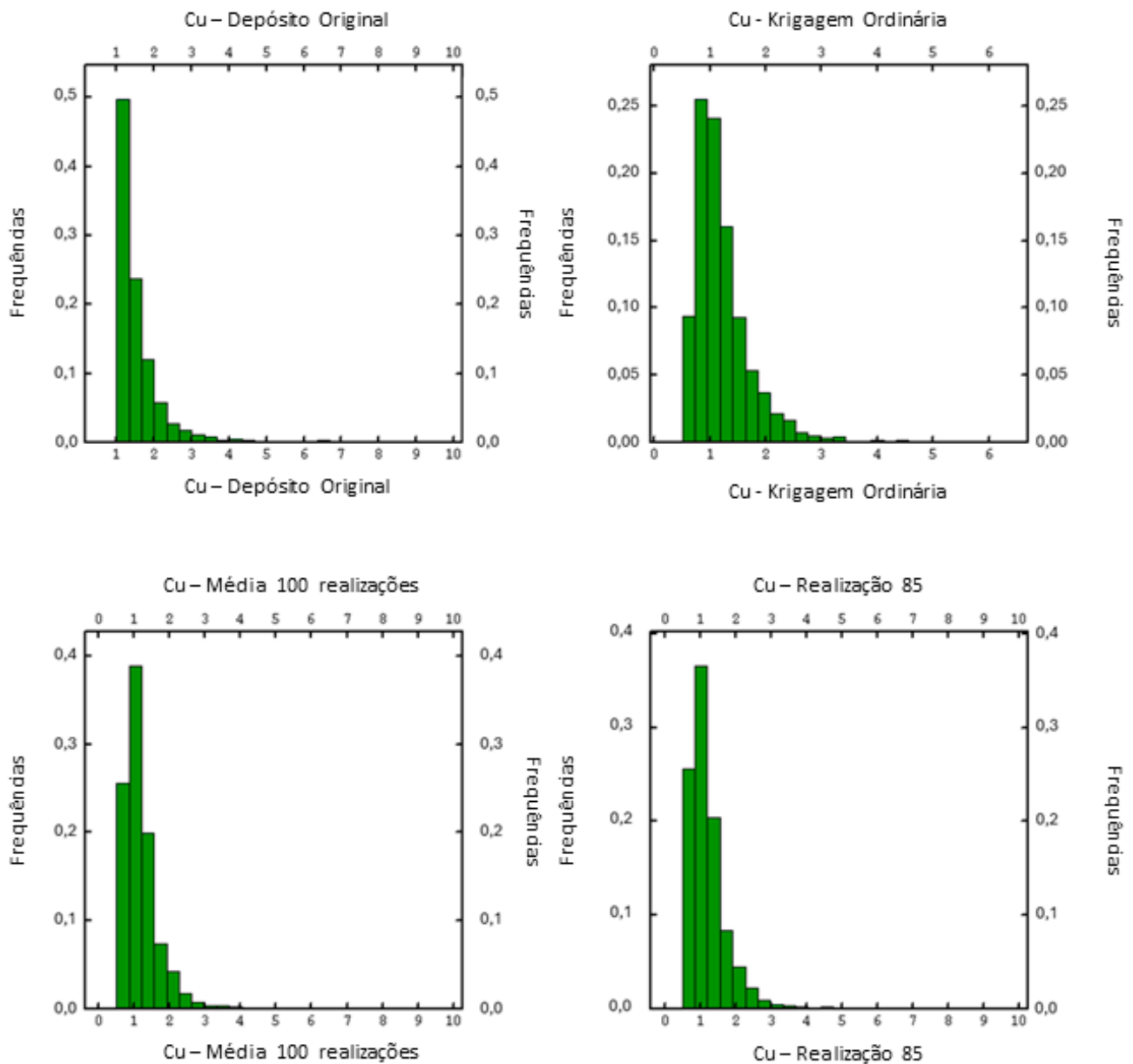
**Figura 9.** Histograma para o cobre na faixa de teores menor ou igual a 1.

