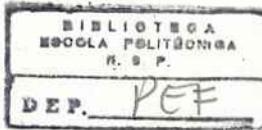




Escola Politécnica - EPBC



31200053629



BT/PEF-8508

SPLINE CÚBICO E SUAS APLICAÇÕES

Carlos Alberto Soares  
Professor Assistente Doutor  
(recebido em 24/10/85)

EDITOR CHEFE

C.E.N.Mazzilli

COMISSÃO EDITORIAL

- |                                     |                       |
|-------------------------------------|-----------------------|
| - Engenharia de Solos               | W.Hachich             |
| - Estruturas de Concreto            | P.B.Fusco             |
| - Estruturas Metálicas e de Madeira | P.B.Fusco             |
| - Interação Solo-Estrutura          | C.E.M.Maffei          |
| - Mecânica Aplicada                 | D.Zagottis            |
| - Métodos Numéricos                 | I.Q.Barros            |
| - Pontes e Grandes Estruturas       | J.C.Figueiredo Ferraz |
| - Teoria das Estruturas             | V.M.Souza Lima        |



## SPLINE CÚBICO E SUAS APLICAÇÕES

Carlos Alberto Soares  
Professor Assistente Doutor  
Departamento de Engenharia de  
Estruturas e Fundações, EPUSP

1985



CONTEÚDO

Introdução	1
1. Definição e Obtenção do Spline Cúbico	3
2. Diferentes Tipos de Splines Cúbicos	5
3. Solução do Sistema Tridiagonal de Equações Lineares	5
4. Condições Auxiliares para os Diferentes Splines Cúbicos	6
5. Coeficientes para o Spline Cúbico e sua Avaliação em cada Subintervalo	11
6. Estimativas de Erros, na Interpolação pelo Spline Cúbico, para a Função $f(x)$ e suas Derivadas	12
7. Condições de Extremidades para o Spline Cúbico com Nós Igualmente Espaçados, Splines $E(\alpha)$	14
8. Condições de Extremidades para o Spline Cúbico com Nós com Espaçamentos Quaisquer, Splines $E(\alpha_0, \alpha_n)$	17
9. Spline Cúbico com Nós Igualmente Espaçados, Condições de Extremidades que Permitem Obter Melhores Aproximações para as Derivadas de $f(x)$	21
10. Exemplos de Aplicação	25
Bibliografia	



## Introdução

A aproximação de uma função  $f(x)$  por polinômio único, de grau elevado, com pontos de colocação igualmente espaçados no intervalo de interpolação, apresenta freqüentemente oscilações acentuadas, indesejáveis, entre os pontos de colocação.

Para a função  $f(x) = 1/(1 + x^2)$ , no intervalo  $(-5, 5)$ , por exemplo, a interpolação por polinômios de grau  $n$ , em pontos igualmente espaçados, não converge para  $f(x)$ , junto às extremidades do intervalo, quando  $n \rightarrow \infty$ . Quando houver liberdade na escolha dos pontos de colocação, a utilização das abscissas de Chebyshev conduz geralmente a polinômio único, de aproximação precisa e estável. A aproximação pelos polinômios de Chebyshev, de obtenção rápida, substitui usualmente a aproximação pelo polinômio de melhor aproximação, onde se procura tornar mínimo o erro máximo  $\|e(x)\| = \|P(x) - f(x)\| = \max |P(x) - f(x)|$  em todo o intervalo, impondo-se igualdade de oscilações ou de alternâncias de erros num número mínimo de pontos dentro do intervalo.

Quando a função que se deseja aproximar for fornecida sob a forma de valores tabelados ou de resultados empíricos, é recomendável a aproximação por polinômios por partes ou por trechos. Neste caso, adotam-se, em subintervalos, polinômios de grau não-elevado que se interligam por continuidade de valores da função e de suas derivadas até certa ordem, nos pontos nodais.

Para efeito de confronto, citam-se três aproximações em polinômios cúbicos, por trechos.

Na interpolação cônica, por trechos, de Hermite, para a determinação do polinômio cônico  $H_i(x)$ , referente ao trecho  $(x_{i-1}, x_i)$ , impõem-se  $H_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ ,  $H_i(x_i) = f(x_i)$ ,  $H'_i(x_{i-1}) = f'(x_{i-1})$  e  $H'_i(x_i) = f'(x_i)$ .

Em cada intervalo obtém-se o erro de aproximação

$$\max |f(x) - H_i(x)| \leq \frac{h_i^4}{384} \max |f^{(4)}(\xi)|$$

com  $\xi$  em  $(x_{i-1}, x_i)$  e  $h_i = x_i - x_{i-1}$ .

No segundo membro da expressão acima, reconhece-se o deslocamento no meio da viga biengastada, de vão igual a  $h_i$ , sujeita à carga uniforme  $p = f^{(4)}(\xi)$ .\*

Pela interpolação cônica, por trechos, de Hermite, tem-se, para o intervalo  $(a, b)$ , com  $h = \max h_i$ , o erro de aproximação

$$\max |f(x) - H(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max |f^{(4)}(\xi)|$$

com  $\xi$  em  $(a, b)$ .

Na interpolação cônica, por trechos, de Bessel, para a determinação do polinômio cônico  $B_i(x)$ , referente ao intervalo  $(x_{i-1}, x_i)$ , além de impor  $B_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ ,  $B_i(x_i) = f(x_i)$  tomam-se, para  $B'_i(x_{i-1})$  e  $B'_i(x_i)$  os valores das derivadas, nos pontos  $x_{i-1}$  e  $x_i$ , dos polinômios de segundo grau com pontos de colocação em  $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i$  e  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ , respectivamente.

---

\* Admitindo-se doravante EI com valor unitário quando se estabelecer a analogia com viga.



Com as imposições de  $B'_1(x_0) = f'(x_0)$  e  $B'_n(x_n) = f'(x_n)$ , consegue-se, em geral

$$\max |f(x) - B(x)| = O(h^3)$$

e, para o caso de espaçamento uniforme

$$\max |f(x) - B(x)| = O(h^4)$$

Na interpolação, por trechos, pelo spline cúbico, para a determinação do spline cúbico  $S_i(x)$ , referente ao intervalo  $(x_{i-1}, x_i)$ , com  $S_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$  e  $S_i(x_i) = f(x_i)$ , os valores  $S'_i(x_{i-1})$  e  $S'_i(x_i)$  são agora obtidos exigindo-se continuidade da derivada segunda  $S''(x)$  nos pontos internos do intervalo  $(a, b)$ .

Para o spline cúbico, sob condições de extremidades adequadas, em  $x_0$  e  $x_n$ , posteriormente examinadas, obtém-se o erro de aproximação abaixo:

$$\max |f(x) - S(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 \max |f^{(4)}(\xi)|$$

com  $\xi$  em  $(a, b)$ .

No segundo membro da expressão acima, reconhece-se o deslocamento no meio da viga simplesmente apoiada, de vão igual a  $h$ , sujeita à carga uniforme  $p = \max |f^{(4)}(\xi)|$ .

Observar que pelo spline cúbico  $S(x)$  consegue-se

$$\max |f(x) - S(x)| = O(h^4)$$

mesma ordem de aproximação obtida pela interpolação cúbica, por trechos, de Hermite, exigindo-se, contudo, somente a metade do número de informações, isto é, somente  $f(x_i)$  ao invés de  $f(x_i)$  e  $f'(x_i)$ .

No caso de espaçamento uniforme,  $h_i = h = (x_i - x_{i-1})$ , obtém-se, pelo spline cúbico, para os pontos nodais  $x_i$ , o erro de aproximação na derivada primeira\*

$$\max |f'(x_i) - S'(x_i)| \leq \frac{h^4}{60} \max |f^{(5)}(\xi)|$$

com  $\xi$  em  $(a, b)$ .

A aproximação acima, da ordem  $O(h^4)$ , torna o spline cúbico útil para a diferenciação numérica de  $f(x)$ .

Pode-se obter o spline cúbico  $S(x)$  pelo cálculo variacional quando se procura o mínimo do funcional

$$I(y) = \int_a^b (y''(x))^2 dx$$

sob as condições  $y(x_i) = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ).

Encontra-se, para o funcional acima, a equação de Euler

\* Veja-se (6.13), no item 6, pág. 13.



$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0 ,$$

para  $x \neq x_i$ .

Isto é, o spline cúbico  $S(x)$ , solução da equação acima, coincide com a linha elástica de viga sujeita a cargas concentradas nos pontos nodais  $x_i$ . Tal linha elástica é função contínua, com derivadas primeira e segunda também contínuas, composta por polinômios cúbicos em cada trecho  $(x_{i-1}, x_i)$ . O fato de  $S(x)$  tornar mínimo o funcional mencionado, confere-lhe a característica de interpolação suave, por partes, com curvatura global mínima para o intervalo  $(a, b)$ . Evitam-se, desta forma, as oscilações acentuadas oriundas de interpolação por polinômio único de grau elevado.

Para o spline cúbico completo, definido posteriormente, o diagrama  $S''(x)$ , linha poligonal coincidente com o diagrama de momentos fletores para a viga sujeita a cargas concentradas nos pontos  $x_i$ , representa a melhor aproximação\* da segunda da função  $f(x)$  que se interpola pelo spline cúbico  $S(x)$ .

Finalizando, utilizam-se os splines cúbicos em problemas de interpolação, de construção de gráficos, de ajustamento de dados, de diferenciação e integração numéricas, nas soluções de equações diferenciais e equações integrais.

### 1. Definição e Obtenção do Spline Cúbico

Considere-se uma partição qualquer do intervalo  $(a, b)$  pelos pontos  $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$  onde se conhecem os valores da função  $f(x)$ , denominase spline cúbico  $S(x)$ , sobre a partição realizada, a função  $S(x)$  com as seguintes propriedades:

- a)  $S(x)$  é contínua assim como suas derivadas primeira e segunda no intervalo  $(a, b)$ .
- b)  $S(x_k) = f(x_k) , (k = 0, 1, 2, \dots, n)$
- c)  $S(x)$  é um polinômio de terceiro grau em cada subintervalo  $(x_{k-1}, x_k)$ .

No ponto  $x_k$ , colocar-se-á:

$$M_k = S''(x_{k-}) = S''(x_k+) \quad (1.1)$$

Sendo  $S_k(x)$  um polinômio do terceiro grau no intervalo  $(x_{k-1}, x_k)$ , tem-se:

$$S''_k(x) = M_{k-1} \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} + M_k \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \quad (1.2)$$

Integrando-se:

$$S'_k(x) = -M_{k-1} \frac{(x_k - x)^2}{2h_k} + M_k \frac{(x - x_{k-1})^2}{2h_k} + C_1 \quad (1.3)$$

com  $h_k = x_k - x_{k-1}$ .

---

\* Aproximação linear por trechos.



Integrando-se novamente:

$$S_k(x) = M_{k-1} \frac{(x_k - x)^3}{6h_k} + M_k \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h_k} + C_1x + C_2 \quad (1.4)$$

com  $y_k = f(x_k)$  e impondo-se  $S_k(x_{k-1}) = y_{k-1}$ ,  $S_k(x_k) = y_k$ , resultam:

$$C_1 = \frac{(y_k - y_{k-1}) - (M_k - M_{k-1}) h_k^2 / 6}{h_k} \quad (1.5)$$

$$C_2 = \frac{(x_k y_{k-1} - x_{k-1} y_k) - (x_k M_{k-1} - x_{k-1} M_k) h_k^2 / 6}{h_k} \quad (1.6)$$

Levando (1.5) e (1.6) em (1.4), obtém-se, para o intervalo  $(x_{k-1}, x_k)$ :

$$\begin{aligned} S_k(x) &= M_{k-1} \frac{(x_k - x)((x_k - x)^2 - h_k^2)}{6h_k} + \\ &+ M_k \frac{(x - x_{k-1})((x - x_{k-1})^2 - h_k^2)}{6h_k} + \frac{1}{h_k} y_{k-1}(x_k - x) + \\ &+ \frac{1}{h_k} y_k(x - x_{k-1}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Por derivação decorre:

$$S'_k(x) = M_{k-1} \frac{h_k^2 - 3(x_k - x)^2}{6h_k} + M_k \frac{3(x - x_{k-1})^2 - h_k^2}{6h_k} + \frac{1}{h_k} (y_k - y_{k-1}) \quad (1.8)$$

Mantendo-se a continuidade das derivadas sobre o apoio  $x_k$ , isto é,  $S'_k(x_{k-}) = S'_{k+1}(x_{k+})$  resulta:

$$\frac{h_k}{6} M_{k-1} + \frac{h_k + h_{k+1}}{3} M_k + \frac{h_{k+1}}{6} M_{k+1} = \frac{1}{h_{k+1}} (y_{k+1} - y_k) - \frac{1}{h_k} (y_k - y_{k-1}) \quad (1.9)$$

$(k = 1, 2, 3, \dots, n - 1)$ .

Em (1.9) reconhece-se a equação dos três momentos em viga contínua cujos apoios sofreram os deslocamentos verticais  $y_k$ . O spline cúbico  $S(x)$  coincide, portanto, com a linha elástica de viga contínua, com apoios situados nos pontos de partição  $x_k$ , sujeita a deslocamentos de apoios iguais aos valores  $y_k$ .\*

Em (1.9) há  $(n-1)$  equações para as  $(n+1)$  incógnitas  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ . Há necessidade de duas condições adicionais; estas condições auxiliares caracterizarão diferentes splines para interpolação e formarão, junto com (1.9), um sistema tridiagonal, de equações lineares, para as incógnitas  $M_k$ .

\* Com a ressalva de que (1.9) vale para quaisquer deslocamentos  $y_k$ , mantendo-se  $h_k = x_k - x_{k-1}$ .



## 2. Diferentes Tipos de Splines Cúbicos

Nas aplicações, de acordo com as condições auxiliares impostas, distinguem-se os seguintes splines:

### a) Spline natural generalizado

Neste caso, conhecem-se  $M_0$  e  $M_n$ , resolve-se o sistema tridiagonal (1.9), desde  $M_1$  até  $M_{n-1}$ , colocando-se  $M_0$  e  $M_n$  nos segundos membros da primeira e última equações, respectivamente.

Reserva-se a denominação spline natural para o caso particular em que são impostos  $M_0 = M_n = 0$ .

### b) Spline sem discontinuidade para $S'''(x)$ nos pontos $x_1$ e $x_{n-1}$ .

No modelo da viga contínua, equivale impor reações nulas nos apoios  $x_1$  e  $x_{n-1}$ . As expressões analíticas das diversas condições auxiliares serão fornecidas posteriormente.

### c) Spline completo ou com tangentes extremas fornecidas

Conhecem-se os valores de  $y'_0$  e  $y'_{n-1}$  diretamente ou através de polinômios de interpolação adequados.

