UM POUCO DA OBMEP

O PROBLEMA DO DIA

Ana Catarina P. Hellmeister
Coordenadora do PIC/OBMEP
IME USP

O PIC e o EHH

Um importante projeto desenvolvido pela OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas é o PIC – Programa de Iniciação Científica Jr. Esse projeto é, a meu ver, um grande impulsor para o ensino e aprendizagem de Matemática no país e coloca a OBMEP em posição diferenciada em relação às outras olimpíadas brasileiras.

O PIC é um programa anual de estudos orientados que é oferecido a todos os alunos que conquistaram uma medalha na OBMEP do ano anterior. Neste ano, o PIC conta com seis mil alunos participantes, distribuídos em polos de aplicação por todos os Estados do país. O programa é desenvolvido em encontros presenciais mensais e por acompanhamento de estudos *on-line* no Portal do PIC, no *site* da OBMEP. Os alunos participantes recebem, além de livros, material didático especialmente elaborado para o programa e preparado por professores de universidades brasileiras. Nos encontros presenciais, o contato com professores orientadores que apresentam conteúdos matemáticos motivadores, não usualmente vistos na sala de aula tradicional, oferece aos alunos uma oportunidade de melhor aprendizado e crescimento intelectual. Nos estudos *on-line*, moderados por outros professores, o aluno amadurece e complementa os conhecimentos adquiridos presencialmente.

Um evento que faz parte do PIC é o EHH – Encontro do Hotel de Hilbert (Hotel de Hilbert é o nome, escolhido pelos alunos, do fórum de discussão *on-line* do PIC. Vale a pena tentar descobrir a razão desse nome.). Para esse encontro são convidados os 200 alunos que tiveram melhor desempenho no PIC no ano anterior e nele são oferecidos minicursos, palestras, oficinas e outras atividades ligadas ao aprendizado de Matemática.

O 5º EHH aconteceu em Florianópolis, entre 24 e 28 de agosto de 2015, sendo uma das atividades desenvolvidas no encontro, o "problema do dia" – um problema é divulgado no início da manhã e uma urna fica aberta até as 22 horas desse dia para receber as soluções dos alunos. Um dos problemas dessa atividade foi:

> Um polígono convexo com n lados de mesma medida está inteiramente contido no interior de uma circunferência. Cada lado é prolongado em ambas as direções até a interseção com a circunferência, formando dois segmentos de reta fora do polígono. Prove que é possível pintar alguns desses $2n$ segmentos de azul e os outros de vermelho, de modo que a soma dos comprimentos dos segmentos azuis é igual à soma dos comprimentos dos segmentos vermelhos.

As figuras 1 e 2 ilustram os casos $n = 3$ e $n = 4$, respectivamente. As medidas dos segmentos são denotadas por s_i e as medidas dos lados do polígono por ℓ.

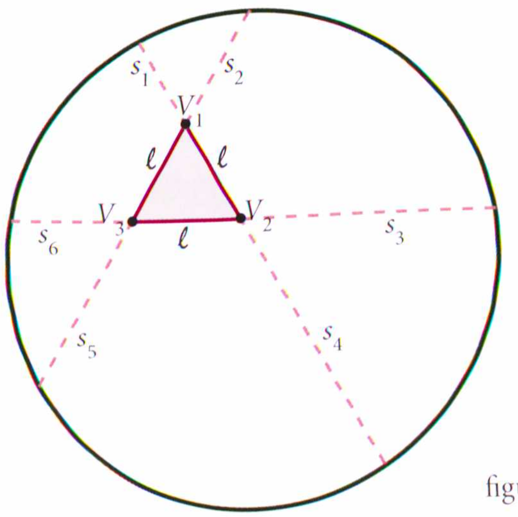

figura 1

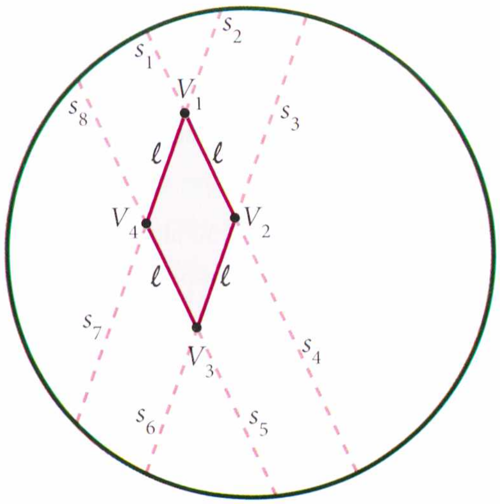

figura 2

Os alunos, de início, não sabiam como abordar o problema; muitos acharam que se tratava de um daqueles problemas "muito loucos" de contagem.

Depois, alguns tomaram a atitude, aliás muito adequada, de tentar resolver o problema primeiro no caso particular do triângulo. Desenhando uma figura semelhante à figura 1, tiveram a ideia de usar o resultado a seguir, potência de um ponto P interior à circunferência, embora ainda com dúvidas, pois esse resultado envolve o produto de medidas e o problema exigia soma de medidas de segmentos.

> Resultado: Se AB e CD são duas cordas que se cortam em um ponto P interior à circunferência, tem-se
>
> $$AP \,.\, PD = CP.\ PB.$$

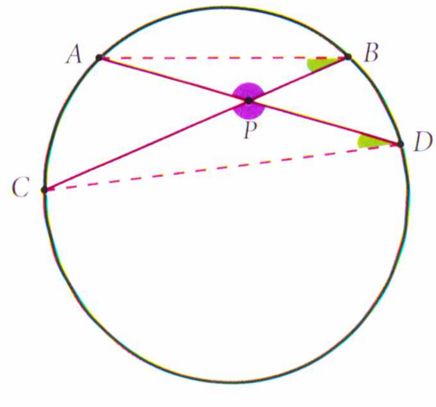

figura 3

A igualdade $AP \,.\, PD = CP.\, PB$ decorre da semelhança dos triângulos APB e CPD da figura 3, lembrando que as medidas dos ângulos em D e em B são iguais, pois ambos estão relacionados com o mesmo arco AC.