Tabela 7. Estatísticas descritivas para o cobre na faixa de teores superiores a 1.

ESTATÍSTICAS PARA INTERVALO Cu>1							
	n	mín.	máx.	\bar{X}	s ²	C.V	Correl. depósito
Depósito sintético	4284	1,010	9,380	1,561	0,573	0,485	-
Estimativa Krigagem Ordinária	4284	0,512	6,137	1,230	0,312	0,455	0,573
MPS Média 100 realizações	4284	0,523	9,350	1,209	0,325	0,472	0,597
MPS Realização 85	4284	0,502	9,350	1,211	0,368	0,501	0,538

**Figura 10.** Histograma para o cobre na faixa de teores superiores a 1.

$$\% \text{sobre valor real} = \frac{KO}{\text{depósito}}$$

$$\% \text{sobre valor real} = \frac{MPS}{\text{depósito}}$$

Observando os gráficos apresentados nas Figuras 11, 12, 13, é possível notar que em ambos os casos houve, na média, uma superestimativa dos valores em relação ao depósito original, uma vez que as razões entre os valores simulados/estimados e o real são sempre maiores que 1. Ao analisar os valores no intervalo de cobre inferior ou igual a 1, nota-se que houve uma sutil melhora na média da razão em todas as simulações MPS sobre a krigagem ordinária, tendo a média da razão das simulações variado entre 1,05 e 1,06, enquanto a krigagem possui média da razão de 1,075.

No intervalo com teores maiores do que 1% de cobre, os valores foram subestimados, uma vez que, nesse intervalo, os valores da razão são inferiores a 1 e, nesses teores não foram observadas diferenças significativas entre as simulações multiponto e o método geoestatístico.

Analisando, as estatísticas descritivas das proporções (Tabela 8), podemos observar que as estimativas e a média das 100 realizações são semelhantes à base de dados sintética, uma vez que a média dos valores em ambos os casos é próxima de 1 e na MPS está proporção é ligeiramente mais semelhante ao depósito sintético.

Com relação a diminuição da suavização da krigagem,

nota-se que os valores de máximo na MPS são menores do que na krigagem ordinária, porém isto não ocorreu nos valores mínimos. Os valores médios da MPS estão mais próximos a 1 e indicam uma menor suavização.

No intervalo para teores de cobre inferiores ou iguais a 1 a MPS apresentou resultados mais semelhantes ao depósito que o método geoestatístico, porém no intervalo de teores de cobre superiores a 1, ambos os métodos estão semelhantes, com a krigagem sendo ligeiramente mais próxima ao depósito sintético.

Por fim, também foi gerado um diagrama do tipo Q-Q para comparar os métodos com o depósito sintético (Figura 14), onde observa-se a existência de uma grande similaridade dos teores médios, de ambos os resultados, em relação ao depósito sintético, com a média por E-type MPS apresentando dispersão dos pontos em relação à bissetriz, sutilmente menor, sobretudo em quantis intermediários.

CONCLUSÕES

Este artigo apresentou um experimento utilizando o algoritmo *FILTERSIM*, técnica da estatística de multiponto, como pós processamento da krigagem ordinária. Um depósito de cobre sintético foi utilizado para fazer as inferências e permitir a comparação direta entre o valor estimado/simulado e o valor real.