### d) Spline com tangentes internas

Fornecem-se  $y'_1$  e  $y'_{n-1}$  através de polinômios de interpolação.

### e) Spline com derivadas terceiras extremas

Conhecem-se  $y'''_0$  e  $y'''_{n-1}$ .

### f) Spline periódico

São condições auxiliares  $M_0 = M_n$  e  $y'_0 = y'_{n-1}$ , além de  $y_0 = y_n$ .

### g) Spline com igualdade de reações

No modelo da viga contínua, igualam-se  $R_1 = R_2$  e  $R_{n-1} = R_{n-2}$ .

### h) Spline paramétrico

Para curva plana, por exemplo,  $y(x)$ , representam-se  $x(t)$  e  $y(t)$  através de splines cúbicos onde a variável independente é o parâmetro  $t$ , sendo  $t$  igual aos comprimentos de arcos acumulados ou, para facilitar, igual aos comprimentos de cordas acumulados.

## 3. Solução do Sistema Tridiagonal de Equações Lineares

De (1.9) obtém-se o sistema de equações lineares:

$$\frac{h_1}{6} M_0 + \frac{h_1 + h_2}{3} M_1 + \frac{h_2}{6} M_2 = \frac{1}{h_2} (y_2 - y_1) - \frac{1}{h_1} (y_1 - y_0) \quad (3.1)$$

$$\frac{h_2}{6} M_1 + \frac{h_2 + h_3}{3} M_2 + \frac{h_3}{6} M_3 = \frac{1}{h_3} (y_3 - y_2) - \frac{1}{h_2} (y_2 - y_1) \quad (3.2)$$



$$\frac{h_3}{6} M_2 + \frac{h_3 + h_4}{3} M_3 + \frac{h_4}{6} M_4 = \frac{1}{h_4} (y_4 - y_3) - \frac{1}{h_3} (y_3 - y_2) \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{n-2}}{6} M_{n-3} + \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} M_{n-2} + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} &= \frac{1}{h_{n-1}} (y_{n-1} - y_{n-2}) - \\ &- \frac{1}{h_{n-2}} (y_{n-2} - y_{n-3}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-2} + \frac{h_{n-1} + h_n}{3} M_{n-1} + \frac{h_n}{6} M_n &= \frac{1}{h_n} (y_n - y_{n-1}) - \\ &- \frac{1}{h_{n-1}} (y_{n-1} - y_{n-2}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Completado com as condições auxiliares, o sistema (1.9) será escrito com a notação abaixo:

$$b_0 M_0 + c_0 M_1 = \ell_0 \quad (3.6)$$

$$a_1 M_0 + b_1 M_1 + c_1 M_2 = \ell_1 \quad (3.7)$$

$$a_2 M_1 + b_2 M_2 + c_2 M_3 = \ell_2 \quad (3.8)$$

$$a_3 M_2 + b_3 M_3 + c_3 M_4 = \ell_3 \quad (3.9)$$

$$a_{n-1} M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} + c_{n-1} M_n = \ell_{n-1} \quad (3.10)$$

$$a_n M_{n-1} + b_n M_n = \ell_n \quad (3.11)$$

É sistema tridiagonal, que se resolve com o algoritmo abaixo.

Definem-se:

$$w_0 = \frac{c_0}{b_0}, \quad w_i = \frac{c_i}{b_i - a_i w_{i-1}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1) \quad (3.12)$$

$$g_0 = \frac{\ell_0}{b_0}, \quad g_i = \frac{\ell_i - a_i g_{i-1}}{b_i - a_i w_{i-1}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (3.13)$$

vindo a solução:

$$M_n = g_n \quad (3.14)$$

e

$$M_i = g_i - w_i M_{i+1} \quad (i = n-1, n-2, \dots, 0) \quad (3.15)$$

#### 4. Condições Auxiliares para os Diferentes Splines Cúbicos

a) Para o spline natural generalizado

Em (3.1) e (3.5), deslocam-se os valores conhecidos  $M_0 = y''_0$  e  $M_n = y''_n$  para os segundos membros e resolve-se o sistema



tridiagonal, para incógnitas desde  $M_1$  até  $M_{n-1}$ , com adaptações das expressões de (3.12) a (3.15).

b) Spline sem discontinuidade para  $S'''(x)$  nos pontos  $x_1$  e  $x_{n-1}$ .

Impõe-se  $S'''(x_1^+) - S'''(x_1^-) = 0$  ou  $(M_2 - M_1)/h_2 = (M_1 - M_0)/h_1$  e também

$$S'''(x_{n-1}^+) - S'''(x_{n-1}^-) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{M_n - M_{n-1}}{h_n} = \frac{M_{n-1} - M_{n-2}}{h_{n-1}}$$

virão

$$M_0 = M_1 + \frac{h_1}{h_2} (M_1 - M_2) \quad (4.1)$$

$$M_n = M_{n-1} + \frac{h_n}{h_{n-1}} (M_{n-1} - M_{n-2}) \quad (4.2)$$

Substituindo-se o valor acima de  $M_0$  em (3.1), após simplificações encontra-se:

$$M_1 (h_1 + 2h_2) + M_2 (h_2 - h_1) = \frac{6}{h_1 + h_2} \left\{ (y_2 - y_1) - \frac{h_2}{h} (y_1 - y_0) \right\} \quad (4.3)$$

Da mesma forma, levando-se o valor de  $M_n$  em (3.5), encontra-se:

$$\begin{aligned} M_{n-2} (h_{n-1} - h_n) + M_{n-1} (h_n + 2h_{n-1}) &= \\ = \frac{6}{h_{n-1} + h_n} \cdot \left\{ \frac{h_{n-1}}{h_n} (y_n - y_{n-1}) - (y_{n-1} - y_{n-2}) \right\} & \end{aligned} \quad (4.4)$$

Resolve-se novamente o sistema tridiagonal, desde  $M_1$  até  $M_{n-1}$ , obtendo-se em seguida  $M_0$  e  $M_n$  com (4.1) e (4.2), respectivamente.

c) Spline completo, com tangentes extremas fornecidas

Conhecem-se  $f'(x_0)$  e  $f'(x_n)$ , diretamente ou através de polinômios de interpolação.

De

$$S'_1(x_0) = f'(x_0) = -\frac{h_1}{3} M_0 - \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{1}{h_1} (y_1 - y_0) \quad (4.5)$$

obtém-se a primeira condição auxiliar:

$$M_0 \frac{h_1}{3} + M_1 \frac{h_1}{6} = \frac{1}{h_1} (y_1 - y_0) - f'(x_0) \quad (4.6)$$

De maneira, análoga, com

$$S'_n(x_n) = f'(x_n) = \frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{h_n}{3} M_n + \frac{1}{h_n} (y_n - y_{n-1}) \quad (4.7)$$

acrescenta-se ao sistema de equações a expressão:



$$\frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{h_n}{3} M_n = f'(x_n) - \frac{1}{h_n} (y_n - y_{n-1}) \quad (4.8)$$

Resolve-se o sistema tridiagonal completo, com incógnitas desde  $M_0$  até  $M_n$ , a partir do algoritmo já fornecido. Se  $y'_0$  e  $y'_n$  forem obtidos por polinômios de interpolação de quarto grau, com pontos de colocação em  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}$  e  $x_n$ , espaçados de  $h$ , adotam-se as expressões abaixo:

$$y'_0 = f'(x_0) = \frac{1}{12h_1} (-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) \quad (4.9)$$

$$y'_n = f'(x_n) = \frac{1}{12h_n} (25y_n - 48y_{n-1} + 36y_{n-2} - 16y_{n-3} + 3y_{n-4}) \quad (4.10)$$

Havendo pontos adicionais A, B, C e D, junto às extremidades, de modo que:

$$x_A = \frac{x_0 + x_1}{2}; \quad x_B = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad x_C = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2};$$

$$x_D = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$$

podem-se adotar:

$$y'_0 = f'(x_0) = \frac{1}{6h_1} (-25y_0 + 48y_A - 36y_1 + 16y_B - 3y_2) \quad (4.11)$$

$$y'_n = f'(x_n) = \frac{1}{6h_n} (3y_{n-2} - 16y_C + 36y_{n-1} - 48y_D + 25y_n) \quad (4.12)$$

Observar que a exigência de pontos igualmente espaçados pode ficar restrita aos extremos, onde se adotaram polinômios de interpolação de quarto grau.

d) Spline com tangentes internas  $y'_1$  e  $y'_{n-1}$

As duas novas condições que se incorporam formando o sistema tridiagonal são obtidas do seguinte modo:

O valor da tangente  $S'_1(x_1) = f'(x_1)$  coincide com  $P'_4(x_1)$  onde  $P_4(x)$  é o polinômio de quarto grau com pontos de colocação em  $x_0, A, x_1, B$  e  $x_2$ . O valor da tangente  $S'_{n-1}(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})$  é fornecido por  $P'_4(x_{n-1})$ , onde agora o polinômio de quarto grau utiliza os pontos de colocação  $x_{n-2}, C, x_{n-1}, D$  e  $x_n$ .

Com  $x_A = \frac{x_0 + x_1}{2}; \quad x_B = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad x_C = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$  e

$$x_D = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, \quad \text{sendo}$$



$h_1 = (x_1 - x_0) = (x_2 - x_1)$  e  $h_n = (x_{n-1} - x_{n-2}) = (x_n - x_{n-1})$ ,  
a derivada  $f'(x_1)$  que se fixará vale:

$$S'_1(x_1) = f'(x_1) = \frac{1}{6h_1} \left\{ f(x_0) - 8f(x_A) + 8f(x_B) - f(x_2) \right\} \quad (4.13)$$

De maneira análoga, o valor da tangente  $S'_n(x_{n-1})$  será feito igual a:

$$S'_n(x_{n-1}) = f'(x_{n-1}) = \frac{1}{6h_n} \left\{ 8f(x_D) - 8f(x_C) - f(x_n) + f(x_{n-2}) \right\} \quad (4.14)$$

Pelo spline  $S_1(x)$ , no primeiro subintervalo, tem-se:

$$S'_1(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h_1} + \frac{h_1}{6} M_0 + \frac{h_1}{3} M_1 \quad (4.15)$$

que, substituída em (4.13), fornece:

$$\frac{h_1}{6} M_0 + \frac{h_1}{3} M_1 = \frac{1}{6h_1} \left\{ 7f(x_0) - 8f(x_A) - 6f(x_1) + 8f(x_B) - f(x_2) \right\} \quad (4.16)$$

Pelo spline  $S_n(x)$ , no último subintervalo, tem-se:

$$S'_n(x_{n-1}) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{h_n}{3} M_{n-1} - \frac{h_n}{6} M_n \quad (4.17)$$

que, juntamente com (4.14), fornece:

$$\frac{h_n}{3} M_{n-1} + \frac{h_n}{6} M_n = \frac{1}{6h_n} \left\{ 7f(x_n) - 6f(x_{n-1}) - 8f(x_D) + 8f(x_C) - f(x_{n-2}) \right\} \quad (4.18)$$

e) Spline com derivadas terceiras  $y''_0$  e  $y''_n$  conhecidas

De  $S''_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{h_k}$

virão:  $y''_0 = \frac{M_1 - M_0}{h_1}$  e  $y''_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{h_n}$

onde:

$$M_0 = M_1 - h_1 y''_0 \quad (4.19)$$

e:

$$M_n = M_{n-1} + h_n y''_n \quad (4.20)$$

Eliminando-se  $M_0$  em (3.1), virá:



$$\frac{3h_1 + 2h_2}{6} M_1 + \frac{h_2}{6} M_2 = \frac{1}{h_2} (y_2 - y_1) - \frac{1}{h_1} (y_1 - y_0) + \frac{h_1^2}{6} y_0''' \quad (4.21)$$

Eliminando-se também  $M_n$ , com (4.20) em (3.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-2} + \frac{3h_n + 2h_{n-1}}{6} M_{n-1} &= \frac{1}{h_n} (y_n - y_{n-1}) - \\ &- \frac{1}{h_{n-1}} (y_{n-1} - y_{n-2}) - \frac{h_n^2 y_n'''}{6} \end{aligned} \quad (4.22)$$

(4.21) e (4.22) serão a primeira e a última equações, respectivamente, no sistema tridiagonal para as incógnitas  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ . Após a obtenção de  $M_1$  e  $M_{n-1}$ , utilizam-se (4.19) e (4.20) para  $M_0$  e  $M_n$ .

f) Spline periódico

Neste caso, além da condição obrigatória  $y_0 = y_n$ , utilizam-se as condições auxiliares  $S'_0 = S'_n$  e  $S''_0 = S''_n$ .

A rotação anti-horária no ponto  $x_0$  vale:

$$S'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{3} M_0 - \frac{h_1}{6} M_1 \quad (4.23)$$

A rotação anti-horária no ponto  $x_n$  escreve-se:

$$S'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{h_n}{3} M_n \quad (4.24)$$

A equação (3.1), com  $M_0 = M_n$ , passa a ser:

$$2(h_1 + h_2) M_1 + h_2 M_2 + h_1 M_n = \frac{6}{h_2} (y_2 - y_1) - \frac{6}{h_1} (y_1 - y_0) \quad (4.25)$$

Da igualdade de (4.23) e (4.24), com  $M_0 = M_n$ , decorre:

$$\begin{aligned} h_1 M_1 + h_n M_{n-1} + 2(h_n + h_1) M_n &= \frac{6}{h_1} (y_1 - y_0) - \\ &- \frac{6}{h_n} (y_n - y_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

As equações (4.25) e (4.26), juntamente com (3.2) a (3.4), formarão um sistema tridiagonal cíclico, pois na primeira equação aparecem  $M_1, M_2$  e  $M_n$ , enquanto que na última equação aparecem  $M_1, M_{n-1}$  e  $M_n$ . Tal sistema tridiagonal cíclico resolve-se com algoritmo específico. Ver referências (1) e (33).

g) Spline com igualdade de reações,  $R_1 = R_2$  e  $R_{n-2} = R_{n-1}$ .

As duas condições auxiliares deduzem-se conforme abaixo.