No fim do dia, cerca de 30 alunos haviam colocado soluções na urna correspondente a esse problema, número menor do que o usual, e entre as soluções havia por volta de 20 corretas, todas usando o resultado da potência de um ponto aplicado aos vértices do polígono. O pequeno número de soluções corretas nos mostrou que o problema foi difícil e, então, convidamos um dos alunos que havia resolvido o problema de forma clara e completa para expor sua solução aos colegas. A exposição foi uma atividade facultativa, mas teve um público grande e interessado.

Vejamos agora uma solução do problema.

No caso particular do triângulo, usando a igualdade da potência nos vértices V_1, V_2 e V_3 da figura 1, obtemos:

$$s_1(\ell + s_4) = s_2(\ell + s_5)$$
$$s_3(\ell + s_6) = s_4(\ell + s_1)$$
$$s_5(\ell + s_2) = s_6(\ell + s_3)$$

Efetuando as multiplicações, igualando a soma dos primeiros membros das igualdades com a soma dos segundos membros das igualdades e cancelando os termos comuns, obtemos:

$$s_1 + s_3 + s_5 = s_2 + s_4 + s_6\,.$$

Portanto, basta pintar os segmentos de medidas s_i, i ímpar, de azul e de vermelho os segmentos de medidas s_i, i par.

Não é difícil agora perceber o que acontece com as igualdades das potências dos vértices à medida que o número de lados cresce.

$n = 4$:

$$s_1(\ell + s_4) = s_2(\ell + s_7)$$
$$s_3(\ell + s_6) = s_4(\ell + s_1)$$
$$s_5(\ell + s_8) = s_6(\ell + s_3)$$
$$s_7(\ell + s_2) = s_8(\ell + s_5)$$

Somando e cancelando os termos iguais:

$$s_1 + s_3 + s_5 + s_7 = s_2 + s_4 + s_6 + s_8.$$

$n = 5$:

$$s_1(\ell + s_4) = s_2(\ell + s_9)$$
$$s_3(\ell + s_6) = s_4(\ell + s_1)$$
$$s_5(\ell + s_8) = s_6(\ell + s_3)$$
$$s_7(\ell + s_{10}) = s_8(\ell + s_5)$$
$$s_9(\ell + s_2) = s_{10}(\ell + s_7)$$

Somando e cancelando os termos iguais:

$$s_1 + s_3 + s_5 + s_7 + s_9 = s_2 + s_4 + s_6 + s_8 + s_{10}.$$

Ou, genericamente, se tivermos n vértices, V_1, V_2, ..., V_n, ao vértice V_i estarão associados os segmentos de medidas s_{2i-1} e s_{2i} e as igualdades obtidas pelas potências dos vértices serão:

$$s_1(\ell + s_4) = s_2(\ell + s_{2n-1})$$
$$s_3(\ell + s_6) = s_4(\ell + s_1)$$
$$s_5(\ell + s_8) = s_6(\ell + s_3)$$
$$\ldots$$
$$s_{2n-1}(\ell + s_2) = s_{2n}(\ell + s_{2n-3})$$

$$s_1 + s_3 + \ldots + s_{2n-1} = s_2 + s_4 + \ldots + s_{2n}.$$

E, então, basta pintar os segmentos de medidas s_i, i ímpar, de uma cor e os segmentos de medidas s_i, i par, de outra cor.

Um outro "problema do dia" desse EHH foi:

> Um rei convidou 2015 bruxos para um encontro. Alguns bruxos são bons e os outros são maus. Um bruxo bom sempre fala a verdade, enquanto um bruxo mau pode falar o que quiser. Os bruxos sabem quem é bom e quem é mau, mas o rei não.
>
> Durante o encontro, o rei faz uma primeira rodada de perguntas, uma para cada bruxo, cuja reposta só pode ser sim ou não. Em seguida ele expulsa um dos bruxos do reino. O bruxo expulso passa por uma porta mágica que permite ao rei saber se o bruxo é bom ou mau.
>
> O rei faz uma nova rodada de perguntas, sempre com apenas sim ou não como respostas possíveis, e expulsa outro bruxo, que também passa pela porta mágica.
>
> O rei continua repetindo esse processo. Mostre que o rei consegue expulsar todos os bruxos maus, enquanto expulsa não mais do que um bruxo bom.

Vamos deixar os leitores se divertirem resolvendo esse problema. Para ajudar, observamos que, se o rei identificar um bruxo bom, poderá usar esse conhecimento para identificar os bruxos maus.

Nota: **Os "problemas do dia" dos encontros EHH são elaborados pelo professor Paulo Rodrigues.**

RENOVAÇÃO DE ASSINATURA OU NOVA ASSINATURA

Se você é assinante, para receber o próximo número (90) da RPM, que será distribuído em maio/2016, é necessário fazer a **renovação da assinatura**. Para isso, siga as instruções que estão no **EXPEDIENTE** deste exemplar, na página 63.

Para fazer uma **nova assinatura** da RPM, siga as instruções que estão no **EXPEDIENTE.**

Para maiores informações, entre em contato com a Secretaria da RPM:

e-mail: secretaria.rpm@sbm.org.br

telefone: (21) 2529 5095