O modelo de blocos estimado por krigagem ordinária

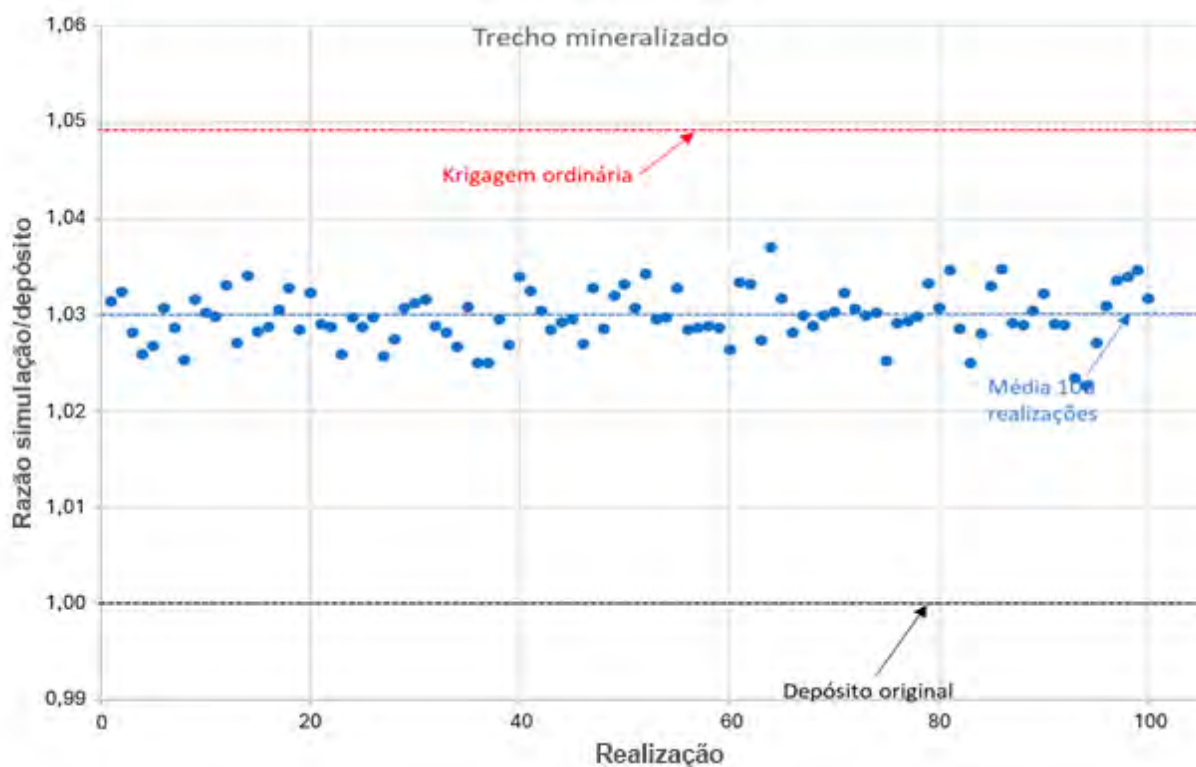


Figura 11. Gráfico de acuracidade com a média da razão entre o simulado no eixo y e o número da realização no eixo x. O valor da razão da krigagem ordinária, média das 100 realizações e depósito original estão representados pelas linhas pontilhadas vermelha, azul e preta, respectivamente. Todo trecho mineralizado está contido nesse gráfico.