Para  $h_1 = h_2 = h$ , a reação no apoio  $x_1$ ,  $R_1$  valerá:



$$h R_1 = M_0 - 2M_1 + M_2$$

Para o apoio  $x_2$ , com  $h_2 = h_3 = h$ ,

$$h R_2 = M_1 - 2M_2 + M_3$$

Da igualdade  $R_1 = R_2$ , obtém-se:

$$M_0 - 3M_1 + 3M_2 - M_3 = 0 \quad (4.27)$$

De maneira equivalente, a igualdade  $R_{n-2} = R_{n-1}$  fornece:

$$M_{n-3} - 3M_{n-2} + 3M_{n-1} - M_n = 0 \quad (4.28)$$

Eliminando-se  $M_1$  e  $M_3$ , em (4.27), com a utilização de (3.1) e (3.2), obtém-se:

$$M_0 + 5M_1 = \frac{1}{h^2} (7y_0 - 15y_1 + 9y_2 - y_3) \quad (4.29)$$

Com a eliminação de  $M_{n-2}$  e  $M_{n-3}$ , em (4.28) através de (3.4) e (3.5), consegue-se:

$$5M_{n-1} + M_n = \frac{1}{h^2} (7y_n - 15y_{n-1} + 9y_{n-2} - y_{n-3}) \quad (4.30)$$

(4.29) e (4.30) são as duas condições auxiliares que permitem completar o sistema tridiagonal para as incógnitas  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ . Observar que nas condições acima exigiu-se espaçamento uniforme entre os nós.

#### h) Spline paramétrico

Para a representação de curva plana ou a três dimensões, desenvolvem-se em splines cúbicos as coordenadas  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ , adotando-se como variável independente o parâmetro  $t$  igual aos comprimentos de arcos acumulados ao longo da curva que se representa. Ao invés de comprimentos de arcos, acumulam-se comprimentos de cordas. Para curva plana, por exemplo, de coordenadas  $(x, y)$ , definem-se:

$$t_{i+1} = t_i + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \\ (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad \text{com } t_0 = 0.$$

A partir dos valores  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , determina-se o spline cúbico  $x(t)$ , para os subintervalos  $h_i = (t_i - t_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . De maneira análoga, a partir dos valores correspondentes  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  determina-se o spline cúbico para a ordenada  $y(t)$ .

#### 5. Coeficientes para o Spline Cúbico e sua Avaliação em Cada Subintervalo

Para o intervalo  $(x_{k-1}, x_k)$ , o spline cúbico escrever-se-á:

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 \quad (5.1)$$

onde:



$$a_k = f(x_{k-1}) = y_{k-1} \quad (5.2)$$

$$b_k = S'_k(x_{k-1}) \quad (5.3)$$

$$c_k = 0,5S''(x_{k-1}) = 0,5M_{k-1} \quad (5.4)$$

$$d_k = \frac{1}{6} S'''_k \quad (5.5)$$

ou ainda em função da solução obtida para os  $M_k$ :

$$a_k = y_{k-1} \quad (5.6)$$

$$b_k = S'_k(x_{k-1}) = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} - \frac{h_k(M_{k-1} + 0,5M_k)}{3} \quad (5.7)$$

$$c_k = 0,5M_{k-1} \quad (5.8)$$

$$d_k = \frac{M_k - M_{k-1}}{6h_k} \quad (5.9)$$

com  $h_k = (x_k - x_{k-1})$ .

No nó  $x_k$ , a discontinuidade da derivada terceira valerá:

$$S'''_{k+1}(x_k^+) - S'''_k(x_k^-) = 6(d_{k+1} - d_k) \quad (5.10)$$

sendo equivalente à reação de apoio no ponto  $x_k$ , no modelo de viga contínua.

Para o cálculo do valor numérico do spline cúbico no ponto  $\bar{x}$ , com  $x_{k-1} \leq \bar{x} \leq x_k$ , convém utilizar a expressão abaixo:

$$S_k(\bar{x}) = a_k + (\bar{x} - x_{k-1}) \left[ b_k + (\bar{x} - x_{k-1})(c_k + d_k(\bar{x} - x_{k-1})) \right] \quad (5.11)$$

Havendo grande número de pontos  $x_i$  e devendo-se calcular  $S(x)$  para diversos  $\bar{x}$ , é recomendável desenvolver-se programa que localize de maneira eficiente o intervalo onde se encontra determinado  $x$ , para, em seguida, adotar-se o polinômio cúbico  $S(x)$  correspondente.

## 6. Estimativas de erros, na interpolação pelo spline cúbico, para a função $f(x)$ e suas derivadas

Nas estimativas de erros, abaixo discriminadas, serão utilizadas normas uniformes para funções e vetores, com as designações:

Para a função  $f(x)$

$$\| f \| = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} | f(x) | \quad (6.1)$$

Para o vetor  $\vec{A}$  de componentes  $A_i$

$$\| \vec{A} \|_i = \max_i | A_i | \quad (6.2)$$



Usar-se-ão também as seguintes notações:\*

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (6.3)$$

$$\bar{h} = \max_i h_i \quad (6.4)$$

$$\underline{h} = \min_i h_i \quad (6.5)$$

$$\beta = \bar{h}/\underline{h} \quad (6.6)$$

$$\| y^{(4)} \| = M_4 ; \quad \| y^{(5)} \| = M_5 \quad (6.7)$$

De acordo com Hall e Meyer, 1976, para os splines completo e natural generalizado que interpolam a função  $f(x)$  valem as aproximações:

$$\| f - S \| \leq \frac{5}{384} \bar{h}^4 M_4 \quad (6.8)$$

$$\| f' - S' \| \leq \frac{1}{24} \bar{h}^3 M_4 \quad (6.9)$$

$$\| f'' - S'' \| \leq \frac{3}{8} \bar{h}^2 M_4 \quad (6.10)$$

$$\| f''' - S''' \| \leq \frac{\beta + 1/\beta}{2} \bar{h} M_4 \quad (6.11)$$

No segundo membro da primeira estimativa de erro, reconhece-se, conforme comentário anterior, o deslocamento no meio da viga isostática, biapoiada, de vão  $\bar{h}$  sob a carga uniforme  $p = \|f^{(4)}(x)\| = M_4$ , não considerada pelo spline cúbico, pois  $S^{(4)}(x) = 0$  em cada tramo  $h_i$ .

No segundo membro da estimativa de erro para  $f'(x)$ , identifica-se a rotação nos apoios para a mesma viga isostática, de vão  $\bar{h}$ , sob a carga uniforme mencionada.

Para o vetor  $(\vec{f}' - \vec{S}')$ , erro na derivada primeira nos pontos nodais, com componentes  $(f'_i - S'_i)$ , de acordo com Kershaw, 1972, para os splines cúbicos completo e periódico vale:

$$\begin{aligned} \| \vec{f}' - \vec{S}' \| = \max_i | f'_i - S'_i | &\leq \frac{1}{24} \bar{h}^2 \max_i | h_{i-1} - h_i | M_4 + \\ &+ \frac{1}{60} \bar{h}^4 M_5 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Para o caso de espaçamento uniforme  $h_i = h$ , obtém-se:

$$\| \vec{f}' - \vec{S}' \| \leq \frac{1}{60} h^4 M_5 \quad (6.13)$$

\* De preferência conservam-se, em cada item, na medida do possível, as notações dos trabalhos citados.



Isto é, a ordem de aproximação é  $O(h^4)$  para a derivada primeira nos pontos nodais. Tal fato torna o spline cúbico recomendável para a diferenciação numérica de  $f(x)$ .

Ainda de acordo com Kershaw, os erros  $|f'_i - S'_i|$  para o spline natural generalizado são superiores ao valor acima, e para recuperar-se a ordem de aproximação será necessário tornar o primeiro e o último intervalos  $h_1$  e  $h_n$  suficientemente pequenos. Para o spline cúbico completo, valem ainda as seguintes estimativas:

$$\|f - S\| \leq 2,5\bar{h} \|f'\| \quad (6.14)$$

$$\|S''\| \leq 3 \|f''\| \quad (6.15)$$

A melhor ordem de aproximação que se pode conseguir pelo spline cúbico é:

$$\|f - S\| = O(\bar{h}^4) \quad (6.16)$$

Tal ordem é obtida, por exemplo, nos splines completo ou natural generalizado e sob condições que se examinarão nos itens 7, 8 e 9. Para o spline natural, com  $S''_0 = S''_n = 0$  não correspondendo à realidade, não se consegue convergência uniforme, da ordem de  $O(\bar{h}^4)$  em  $(a, b)$ .

## 7. Condições de Extremidades para o Spline Cúbico com Nós Igualmente Espaçados, Splines E( $\alpha$ )

Em 1979, G. H. Behforooz e N. Papamichael apresentam condições de extremidades, para nós igualmente espaçados, condições que só dependem dos valores  $f(x_i) = y(x_i)$  e que dão origem a splines cúbicos com ordem de aproximação  $O(h^4)$ . Inicialmente, para  $y(x)$  em  $C^4(a, b)^*$  com  $x$  em  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , apresentam, para nós igualmente espaçados, as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} |y(x) - S(x)| &\leq \frac{h}{4} \max \{ |S'_i - y'_i|, |S'_{i-1} - y'_{i-1}| \} + \\ &+ \frac{1}{384} h^4 M_4 \quad \text{com } M_4 = \|y^{(4)}\| \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$|y'(x) - S'(x)| \leq \max \{ |S'_i - y'_i|, |S'_{i-1} - y'_{i-1}| \} + \frac{\sqrt{3}}{216} h^3 M_4 \quad (7.2)$$

$$|y''(x) - S''(x)| \leq \frac{6}{h} \max \{ |S'_i - y'_i|, |S'_{i-1} - y'_{i-1}| \} + \frac{1}{12} h^2 M_4 \quad (7.3)$$

$$|y'''(x) - S'''(x)| \leq \frac{12}{h^2} \max \{ |S'_i - y'_i|, |S'_{i-1} - y'_{i-1}| \} + \frac{1}{2} h M_4 \quad (7.4)$$

As expressões acima são úteis para estimativas de erros na interpolação cúbica de Hermite  $H(x)$ , no lugar de  $S(x)$ , bastando colocar

$$S'_i = y'_i \quad \text{e} \quad S'_{i-1} = y'_{i-1} .$$

---

\* Coloca-se  $y(x)$  em  $C^m(a, b)$  significando  $y(x) \in C^m(a, b)$ , em todo o texto.



Em seguida, para os denominados splines  $E(\alpha)$ , procuram condições de extremidades sob a forma:

$$S'_0 + \alpha S'_1 = \frac{1}{h} (\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3) \quad (7.5)$$

$$\alpha S'_{n-1} + S'_n = -\frac{1}{h} (\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} + \alpha_3 y_{n-3}) \quad (7.6)$$

de modo que se obtenha a ordem de convergência  $\|y - S\| = O(h^4)$ , sendo incógnitas  $\alpha, \alpha_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ).

Finalmente, concluem:

Seja  $S(x)$  um spline cúbico de interpolação que coincide com  $y(x)$  em  $C^5(a, b)$  em pontos igualmente espaçados e que satisfaça as condições acima, onde  $\alpha < 11/3$  ou  $\alpha > 19/5$ , com  $n \geq 5$ , então:

$$\text{somente se } \|y^{(r)} - S^{(r)}\| = O(h^{4-r}) \quad (r = 0, 1, 2, 3) \quad (7.7)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{6} (-2\alpha - 11), \quad \alpha_1 = \frac{1}{6} (-3\alpha + 18) \quad (7.8)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{6} (6\alpha - 9), \quad \alpha_3 = \frac{1}{6} (-\alpha + 2) \quad (7.9)$$

Para qualquer valor de  $\alpha$  no domínio indicado existe e é único o spline  $E(\alpha)$ , com as ordens de convergência indicadas.

Há, portanto, uma infinidade de condições que permitem a obtenção de  $\|f - S\| = O(h^4)$ .

As condições de extremidades para os splines  $E(\alpha)$  podem ser colocadas sob diversas formas equivalentes.

Numa primeira forma:

$$S'_0 + \alpha S'_1 = p'_0(x_0) + \alpha p'_0(x_1) \quad (7.10)$$

$$\alpha S'_{n-1} + S'_n = \alpha p'_{n-3}(x_{n-1}) + p'_{n-3}(x_n) \quad (7.11)$$

onde  $p_0(x)$  é o polinômio cúbico com valores  $y_0, y_1, y_2$  e  $y_3$  nos pontos  $x_0, x_1, x_2$  e  $x_3$ , e  $p_{n-3}(x)$  é o polinômio cúbico com valores  $y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}$  e  $y_n$  nos pontos  $x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}$  e  $x_n$ .

Para  $\alpha \rightarrow \infty$ , o spline  $E(\alpha)$  corresponde a:

$$S'_1 = p'_0(x_1) \quad (7.12)$$

$$S'_{n-1} = p'_{n-3}(x_{n-1}) \quad (7.13)$$

isto é, fixam-se valores das derivadas primeiras no segundo e no penúltimo nós.

Numa segunda forma, as condições de extremidades podem ser escritas:



$$(2 - \alpha) \Delta^3 M_0 + (9 - 3\alpha) \Delta^2 M_0 = 0 \quad (7.14)$$

$$(2 - \alpha) \nabla^3 M_n - (9 - 3\alpha) \nabla^2 M_n = 0 \quad (7.15)$$

onde aparecem diferenças de segunda e terceira ordens, ascendentes e descendentes.

Em particular, para  $\alpha = 2$ , obtém-se:

$$\Delta^2 M_0 = 0 \quad (7.16)$$

$$\nabla^2 M_n = 0 \quad (7.17)$$

Numa terceira forma, as condições de extremidades podem ser escritas

$$(7 - 2\alpha) d_1 = (\alpha - 2) d_2 \quad (7.18)$$

$$(7 - 2\alpha) d_{n-1} = (\alpha - 2) d_{n-2} \quad (7.19)$$

onde  $d_i = S'''(x_{i+}) - S'''(x_{i-})$ , isto é, discontinuidade da derivada terceira no ponto  $x_i$  o que equivale à reação de apoio  $R_i$ , no modelo da viga contínua.

Com  $\alpha = 2$ , para o spline  $E(\alpha)$  equivale a exigir:

$$d_1 = 0 \quad (7.20)$$

$$d_{n-1} = 0 \quad (7.21)$$

Isto é, eliminam-se as discontinuidades de  $S'''(x)$  nos pontos  $x_1$  e  $x_{n-1}$  ou, de maneira equivalente, são impostos  $R_1 = R_{n-1} = 0$ , no modelo da viga contínua, dando interpretações a (7.16) e (7.17).

Para  $\alpha = 3,0$ , obtém-se o melhor dos  $E(\alpha)*$  com o significado:

$$d_1 = d_2 \quad \text{ou} \quad R_1 = R_2 \quad (7.22)$$

$$d_{n-1} = d_{n-2} \quad \text{ou} \quad R_{n-1} = R_{n-2} \quad (7.23)$$

no modelo da viga contínua, igualam-se os valores das reações de apoio em  $x_1$ ,  $x_2$  e também em  $x_{n-1}$ ,  $x_{n-2}$ .

