Análise numérica de estruturas tridimensionais formadas por materiais isotrópicos enrijecidos via Método dos Elementos Finitos

Lucas Nunes Guimarães[1]

Orientador: Edson Denner Leonel

Escola de Engenharia de São Carlos – EESC USP

lucasguimaraes@usp.br

Objetivos

O objetivo deste trabalho é o de estudar o Método dos Elementos Finitos (MEF), uma ferramenta surgida em 1955, na Inglaterra, com as produções de Argyris e Kelsey. Originando-se dos desdobramentos das análises realizadas na indústria aeronáutica, a MEF seria, na verdade, uma particularização do método de Rayleigh-Ritz.

Neste trabalho foi dado foco especial à aplicação do método de forma computacional para análises de estruturas tridimensionais formadas por materiais isotrópicos, incluindo os casos enrijecidos.

Métodos e Procedimentos

Para o cumprimento do objetivo deste trabalho, inicialmente utilizou-se a referência [1] para compreensão do método e desenvolvimento de um programa computacional em linguagem FORTRAN 90 a fim de realizar estudos da resposta mecânica de estruturais tridimensionais quando submetidas a carregamentos. Optou-se por desenvolver as análises a partir da formulação conhecida por Método da Rigidez, conforme apresentado em [2]. Baseando-se em um tratamento matemático matricial em que, conhecidos os carregamentos aplicados à estrutura, busca-se determinar seus deslocamentos aproximados. Em termos matemáticos, o que se procura é a construção de um sistema como o demonstrado a seguir

$$\begin{bmatrix} f_x^1 \\ f_y^1 \\ f_z^1 \\ \vdots \\ f_z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_z^1 \\ \vdots \\ u_z^n \end{bmatrix}$$

Em que o vetor coluna à esquerda contém as forças aplicadas sobre o corpo, a matriz central é chamada matriz de rigidez e o vetor coluna à direita é o termo relacionado aos deslocamentos nodais da estrutura. Observa-se então que o que se busca é a obtenção de uma matriz que relacione os carregamentos aos deslocamentos dos nós, registrando parcelas de energia associadas aos graus de liberdade dos nós da estrutura. De posse da matriz de rigidez global e dos carregamentos é possível obter os deslocamentos e, por meio de relações matemáticas, as deformações e as tensões.

Em seguida, é necessário interpolar os resultados dos deslocamentos nodais para toda a extensão do corpo. Para isso utilizou-se funções de forma obtidas por meio do produto de funções de interpolação Lagrangeana de uma dimensão, ou seja $N_a = l_a^n(\xi) l_a^m(\eta) l_a^p(\zeta)$ em que

$$l_a^n(\xi) = \prod_{b=0 b\neq a}^{n} \frac{\xi - \xi_b}{\xi_a - \xi_b}$$

E assim, uma vez obtidos os deslocamentos, basta utilizar relações matemáticas como a Lei

[1]Bolsista PIBIC-CNPQ

de Hooke Generalizada para obter as deformações e as tensões. Finalmente determina-se a tensão média de cada elemento. Destaca-se que para os casos de materiais enrijecidos, faz-se necessário utilizar uma estratégia de superposição de efeitos e ponderação aplicando um fator de homogeneização, resultado do quociente entre os módulos de elasticidade dos materiais, conforme [4].

A fim de facilitar a visualização dos deslocamentos, utilizou-se a ferramenta AcadView, disponibilizada pelo Departamento de Engenharia de Estruturas (SET - EESC).

Por fim, para validar os resultados foram realizadas comparações entre os valores dos deslocamentos obtidos por solução analítica.

Resultados

Os resultados para os deslocamentos alcançados pelo método computacional foram validados pelas soluções analíticas dos exemplos tratados, sendo sua variação desprezível. A exemplo, o problema de estrutura enrijecida, cuja solução analítica para o deslocamento nodal na direção x é $3{,}966 \times 10^{-6}\, m$ e a solução aproximada é $3{,}923 \times 10^{-6}\, m$, (variação 1,1%), como exposto a seguir:

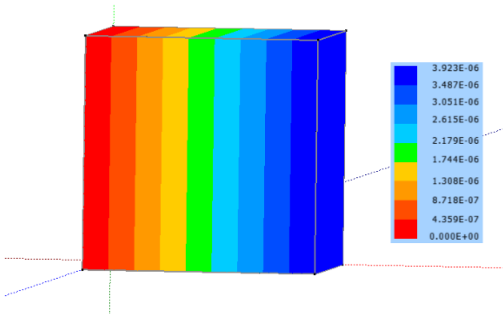

Figura 1: Deslocamentos na direção x ao longo da estrutura

Conclusões

Com este trabalho foi possível concluir que o Método dos Elementos Finitos (MEF) em sua formulação isoparamétrica se mostra confiável e veloz em resolver problemas estruturais. A implementação de elementos tridimensionais quando comparados àqueles bidimensionais se mostrou mais complexa, mas próxima da formulação do método para problemas planos.

Percebeu-se também que a implementação do método exige cuidado com a entrada dos dados. Definir as conectividades, impor restrições e cargas gera certa dificuldade uma vez que exigem a inserção de um grande volume de dados. Por essa razão, conclui-se que é fundamental a utilização de um segundo programa, capaz de fornecer as informações necessárias para a análise.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer imensamente ao professor Edson Denner Leonel pela oportunidade de iniciar este projeto e por todo o suporte ao longo do período em que este trabalho foi desenvolvido. Também gostaria de agradecer ao mestrando Gabriel Neves Queiroz, que despendeu muito de seu tempo esclarecendo dúvidas e buscando soluções junto a mim.

Referências

[1] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite elements method**. Oxford: Butterworth-Heinemann, Boston. 2000.

[2] LOGAN, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite elements method**. Oxford: Butterworth-Heinemann, Boston. 2012.

[3] SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas.** 1ª ed. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo. 2003

[4] LEONEL, E. D. **Resistência dos Materiais e Mecânica dos Sólidos**. Notas de Aula. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 2022.