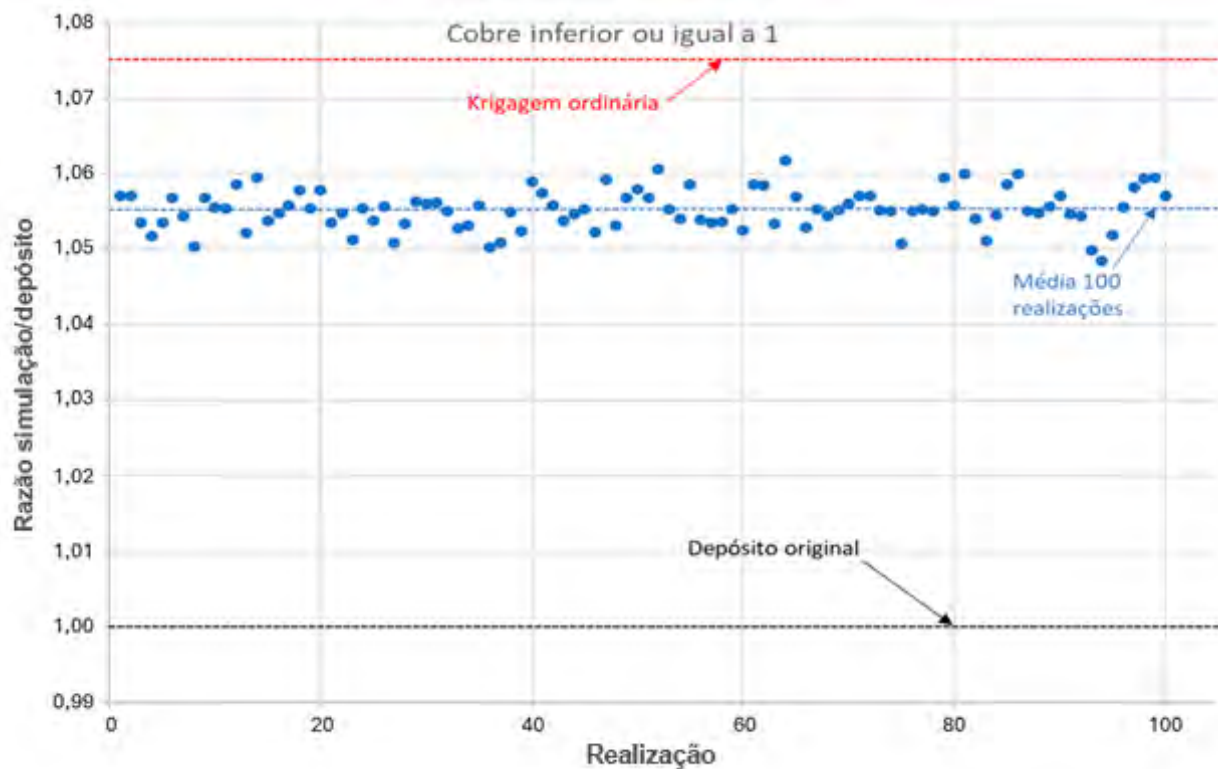


Figura 12. Gráfico de acuracidade com a média da razão entre o simulado no eixo y e o número da realização no eixo x. O valor da razão da krigagem ordinária, média das 100 realizações e depósito original estão representados pelas linhas pontilhadas vermelha, azul e preta, respectivamente. Todo trecho mineralizado com teor de cobre inferior ou igual a 1 está contido nesse gráfico.