Finalmente, sob uma quarta forma, útil para estabelecer a primeira e a última equações do sistema tridiagonal, as condições de extremidades podem ser colocadas:

$$(\alpha - 2) M_0 + (2\alpha - 1) M_1 = (\alpha - 2) p_0''(x_0) + (2\alpha - 1) p_1''(x_1) \quad (7.24)$$

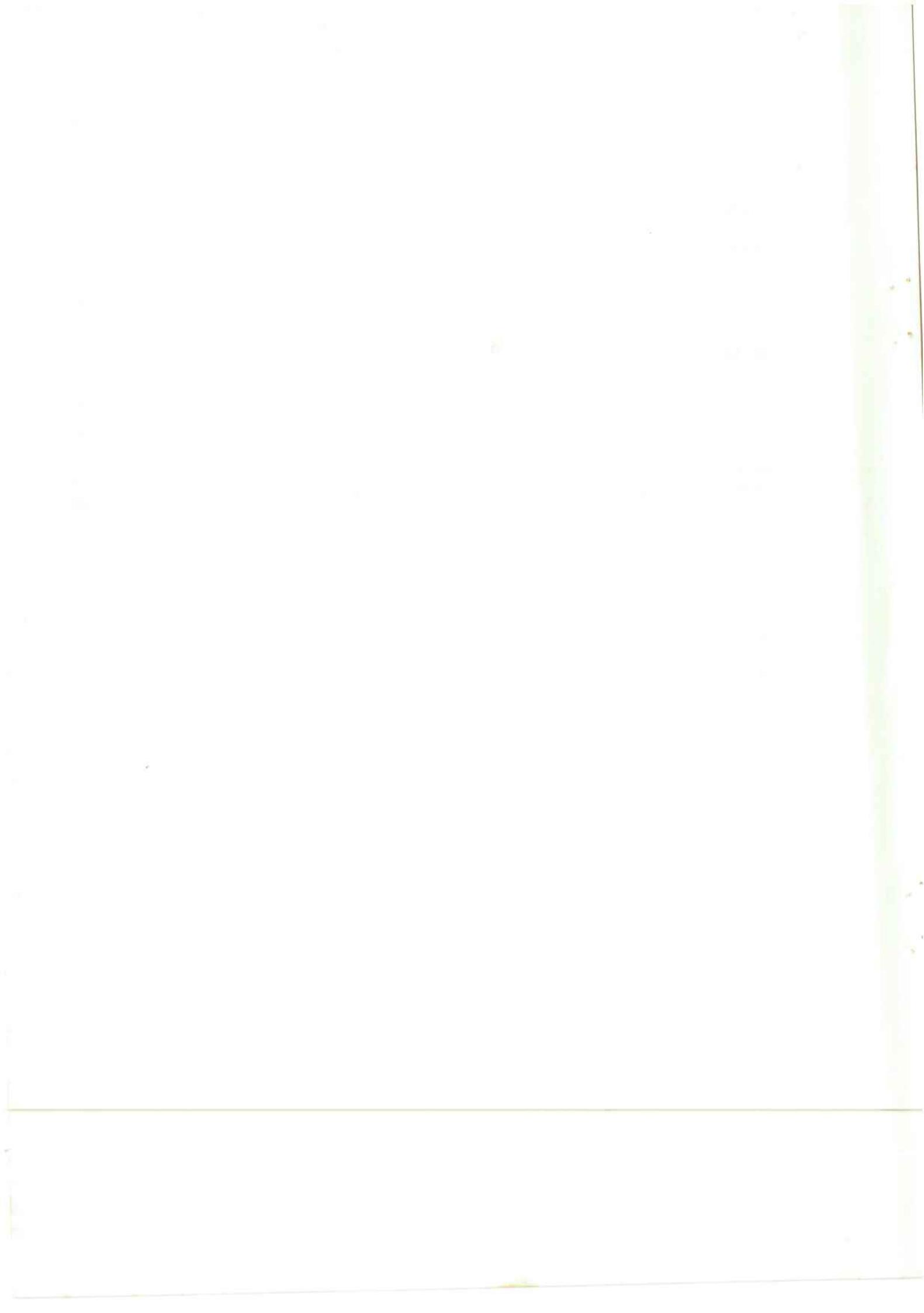
$$(2\alpha - 1) M_{n-1} + (\alpha - 2) M_n = (2\alpha - 1) p_{n-3}''(x_{n-1}) + (\alpha - 2) p_n''(x_n) \quad (7.25)$$

pelas expressões acima, para  $\alpha = 0,5$ , por exemplo, obtém-se:

$$M_0 = p_0''(x_0) \quad (7.26)$$

$$M_n = p_{n-3}''(x_n) \quad (7.27)$$

\* Veja-se referência 2, pág. 362.



sendo condições para o spline natural generalizado, com derivadas segundas obtidas por polinômios cúbicos de interpolação.

### 8. Condições de Extremidades para o Spline Cúbico com Nós com Espaçamentos Quaisquer, Splines $E(\alpha_0, \alpha_n)$

Num segundo trabalho, G. H. Behforooz e N. Papamichael, através dos chamados splines cúbicos  $E(\alpha_0, \alpha_n)$ , procuram generalizar os resultados conseguidos pelos splines  $E(\alpha)$  referentes a nós igualmente espaçados.

Para os splines  $E(\alpha_0, \alpha_n)$ , procuram-se condições de extremidades sob a forma:

$$S'_0 + \alpha_0 S'_1 = \frac{1}{h_2} (a_{00} y_0 + a_{10} y_1 + a_{20} y_2 + a_{30} y_3) \quad (8.1)$$

$$\alpha_n S'_{n-1} + S'_n = -\frac{1}{h_n} (a_{0n} y_n + a_{1n} y_{n-1} + a_{2n} y_{n-2} + a_{3n} y_{n-3}) \quad (8.2)$$

de modo que, para nós desigualmente espaçados, ainda se consiga:

$$\| y^{(r)} - S^{(r)} \| = O(h^{4-r}) \quad (r = 0, 1, 2, 3) \quad (8.3)$$

São impostas as seguintes restrições:

$$y(x) \text{ em } C^5 (a, b), \quad n \geq 5$$

$h_2/h_1, h_3/h_1$  e  $h_{n-2}/h_n, h_{n-1}/h_n$ , permaneçam constantes quando  $h \rightarrow 0$ .

Adotam-se a seguir as notações adicionais:

$$q_0 = \frac{h_1 + h_2}{h_1}, \quad r_0 = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{h_1} \quad (8.4)$$

$$q_n = \frac{h_{n-1} + h_n}{h_n}; \quad r_n = \frac{h_{n-2} + h_{n-1} + h_n}{h_n} \quad (8.5)$$

Para que haja solução única, exigem-se agora domínios para  $\alpha_0$  e  $\alpha_n$  conforme abaixo:

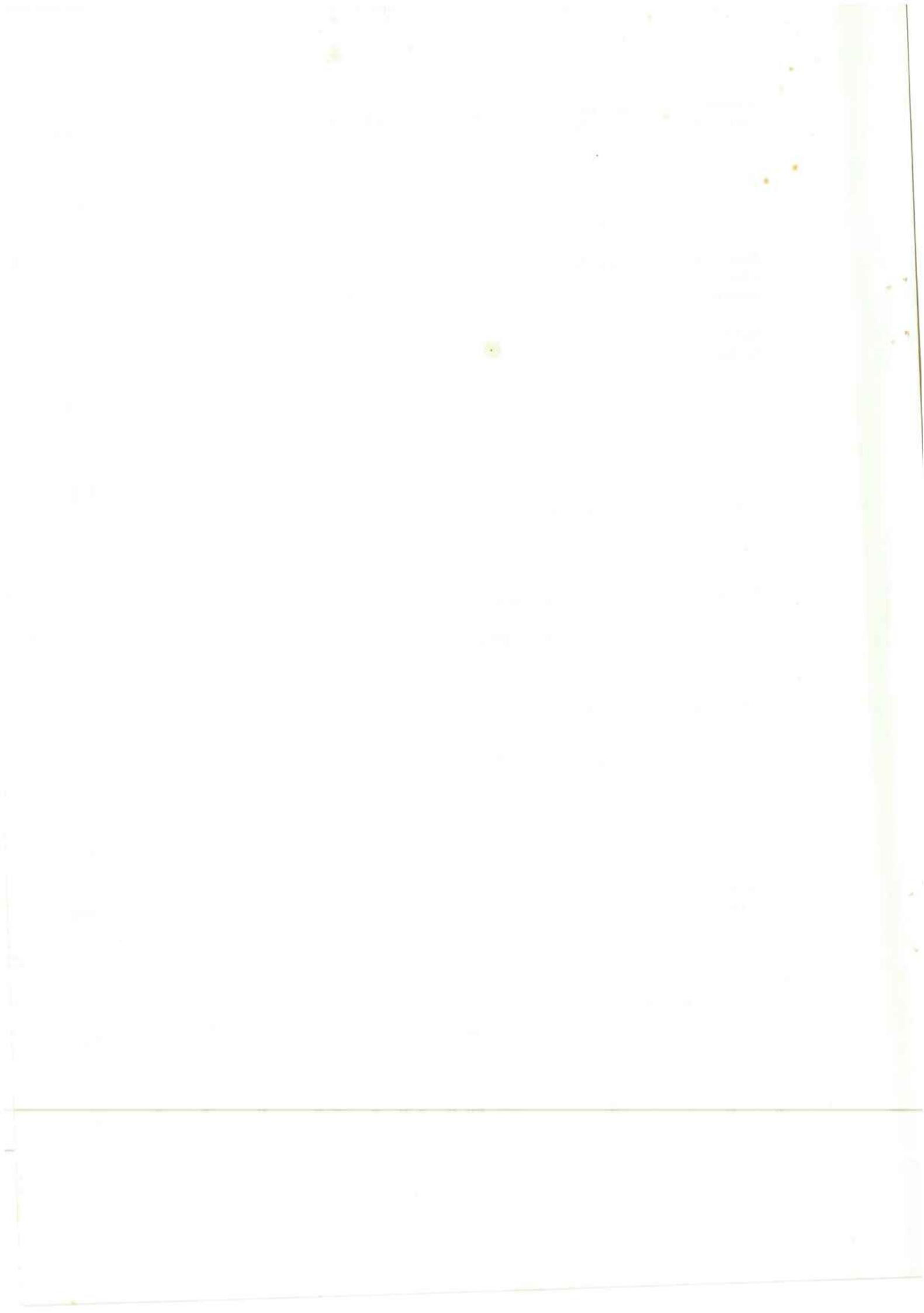
$$\alpha_j < c_j \quad ; \quad \alpha_j > d_j \quad (j = 0, n) \quad (8.6)$$

isto é:

$$\alpha_0 < c_0 = \frac{4q_0 r_0 - 2q_0^2 - q_0 - r_0}{(q_0 - 1)(2r_0 - q_0 - 1)} \text{ ou } \alpha_0 > d_0 = \frac{4q_0 r_0 + 2q_0^2 - 5q_0 - r_0}{(q_0 - 1)(2r_0 + q_0 - 3)} \quad (8.7)$$

$$\alpha_n < c_n = \frac{4q_n r_n - 2q_n^2 - q_n - r_n}{(q_n - 1)(2r_n - q_n - 1)} \text{ ou } \alpha_n > d_n = \frac{4q_n r_n + 2q_n^2 - 5q_n - r_n}{(q_n - 1)(2r_n + q_n - 3)} \quad (8.8)$$

Sendo  $S(x)$  o spline cúbico que coincide com  $y(x)$  em  $C^5 (a, b)$  nos nós  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , satisfazendo as condições referentes aos splines  $E(\alpha_0, \alpha_n)$ , com  $\alpha_0$  e  $\alpha_n$  nos domínios já definidos, com restrições já impostas



para  $h_2/h_1$ ,  $h_3/h_1$ ,  $h_{n-1}/h_n$  e  $h_{n-2}/h_n$ , haverá solução única somente se:

$$a_{3j} = \frac{q_j + (1 - q_j)\alpha_j}{r_j(r_j - 1)(r_j - q_j)} \quad (8.9)$$

$$a_{2j} = \frac{r_j + (1 - r_j)\alpha_j}{q_j(q_j - 1)(q_j - r_j)} \quad (8.10)$$

$$a_{1j} = \alpha_j + 1 - q_j \quad a_{2j} = r_j \quad a_{3j} \quad (8.11)$$

$$a_{0j} = -(a_{1j} + a_{2j} + a_{3j}) \quad \text{com } j = 0, n. \quad (8.12)$$

Para nós igualmente espaçados,  $q_j = 2,0$ ,  $r_j = 3,0$  ( $j = 0, n$ ), e se também  $\alpha_0 = \alpha_n = \alpha$ , então os coeficientes acima coincidem com os já deduzidos para o spline  $E(\alpha)$ , isto é:

$$a_{3j} = \frac{1}{6}(-\alpha + 2), \quad a_{2j} = \frac{1}{6}(6\alpha - 9) \quad (8.13)$$

$$a_{1j} = \frac{1}{6}(-3\alpha + 18), \quad a_{0j} = \frac{1}{6}(-2\alpha + 11) \quad (8.14)$$

com  $j = 0, n$ , e as exigências  $\alpha < 11/3$  ou  $\alpha > 19/5$ .

Os splines  $E(\alpha)$  são, portanto, casos particulares dos splines  $E(\alpha_0, \alpha_n)$  onde  $\alpha_0 = \alpha_n = \alpha$  e há espaçamento uniforme entre os nós.

As condições de extremidades para os aplines  $E(\alpha_0, \alpha_n)$  podem ser escritas:

$$S'_0 + \alpha_0 S'_1 = p'_0(x_0) + \alpha_0 p'_0(x_1) \quad (8.15)$$

$$\alpha_n S'_{n-1} + S'_n = \alpha_n p'_{n-3}(x_{n-1}) + p'_{n-3}(x_n) \quad (8.16)$$

onde  $p_0(x)$  é o polinômio cúbico com valores  $y_0, y_1, y_2$  e  $y_3$  nos pontos  $x_0, x_1, x_2$  e  $x_3$  e, da mesma forma,  $p_{n-3}(x)$  é o polinômio cúbico com valores  $y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}$  e  $y_n$  nos pontos  $x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}$  e  $x_n$ , sendo conveniente ressaltar que aqui as interpolações se fazem para pontos sem espaçamento uniforme.

Com  $\alpha_0 = \alpha_n = 0$ , obtém-se o spline  $E(0, 0)$  para o qual

$$S'_0 = p'_0(x_0) \quad (8.17)$$

$$S'_n = p'_{n-3}(x_n) \quad (8.18)$$

é spline do tipo completo mas aproximando-se as derivadas extremas através de derivadas de polinômios de interpolação.