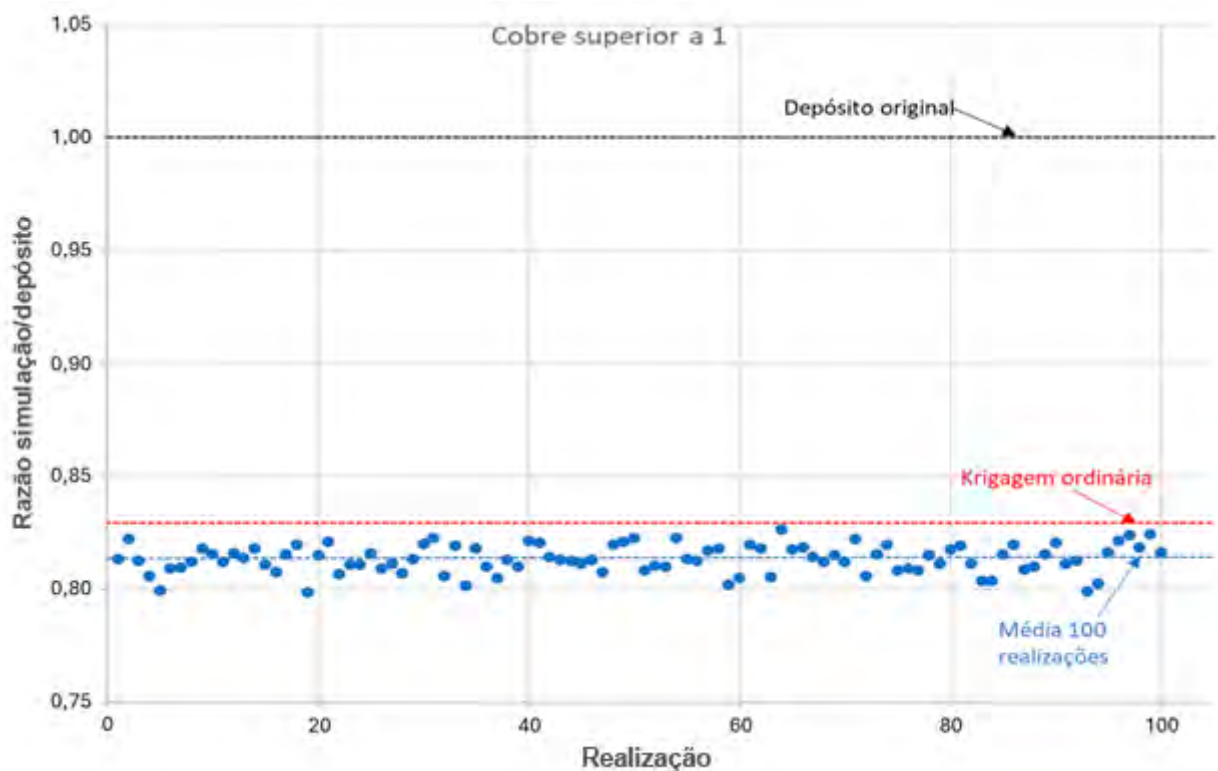


Figura 13. Gráfico de acuracidade com a média da razão entre o simulado no eixo y e o número da realização no eixo x. O valor da razão da krigagem ordinária, média das 100 realizações e depósito original estão representados pelas linhas pontilhadas vermelha, azul e preta, respectivamente. Todo trecho mineralizado com teor de cobre inferior ou igual a 1 está contido nesse gráfico.

Tabela 8. Estatísticas descritivas da proporção do valor estimado sobre o real e a média das 100 realizações multiponto sobre o real no trecho mineralizado e separado em intervalos.

	n	mín.	máx.	\bar{x}	s ²	C.V
ESTATÍSTICAS PARA TODO O TRECHO MINERALIZADO						
KO/depósito	40715	0,145	5,278	1,049	0,057	0,228
MPS/depósito	40715	0,094	4,662	1,030	0,045	0,205
ESTATÍSTICAS PARA INTERVALO Cu≤1						
KO/depósito	36431	0,5361	5,2777	1,075	0,047	0,202
MPS/depósito	36431	0,4059	4,6618	1,055	0,034	0,176
ESTATÍSTICAS PARA INTERVALO Cu>1						
KO/depósito	4284	0,1452	2,6540	0,8291	0,075	0,355
MPS/depósito	4284	0,0944	2,5928	0,8134	0,086	0,294