Para  $\alpha_0 = \alpha_n \rightarrow \infty$ , ao spline  $E(\infty, \infty)$  correspondem:



$$S'_1 = p'_0(x_1) \quad (8.19)$$

$$S'_{n-1} = p'_{n-3}(x_{n-1}) \quad (8.20)$$

agora fixam-se, através de interpolações, derivadas nos segundo e penúltimo pontos.

G. H. Behrooz e N. Papamichael comentam em particular quatro splines  $E(\alpha_0, \alpha_n)$ , designados por  $E(\alpha_0^{(1)}, \alpha_n^{(1)})$ , com  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Para o spline  $E(\alpha_0^{(1)}, \alpha_n^{(1)})$ , colocam-se:

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{q_0}{q_0 - 1} \quad ; \quad \alpha_n^{(1)} = \frac{q_n}{q_n - 1} \quad (8.21)$$

vindo as condições de extremidades:

$$S''(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad (8.22)$$

$$S''(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = 0 \quad (8.23)$$

onde  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  denota a diferença dividida de ordem  $n$  com base nos pontos  $x_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

As condições acima equivalem a dizer que  $S'''(x)$  é contínua nos pontos  $x_1$  e  $x_{n-1}$ , isto é, no modelo de viga contínua anulam-se as reações  $R_1$  e  $R_{n-1}$ .

Para nós igualmente espaçados,  $\alpha_0^{(1)} = \alpha_n^{(1)} = 2$ , e recai-se no spline E(2).

Para o spline  $E(\alpha_0^{(2)}, \alpha_n^{(2)})$ , definem-se:

$$\alpha_0^{(2)} = \frac{q_0}{q_0 - 1} + \frac{r_0}{r_0 - 1 + (r_0 - q_0)^2} \quad (8.24)$$

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{q_n}{q_n - 1} + \frac{r_n}{r_n - 1 + (r_n - q_n)^2} \quad (8.25)$$

resultando como condições de extremidades:

$$S''(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (8.26)$$

$$S''(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = 0 \quad (8.27)$$

Quando os nós forem igualmente espaçados,  $\alpha_0^{(2)} = \alpha_n^{(2)} = 3$ , e volta-se ao spline E(3).

Designando por  $d_i$  a discontinuidade da derivada terceira no ponto  $x_i$ , isto é,

$$d_i = S'''(x_{i+}) - S'''(x_{i-})$$

pode-se demonstrar que:

$$d_i = (h_i + h_{i+1}) S''(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$



com  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , o que significa que as reações de apoio, no modelo de viga contínua, para os apoios internos, são proporcionais às diferenças divididas com bases em  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  e  $x_{i+1}$ .

As condições de extremidades para os splines  $E(\alpha_0, \alpha_n)$  podem ser colocadas sob a forma:

$$F_0 d_1 = G_0 d_2 \quad (8.28)$$

$$F_n d_{n-1} = G_n d_{n-2} \quad (8.29)$$

onde

$$F_j = (r_j - 1) \{ r_j (1 - q_j) + (1 - r_j) (q_j - \alpha_j (q_j - 1)) \} \quad (8.30)$$

$$G_j = q_j (r_j - q_j)^2 \{ q_j - \alpha_j (q_j - 1) \} \quad j = 0, n \quad (8.31)$$

isto é, correspondem a relações entre as reações de apoio  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_{n-1}$ ,  $R_{n-2}$ .

Para o spline  $E(\alpha_0^{(3)}, \alpha_n^{(3)})$  definem-se:

$$\alpha_0^{(3)} = \frac{q_0}{q_0 - 1} + \frac{r_0}{r_0 - 1} \quad (8.32)$$

$$\alpha_n^{(3)} = \frac{q_n}{q_n - 1} + \frac{r_n}{r_n - 1} \quad (8.33)$$

e as condições de extremidades expressam que  $S'''(x)$  é contínua nos pontos  $x_2$  e  $x_{n-2}$ , isto é, anulam-se  $d_2 = R_2$  e  $d_{n-2} = R_{n-2}$ .

Finalmente, para o spline  $E(\alpha_0^{(4)}, \alpha_n^{(4)})$ , colocam-se:

$$\alpha_0^{(4)} = \frac{q_0^2(r_0 - q_0)^2 + q_0(r_0 - 1)^2 + r_0(r_0 - 1)(q_0 - 1)}{(q_0 - 1)((r_0 - 1)^2 + q_0(r_0 - q_0)^2)} \quad (8.34)$$

$$\alpha_n^{(4)} = \frac{q_n^2(r_n - q_n)^2 + q_n(r_n - 1)^2 + r_n(r_n - 1)(q_n - 1)}{(q_n - 1)((r_n - 1)^2 + q_n(r_n - q_n)^2)} \quad (8.35)$$

Para o spline  $E(\alpha_0^{(4)}, \alpha_n^{(4)})$  as condições de extremidades significam que  $d_1 = d_2$  e  $d_{n-1} = d_{n-2}$ , isto é, igualam-se as reações de apoio  $R_1 = R_2$  e  $R_{n-1} = R_{n-2}$ , no modelo da viga contínua com tramos desiguais.

Quando os nós forem igualmente espaçados,  $\alpha_0^{(3)} = \alpha_n^{(3)} = 3,5$ , vindo o spline  $E(3,5)$ , por outro lado,  $\alpha_0^{(4)} = \alpha_n^{(4)} = 3,0$ , resultando o spline  $E(3,0)$ .

Os quatro splines acima abordados existem de maneira única para quaisquer distribuições dos nós.



As condições de extremidade para o spline  $E(\alpha_0, \alpha_n)$  podem ser expressas sob a forma abaixo (bastante útil quando se vai resolver o sistema tridiagonal para as incógnitas  $M_i$ ):

$$(\alpha_0 - 2)M_0 + (2\alpha_0 - 1)M_1 = (\alpha_0 - 2) p''_0(x_0) + (2\alpha_0 - 1) p''_0(x_1) \quad (8.36)$$

$$(2\alpha_n - 1)M_{n-1} + (\alpha_n - 2)M_n = (2\alpha_n - 1) p''_{n-3}(x_{n-1}) + (\alpha_n - 2) p''_{n-3}(x_n) \quad (8.37)$$

onde os polinômios  $p_0(x)$  e  $p_{n-3}(x)$  já foram anteriormente definidos.

Para  $\alpha_0 = \alpha_n = 0,5$ , obtém-se o spline  $E(0,5, 0,5)$  com as condições de extremidades:

$$M_0 = p''_0(x_0) \quad (8.38)$$

$$M_n = p''_{n-3}(x_n) \quad (8.39)$$

que correspondem a condições para o spline natural generalizado, mas com derivadas segundas obtidas através de polinômios cúbicos de interpolação.

Para nós igualmente espaçados, com  $\alpha = 3,0$ , obteve-se o melhor dos  $E(\alpha)$ ; para nós com espaçamentos quaisquer, não se pode determinar prontamente o melhor dos  $E(\alpha_0, \alpha_n)$ ; contudo concluem H. G. Behforooz e N. Papamichael que entre todas as condições de extremidades analisadas destacam-se  $E(\alpha_0^{(2)}, \alpha_n^{(2)})$  e  $E(\alpha_0^{(4)}, \alpha_n^{(4)})$  por conduzirem a resultados com melhores aproximações, bastando lembrar-se que ambas recaem no  $E(3)$  quando o espaçamento é uniforme.

## 9. Spline Cúbico com Nós Igualmente Espaçados, Condições de Extremidades que Permitem Obter Melhores Aproximações para as Derivadas de $f(x)$

N. Papamichael e A. J. Worsey, em 1981, estabelecem condições de extremidades e expressões em  $M_i = S''(x_i)$  que conduzem à melhor ordem de aproximação para as derivadas de  $f(x)$ . Admitem-se funções  $f(x)$  de classe  $C^8(a, b)$  e nós igualmente espaçados, na interpolação pelo spline cúbico.

Inicialmente examinam-se condições de extremidades que só contenham valores da função  $f(x_i) = y_i$  sob a forma:

$$\alpha M_0 + \beta M_1 = \frac{1}{h^2} (a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4) \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} \beta M_{n-1} + \alpha M_n = \frac{1}{h^2} (a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + a_3 y_{n-3} + \\ + a_4 y_{n-4}) \end{aligned} \quad (9.2)$$

Para a forma acima, conseguem-se condições de extremidades mais precisas quando  $\alpha = 1$  e  $\beta = 4$ , sendo, neste caso, equivalentes a:

$$\Delta^4 M_0 = 0 \quad (9.3)$$

$$\nabla^4 M_n = 0 \quad (9.4)$$



que se podem transformar em:

$$M_0 + 4M_1 = \frac{1}{6h^2} (37y_0 - 82y_1 + 9y_2 - 10y_3 + y_4) \quad (9.5)$$

$$4M_{n-1} + M_n = \frac{1}{6h^2} (37y_n - 82y_{n-1} + 9y_{n-2} - 10y_{n-3} + y_{n-4}) \quad (9.6)$$

Splines cúbicos sob as condições de extremidades (9.5) e (9.6) oferecem as seguintes ordens de aproximação:

Para a derivada primeira

$$\max_{0 \leq i \leq n} |S'_i - y'_i| = O(h^4) \quad (9.7)$$

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} |S'(x_i + 0,5h) - y'(x_i + 0,5h)| = O(h^4) \quad (9.8)$$

Para a derivada segunda

$$|y''_0 - \frac{1}{12} (14M_0 - 5M_1 + 4M_2 - M_3)| = O(h^4) \quad (9.9)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} |y''_i - \frac{1}{12} (M_{i-1} + 10M_i + M_{i+1})| = O(h^4) \quad (9.10)$$

$$|y''_n - \frac{1}{12} (14M_n - 5M_{n-1} + 4M_{n-2} - M_{n-3})| = O(h^4) \quad (9.11)$$

Para a derivada terceira

$$\max_{2 \leq i \leq n-2} |y'''_i - \frac{1}{24h} (M_{i-2} - 14M_{i-1} + 14M_{i+1} - M_{i+2})| = O(h^3) \quad (9.12)$$

Para a derivada quarta

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} |y^{(4)}_i - \frac{1}{h^2} (M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1})| = O(h^2) \quad (9.13)$$

Em resumo, sob as condições de extremidades (9.5) e (9.6), conseguem-se ordens de aproximação  $O(h^4)$  para  $y$ ,  $y'$  e  $y''$ , com as derivadas calculadas nos pontos nodais  $x_i$  indicados.

Para condições de extremidades que só contenham valores das derivadas primeiras, sob a forma:

$$\tilde{\alpha} S'_0 + \tilde{\beta} S'_1 + \tilde{\gamma} S'_2 = \tilde{b}_0 y'_0 + \tilde{b}_1 y'_1 + \tilde{b}_2 y'_2 \quad (9.14)$$

$$\tilde{\gamma} S'_{n-2} + \tilde{\beta} S'_{n-1} + \tilde{\alpha} S'_n = \tilde{b}_2 y'_{n-2} + \tilde{b}_1 y'_{n-1} + \tilde{b}_0 y'_n \quad (9.15)$$



as mais precisas correspondem a  $\tilde{\alpha} = 1$ ,  $\tilde{\beta} = -2$  e  $\tilde{\gamma} = 1$ , tornando-se então equivalentes a:

$$\Delta^2 S'_0 = \Delta^2 y'_0 \quad (9.16)$$

$$\nabla^2 S'_n = \nabla^2 y'_n \quad (9.17)$$

que podem ainda ser escritas:

$$M_0 + 2M_1 = \frac{1}{h^2} \left\{ 3y_0 - 6y_1 + 3y_2 + h(-y'_0 + 2y'_1 - y'_2) \right\} \quad (9.18)$$

$$2M_{n-1} + M_n = \frac{1}{h^2} \left\{ 3y_n - 6y_{n-1} + 3y_{n-2} + h(y'_n - 2y'_{n-1} + y'_{n-2}) \right\} \quad (9.19)$$

Na dedução de (9.18) e (9.19) utilizaram-se as relações entre  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  com  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\gamma}$ , conforme referência citada, e eliminaram-se  $M_2$  e  $M_{n-2}$  nas expressões obtidas.

Sob as condições de extremidades (9.18) e (9.19), consegue-se ordem de aproximação  $O(h^4)$  até (9.12) inclusive e  $O(h^3)$  em (9.13).

Para obter as mesmas ordens de aproximação, citam os autores do trabalho as seguintes alternativas para as condições de extremidades:

$$M_1 = \frac{1}{72h^2} (185y_0 - 316y_1 + 180y_2 - 32y_3 + 3y_4 + 60h y'_0) \quad (9.20)$$

$$M_{n-1} = \frac{1}{72h^2} (185y_n - 336y_{n-1} + 180y_{n-2} - 32y_{n-3} + 3y_{n-4} - 60h y'_n) \quad (9.21)$$

observando que em (9.20) e (9.21) exigem-se somente  $y'_0$  e  $y'_n$  além dos valores já disponíveis de  $y_i$ .

Como segunda alternativa:

$$144M_0 + 876M_1 = \frac{1}{h^2} (1313y_0 - 2888y_1 + 1866y_2 - 320y_3 + 29y_4 - 60h^2 y''_0) \quad (9.22)$$

$$876M_{n-1} + 144 M_n = \frac{1}{h^2} (1313y_n - 2888y_{n-1} + 1866y_{n-2} - 320y_{n-3} + 29y_{n-4} - 60h^2 y''_n) \quad (9.23)$$

onde, em (9.22) e (9.23), são exigências adicionais somente  $y''_0$  e  $y''_n$ .

Para condições de extremidades que só contenham derivadas segundas, sob a forma:

$$\alpha M_0 + \beta M_1 + \gamma M_2 = c_0 y''_0 + c_1 y''_1 + c_2 y''_2 \quad (9.24)$$

$$\gamma M_{n-2} + \beta M_{n-1} + \alpha M_n = c_2 y''_{n-2} + c_1 y''_{n-1} + c_0 y''_n \quad (9.25)$$



são mais precisas as obtidas com  $\alpha = \gamma = 7$  e  $\beta = 46$ , vindo:

$$7M_0 + 46M_1 + 7M_2 = 2y''_0 + 56y''_1 + 2y''_2 \quad (9.26)$$

$$7M_{n-2} + 46M_{n-1} + 7M_n = 2y''_{n-2} + 56y''_{n-1} + 2y''_n \quad (9.27)$$

Eliminando-se  $M_2$  e  $M_{n-2}$  de (9.26) e (9.27), resultam:

$$9M_1 = y''_0 + 28y''_1 + y''_2 - \frac{3}{h^2} (7y_0 - 14y_1 + 7y_2) \quad (9.28)$$

$$9M_{n-1} = y''_{n-2} + 28y''_{n-1} + y''_n - \frac{3}{h^2} (7y_{n-2} - 14y_{n-1} + 7y_n) \quad (9.29)$$

Sob as condições de extremidades acima, consegue-se ordem de aproximação  $O(h^4)$  desde (9.7) até (9.13) inclusive, isto é,  $O(h^4)$  para a expressão que define  $y_i^{(4)}$ .

Não se conhecendo as derivadas segundas nos seis pontos, três em cada extremidade, propõem Papamichael e Worsey, para obter a mesma ordem de aproximação  $O(h^4)$ , até para  $y_i^{(4)}$ , as condições:

$$\begin{aligned} M_0 + 2M_1 = \frac{1}{864h^2} & (-1187y_0 - 864y_1 + 2376y_2 - 352y_3 + 27y_4 - 2940h y'_0 - \\ & - 360h^2 y''_0) \end{aligned} \quad (9.30)$$

$$\begin{aligned} 2M_{n-1} + M_n = \frac{1}{864h^2} & (-1187y_n - 864y_{n-1} + 2376y_{n-2} - 352y_{n-3} + 27y_{n-4} + \\ & + 2940h y'_n - 360h^2 y''_n) \end{aligned} \quad (9.31)$$

(9.30) e (9.31) serão a primeira e a última equações na formação do sistema tridiagonal de equações lineares contendo desde  $M_0$  até  $M_n$ .



REPRESENTAÇÃO DAS RELAÇÕES MOMENTO-CURVATURA-FORÇA NORMAL, PARA SEÇÃO TRANSVERSAL DE CONCRETO ARMADO, POR MEIO DE SPLINES CÚBICOS\*

Na referência bibliográfica (9), pág. 100, tabela A3-1, fornecem-se valores de momento-curvatura-força normal para seção transversal retangular, de concreto armado, submetida a flexão composta normal.

Designando por  $x$  a curvatura relativa,  $x = 10^3 \frac{M}{N_c h}$  e por  $y$  o momento fletor relativo,  $y = 10^3 M/N_c h$ , para

$$\phi = 0, \quad \epsilon_s = 0,2\%, \quad d'/h = 0,1, \quad v = 0,30 \quad e \quad \omega = 0,3,$$

retiraram-se da tabela os seguintes pares de valores ( $x; y$ ):

(1; 106) (2; 174) (3; 236) (4; 294) (5; 334) (6; 340) (7; 343) (8; 343)

Na Fig. 1, representa-se o diagrama obtido com a utilização do spline cúbico completo, com tangentes extremas obtidas por polinômios de interpolação sem pontos adicionais.

\*Neste trabalho, as aplicações limitaram-se a problemas de interpolação.

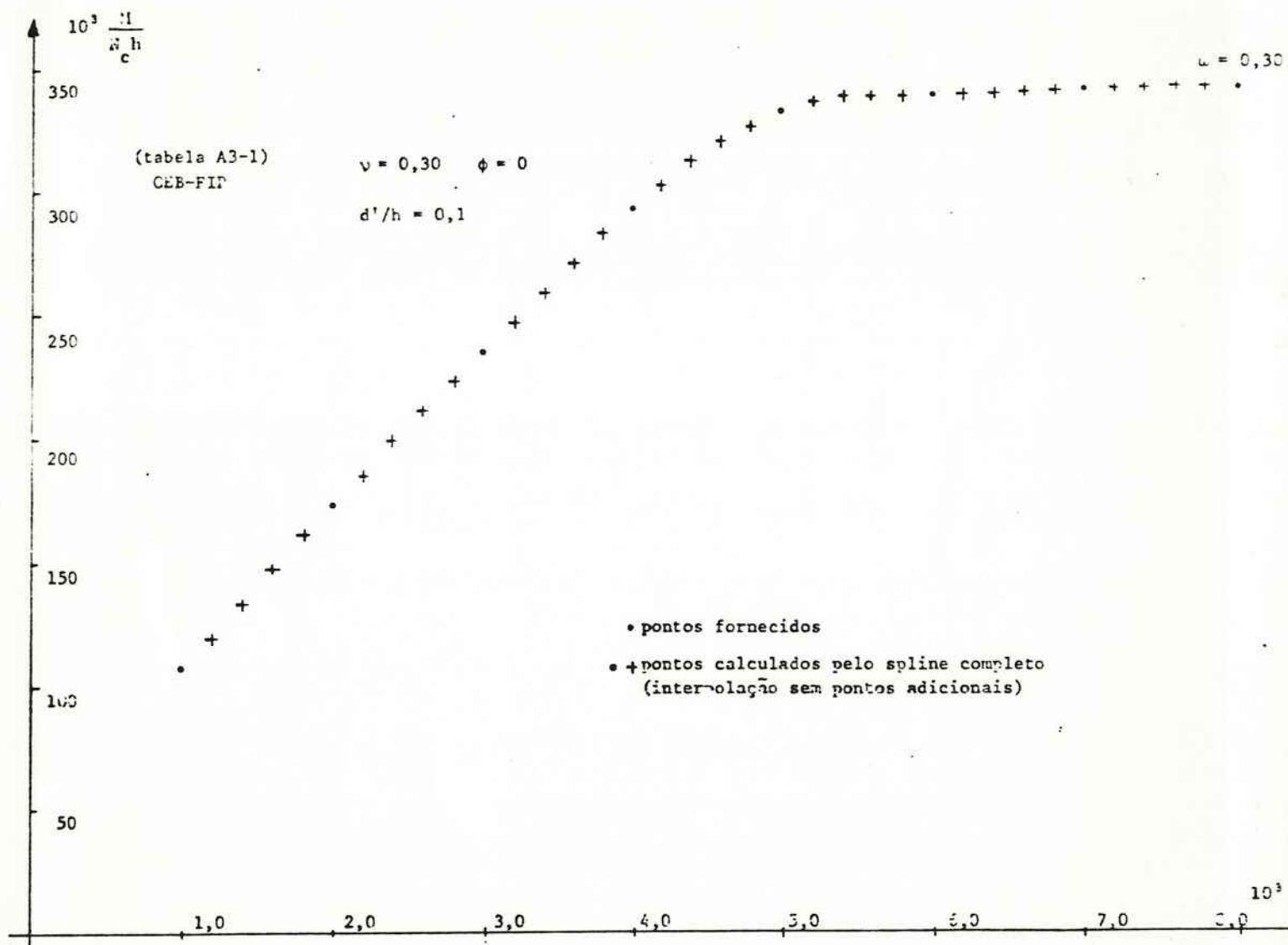


Fig. 1 - Momento-Curvatura - Força Normal



Variando somente o coeficiente de fluênciia para  $\phi = 2,0$ , extraíram-se da mesma referênciia citada os novos pares de valores  $(x; y)$ :

(1; 74) (2; 137) (3; 195) (4; 251) (5; 285) (6; 313) (7; 328) (8; 331)

Na Fig. 2, representou-se o diagrama obtido pelo spline cúbico completo, com tangentes extremas fornecidas por polinômios de interpolação sem pontos adicionais.

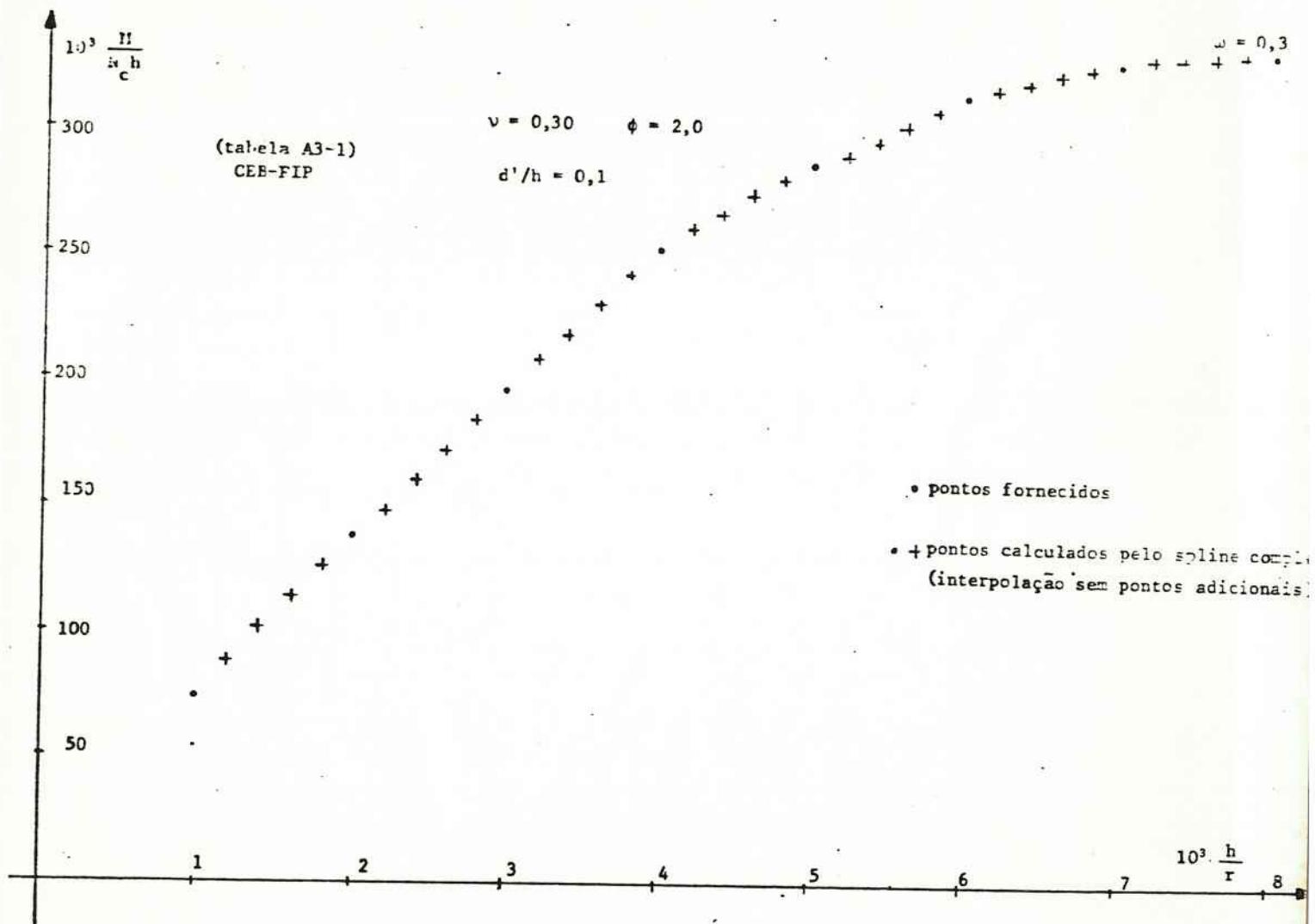


Fig. 2 - Momento-Curvatura - Força Normal



Para a obtenção do diagrama momento-curvatura-força normal da Fig. 3, utilizaram-se os seguintes pares de valores (x; y):

(1; 100) (2; 174) (3; 243) (4; 309) (5; 353) (6; 372) (7; 384) (8; 389)

Para a interpolação, adotou-se o spline cúbico completo, com tangentes extremas fornecidas por polinômios de interpolação sem pontos adicionais.