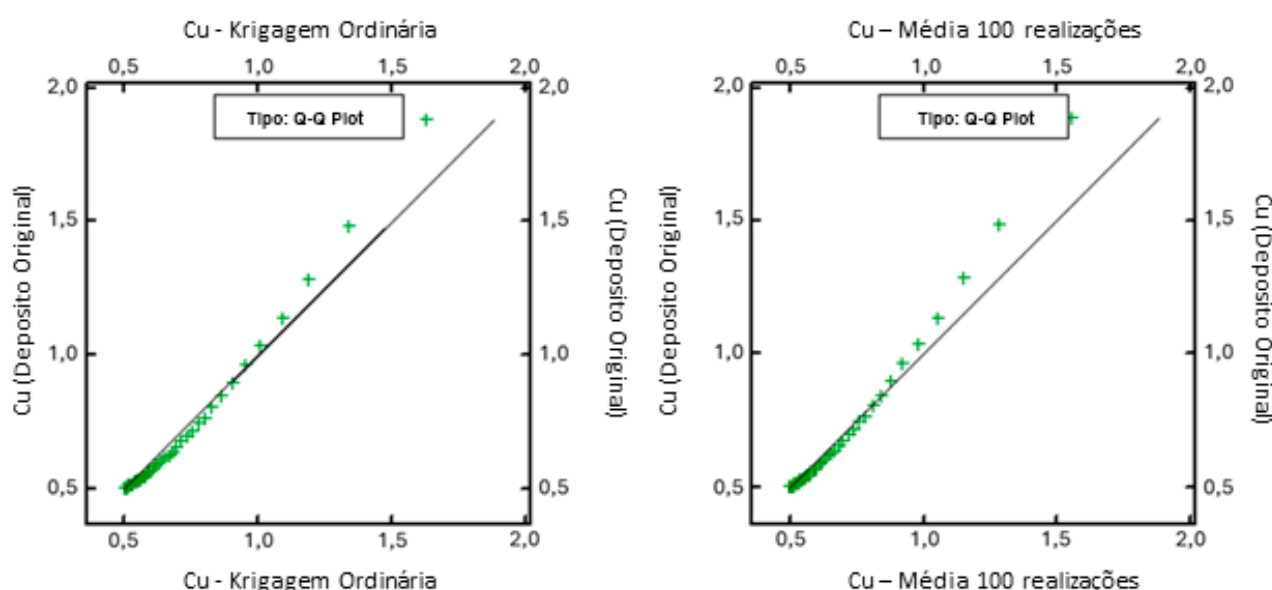
foi empregado como imagem de treinamento do *FILTER-SIM* e 100 realizações foram simuladas. As simulações e o resultado da krigagem ordinária foram comparados entre si, tanto visualmente como estatisticamente, e bloco a bloco. Visualmente, foi possível notar que as simulações MPS apresentam maior semelhança com o depósito sintético (Figuras 6, 7), com os locais com alto teor melhor representados, enquanto na krigagem estes locais aparecem suavizados.

As estatísticas descritivas de ambas as técnicas se mostraram bastante semelhantes, tanto globalmente quanto separadas em faixas de teores (Tabelas 5, 6, 7 e Figuras 8, 9 e 10), no entanto, a MPS apresenta uma semelhança ao depósito sintético ligeiramente maior que a krigagem ordinária, com exceção dos valores máximos, onde há uma grande supe-

rioridade da MPS pois a técnica insere o valor amostral no bloco que é interceptado por furos de sondagem.

A partir da comparação bloco a bloco, conclui-se que as simulações de múltiplos pontos possuem uma semelhança ligeiramente maior ao depósito sintético que a geoestatística. O gráfico Q-Q (Figura 14) também corrobora com esta conclusão, uma vez que os quantis intermediários da MPS estão mais próximos à bissetriz.

Desta forma, pode-se dizer que as simulações MPS geraram, em média, resultados pouco mais acurados do que a krigagem ordinária, sobretudo nos teores mais baixos, que são os mais abundantes no depósito, enquanto nos teores mais elevados a krigagem apresentou resultados mais acurados, porém estes resultados podem ser considerados muito próximos às realizações obtidas por MPS.

**Figura 14.** Gráfico Q-Q entre a krigagem ordinária e o depósito sintético (à esquerda) e a média das simulações MPS com o depósito sintético (à direita).

Assim sendo, é possível considerar a aplicação da metodologia para pós-processamento da krigagem ordinária numa rotina de análise de recursos e reservas. Para tal, mais estudos semelhantes a este devem ser realizados, com diferentes algoritmos de MPS e diferentes depósitos minerais – reais e sintéticos, a fim de testá-los em termos de melhor ou pior adequação de resultados. Além disso, deve-se verificar se a simulação por MPS também pode ser utilizada, a exemplo das técnicas de simulação geoestatística, para a quantificação de incertezas a serem utilizadas no processo de classificação e declaração de recursos e reservas minerais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Geovariances pela cessão da licença dos programas Isatis 2018® e IsatisNeo®.