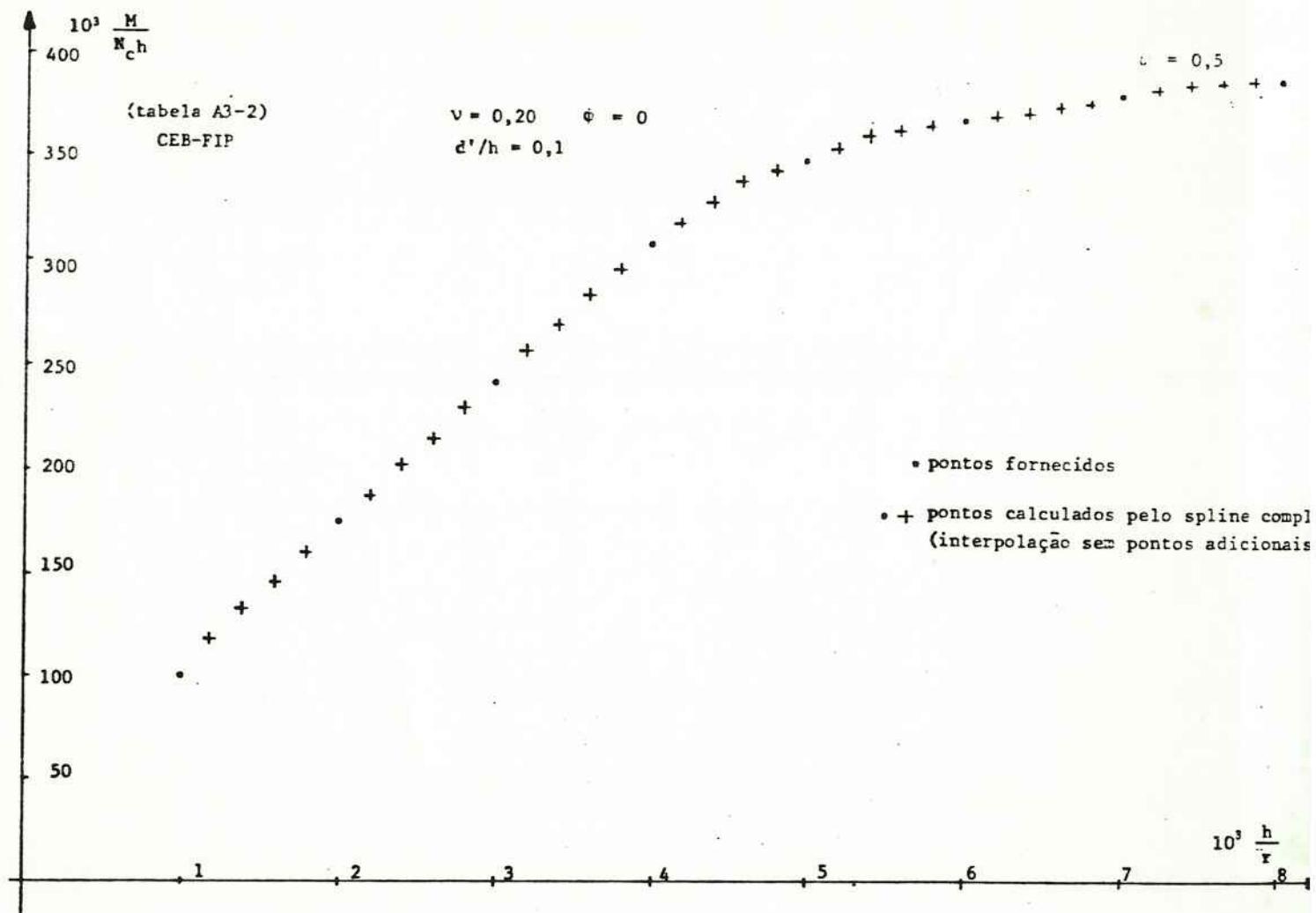


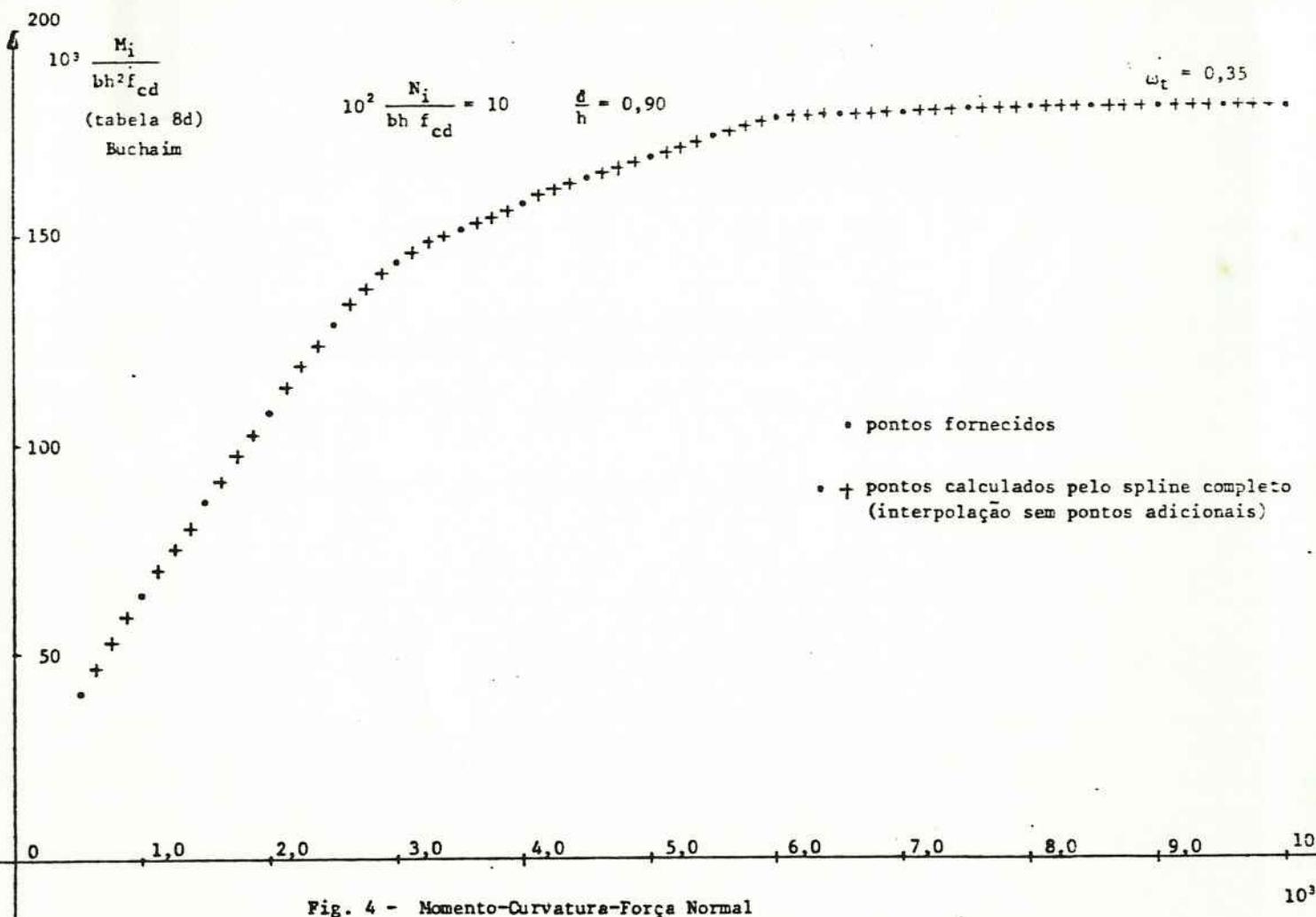
Fig.3 - Momento-Curvatura - Força Normal



Novos valores de momento-curvatura-força normal foram retirados da referência (7), tabela 8d, aço CA-50B, com  $10^2 n_i = 10$  e  $\omega_t = 0,35$ , fornecendo os pares (x; y) abaixo:

(0,5; 40)	(1,0; 64)	(1,5; 86)	(2,0; 108)	(2,5; 129)	(3,0; 144)
(3,5; 152)	(4,0; 159)	(4,5; 164)	(5,0; 169)	(5,5; 174)	(6,0; 178)
(6,5; 179)	(7,0; 179)	(7,5; 180)	(8,0; 180)	(8,5; 180)	(9,0; 181)
(9,5; 181)	(10,0; 181)				

Na Fig. 4, representa-se o diagrama obtido com utilização do spline cúbico completo, com tangentes extremas fornecidas por polinômios de interpolação, sem pontos adicionais.





REPRESENTAÇÃO DO DIAGRAMA DE INTERAÇÃO M-N, PARA A FLEXÃO COMPOSTA NORMAL  
EM SEÇÃO RETANGULAR DE CONCRETO ARMADO (referência (26))

Do ábaco 3.4, pág. 50, da referência, leram-se as coordenadas  $x = v$  e  $y = v(e/h)$ , formando os pares  $(x; y)$  conforme abaixo:

para  $\omega = 1,0$ :

(- 1; 0)	(- 0,8; 0,090)	(- 0,6; 0,186)	(- 0,4; 0,278)	(- 0,2; 0,370)
(0; 0,463)	(0,2; 0,541)	(0,4; 0,570)	(0,6; 0,531)	(0,8; 0,472)
(1; 0,398)	(1,2; 0,335)	(1,4; 0,255)	(1,6; 0,157)	(1,8; 0,000)

para  $\omega = 0,5$ :

(- 0,5; 0)	(- 0,3; 0,093)	(- 0,1; 0,187)	(0,1; 0,274)	(0,3; 0,336)
(0,5; 0,337)	(0,7; 0,295)	(0,9; 0,248)	(1,1; 0,168)	(1,3; 0,074)

para  $\omega = 0$

(0; 0)	(0,2; 0,080)	(0,4; 0,120)	(0,6; 0,120)	(0,8; 0,080)
(1,0; 0,0)				

Na Fig. 5, encontra-se o diagrama obtido com interpolação pelo spline cúbico com igualdade de reações.

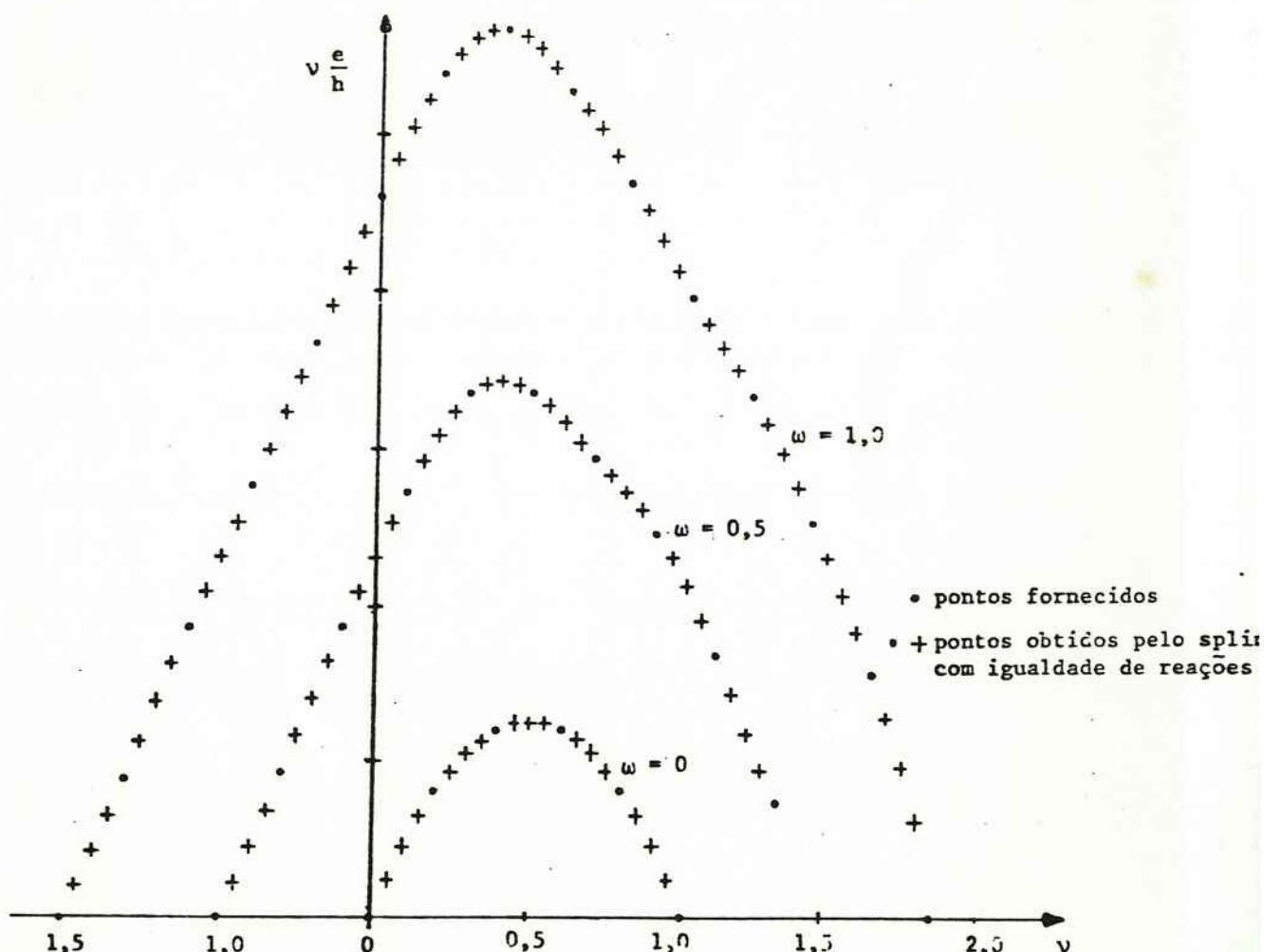


Fig. 5 - Diagrama de Interação M-N, flexão composta normal (Pfeil, pg. 50)



REPRESENTAÇÃO DO EIXO DE UM CABO DE PROTENSÃO PELO SPLINE CÚBICO

Para o eixo de um cabo de protensão, forneceram-se as coordenadas (x; y) com os seguintes valores:

(0; 20)	(6; 23,8)	(12; 25,5)	(18; 24,5)	(24; 22,5)	(30; 21)
(36; 19,5)	(42; 18,5)	(48; 18,2)	(54; 18,5)	(60; 19,5)	(66; 21)
(72; 22,5)	(78; 24,5)	(84; 25,5)	(90; 23,8)	(96; 20)	

Na Fig. 6, desenha-se o eixo do cabo de protensão com os pontos obtidos por interpolação pelo spline cúbico com igualdade de reações.

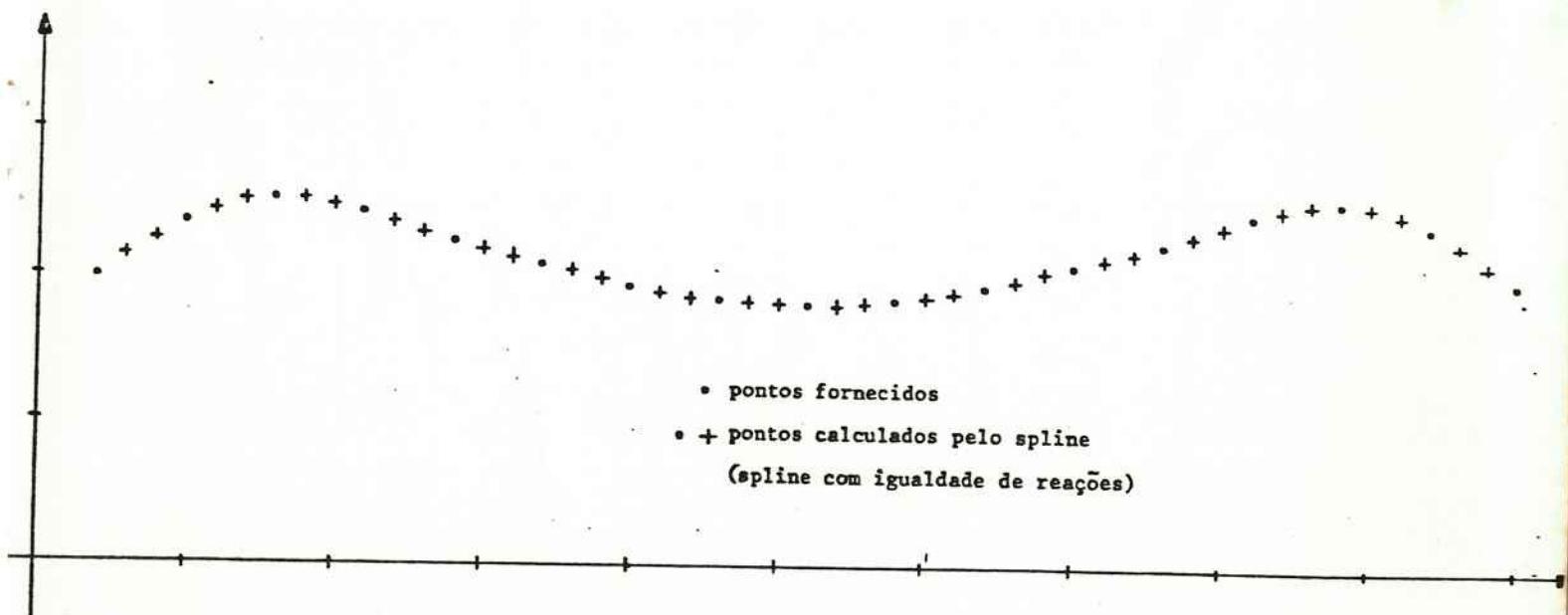


Fig. 6 - Eixo de um cabo de protensão



## REPRESENTAÇÃO DE DESLOCAMENTOS, LINEAR E ANGULAR, EM ESTACAS ENTERRADAS

Na referência (32), calcularam-se estacas enterradas, com extremidades livres, sob esforços de extremidades, em solo com reação lateral com distribuição triangular.

Resolveu-se a equação diferencial de quarta ordem

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{\lambda^5}{32} xy + \frac{\lambda^5}{32} y = 0$$

para diversos valores do parâmetro de rigidez  $\lambda = \alpha L$ , com

$$\alpha = \sqrt[5]{\frac{K}{EI}}$$

sendo L o comprimento da estaca.