REFERÊNCIAS

- Caers, J., Zhang, T. (2004). Multiple-point geostatistics: a quantitative vehicle for integrating geologic analogs into multiple reservoir models. *AAPG Special Volumes*, Memoir 80, 383-394. <https://doi.org/10.1306/M80924C18>
- Goovaerts, P. (1997). *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Lawrence, Kansas: Oxford University Press. <https://doi.org/10.1023/A:1007530422454>
- Guardiano, F. B., Srivastava, R. M. (1993). *Multivariate geostatistics: beyond bivariate moments*, *Geostatistics Troia'92*. Dordrecht: Springer, 133-144. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1739-5_12
- Journel, A. G., Huijbregts, C. J. (1978). *Mining Geostatistics*. Londres: Academic Press.
- Mariethoz, G., Caers, J. (2015). *Multiple-point geostatistics: stochastic modeling with training images*. New York: John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9781118662953>
- Matheron, G. (1963). Principles of geostatistics. *Economic Geology*, 58 (8), 1246–1266. <https://doi.org/10.2113/gsecongeo.58.8.1246>
- Matheron, G. (1971). *The theory of regionalised variables and its applications. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, De Fontainebleau, n.5*. Paris: École Nationale Supérieure des Mines. Disponível em: https://cg.ensmp.fr/bibliotheque/public/MATHERON_Ouvrage_00167.pdf. Acesso em: 28 jun 2024.
- Olea, R. A. (1974). Optimal contour mapping using universal kriging. *Journal of Geophysical Research*, 79(5), 695-702. <https://doi.org/10.1029/JB079i005p00695>
- Rezaee, H., Asghari, O., Yamamoto, J. K. (2011). On the reduction of the ordinary kriging smoothing effect. *Journal of Mining and Environment*, 2(2), 102-117. <https://doi.org/10.22044/jme.2011.538>
- Remy, N., Boucher, A., Wu, J. (2009). *Applied geostatistics with SGeMS: A user's guide*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139150019>
- Rossi, M. E., Deustsch, C. V. (2014). *Mineral resource estimation*. Dordrecht: Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5717-5>
- Strebelle, S. (2002). Conditional simulation of complex geological structures using multiple-point statistics. *Mathematical Geology*, 34(1), 1-21. <https://doi.org/10.1023/A:1014009426274>
- Tahmasebi, P. (2018). Multiple point statistics: a review. In: B.S. Daya Sagar, Q. Cheng, F. Agterberg (Ed). *Handbook of Mathematical Geosciences*, 613-643. Suíça: Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78999-6_30
- Takafuji, E. H. M. (2015). *Estudo comparativo entre a Simulação Sequencial Gaussiana e a Simulação Baseada em Wavelets aplicado a quantificação de minério de Cu em um depósito sintético*. Dissertação (Mestrado). São Paulo: Instituto de Geociências – USP. <https://www.doi.org/10.11606/D.44.2015.tde-22092015-145130>
- Takafuji, E. H. M., Rocha, M. M., Ramos, G. Z., Silva, L. A. U. (2017). Simulação estocástica aplicada a um banco de dados sintético de cobre. *Geologia USP. Série Científica*, 17, 247-256. <https://doi.org/10.11606/issn.2316-9095.v17-432>
- Yamamoto, J. K. (2005) Correcting the smoothing effect of ordinary kriging estimates. *Mathematical Geology*, 37, 69-94. <https://doi.org/10.1007/s11004-005-8748-7>
- Yamamoto, J. K., Landim, P. M. B. (2013). *Geoestatística: conceitos e aplicações*. São Paulo: Oficina de Textos.
- Zhang, T. (2006). *Filter-based training pattern classification for spatial pattern simulation*. Tese (Doutorado). Stanford: Stanford University. Disponível em: <https://www.proquest.com/dissertations-theses/filter-based-training-pattern-classification/docview/304982590/se-2?accountid=14643>. Acesso em: 28 jun 2024.