Para a estaca com extremidade inferior livre, sob força horizontal H aplicada na extremidade superior, a linha elástica escreve-se:

$$y(\bar{z}) = A_y \frac{H}{\alpha^3 EI}$$

Para a mesma estaca, sob momento M aplicado na extremidade superior, obtém-se a linha elástica:

$$y(\bar{z}) = B_y \frac{M}{\alpha^2 EI}$$

Ainda sob momento aplicado na extremidade superior, a rotação da seção transversal da estaca escreve-se:

$$\phi(\bar{z}) = B_s \frac{M}{\alpha EI}$$

Nas Figs. 7, 8 e 9, respresentam-se, através de splines cúbicos, os coeficientes  $A_y$ ,  $B_y$  e  $B_s$ , em função de  $\lambda$ , para seção transversal do topo da estaca.



REPRESENTAÇÃO DO DESLOCAMENTO DO TOPO DA ESTACA SOB FORÇA HORIZONTAL NA EXTREMIDADE SUPERIOR, POR MEIO DE SPLINE CÚBICO

Para a construção da Fig. 7, abaixo, com  $x = \lambda$  e  $y = A_y$ , forneceram-se os seguintes pares  $(x, y)$ :

$(1,0; - 18,0301)$	$(1,2; - 12,5520)$	$(1,4; - 9,2662)$	$(1,6; - 7,1541)$
$(1,8; - 5,7298)$	$(2,0; - 4,7374)$	$(2,2; - 4,0319)$	$(2,4; - 3,5257)$
$(2,6; - 3,1628)$	$(2,8; - 2,9054)$	$(3,0; - 2,7266)$	

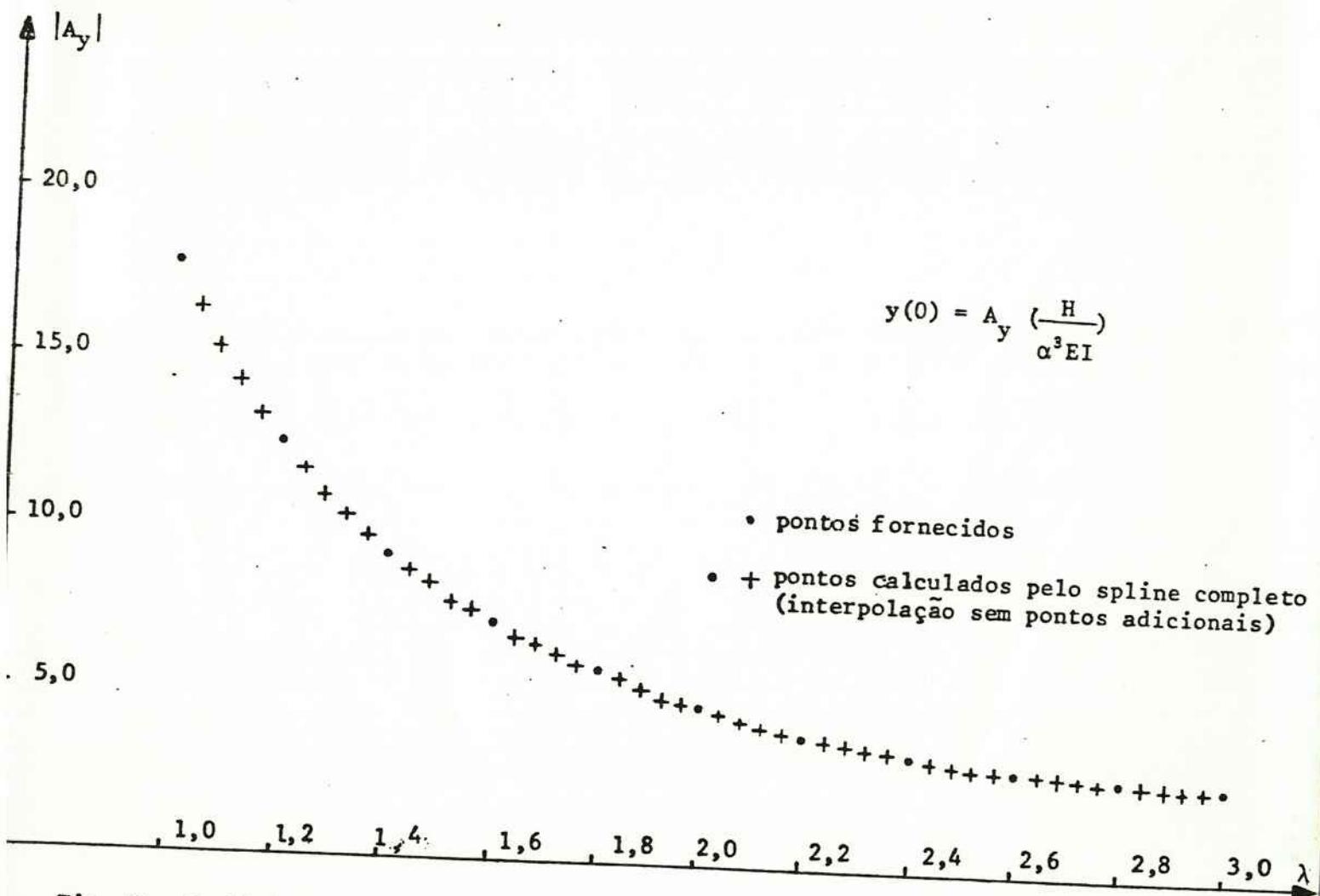


Fig. 7 - Coeficiente  $A_y$  para deslocamento horizontal do topo da estaca



REPRESENTAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS DO TOPO DA ESTACA, SOB MOMENTO APLICADO NA EXTREMIDADE SUPERIOR, POR MEIO DE SPLINE CÚBICO

Das tabelas 15 a 25, da referência (32), com  $x = \lambda$  e  $y = B_y$ , conseguiram-se os pares de valores  $(x; y)$  abaixo:

$(1,0; - 24,1059)$	$(1,2; - 14,0413)$	$(1,4; - 8,9536)$	$(1,6; - 6,1294)$
$(1,8; - 4,4558)$	$(2,0; - 3,4182)$	$(2,2; - 2,7559)$	$(2,4; - 2,3268)$
$(2,6; - 2,0483)$	$(2,8; - 1,8695)$	$(3,0; - 1,7575)$	

Da utilização dos pares de valores acima resultou o gráfico da Fig. 8.

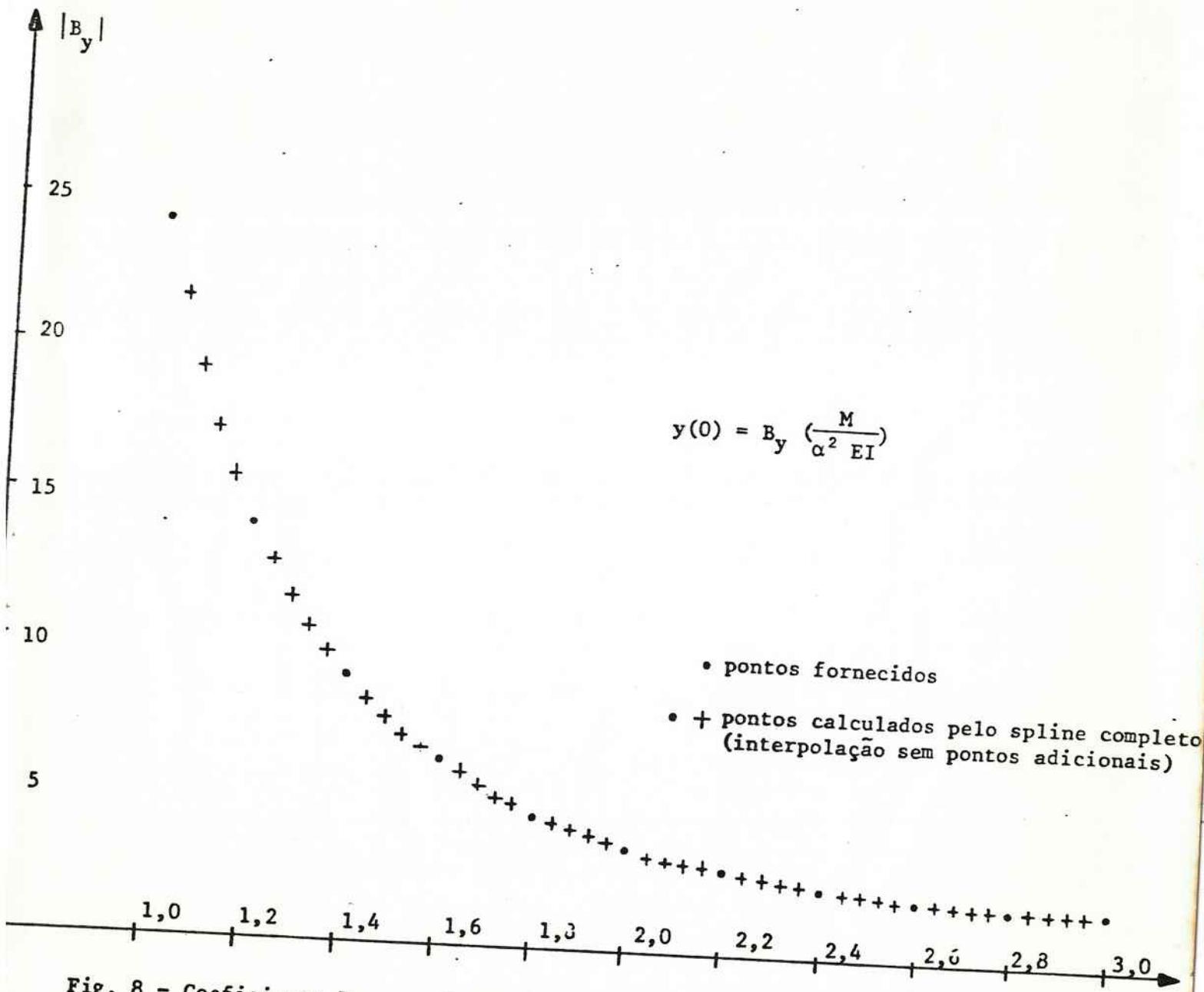
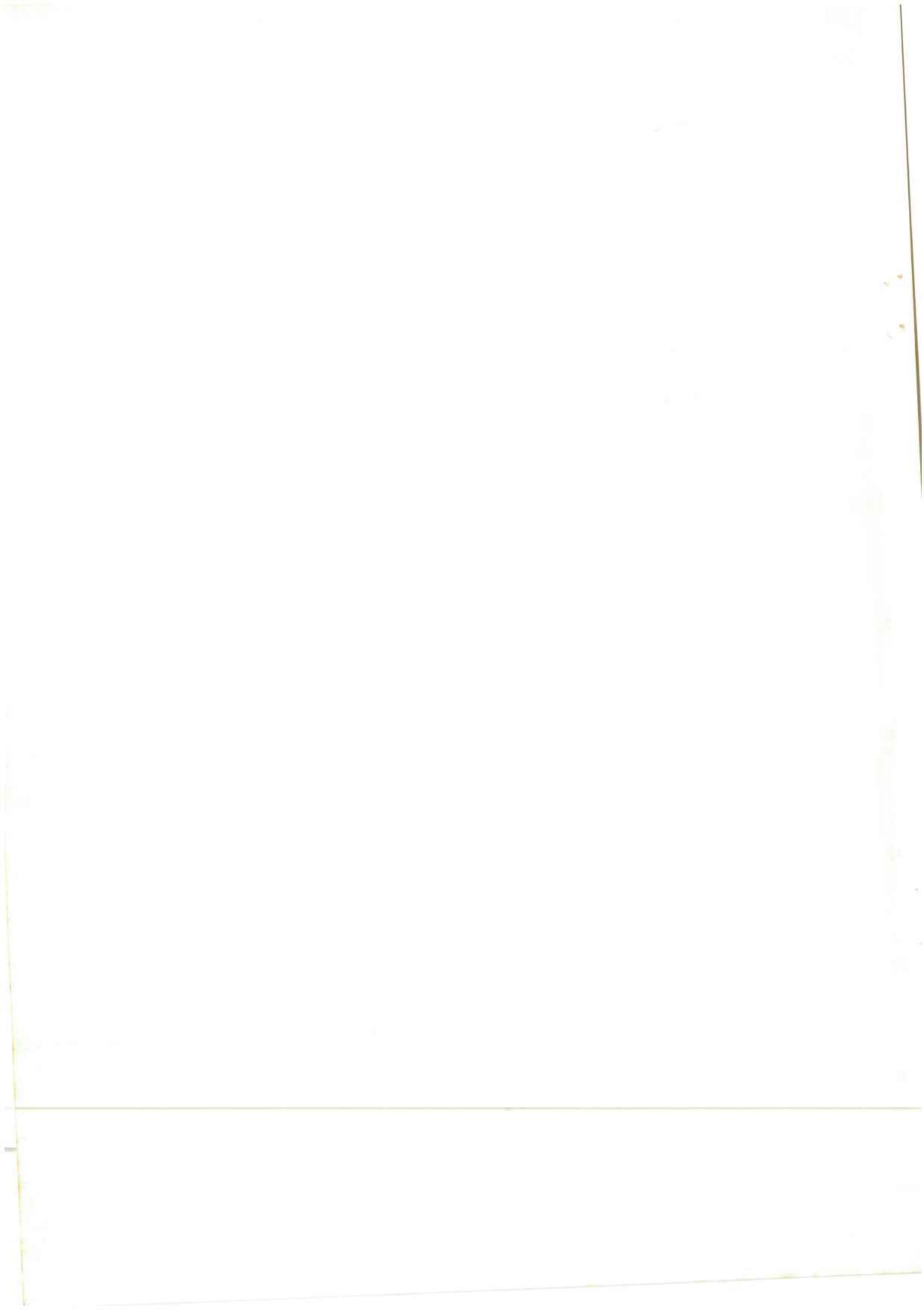


Fig. 8 - Coeficiente  $B_y$  para deslocamento horizontal do topo da estaca



REPRESENTAÇÃO DA ROTAÇÃO DA SEÇÃO DO TOPO DA ESTACA, SOB MOMENTO APLICADO NA EXTREMIDADE SUPERIOR, POR MEIO DE SPLINE CÚBICO

Para a construção do gráfico da Fig. 9, com  $x = \lambda$  e  $y = B_s$ , das tabelas 15 a 25 da referência 32, retiraram-se os pares  $(x; y)$ :

(1,0; 36,4856)	(1,2; 17,9436)	(1,4; 10,0501)	(1,6; 6,2681)
(1,8; 4,2992)	(2,0; 3,2132)	(2,2; 2,5910)	(2,4; 2,2269)
(2,6; 2,0129)	(2,8; 1,8886)	(3,0; 1,8185)	

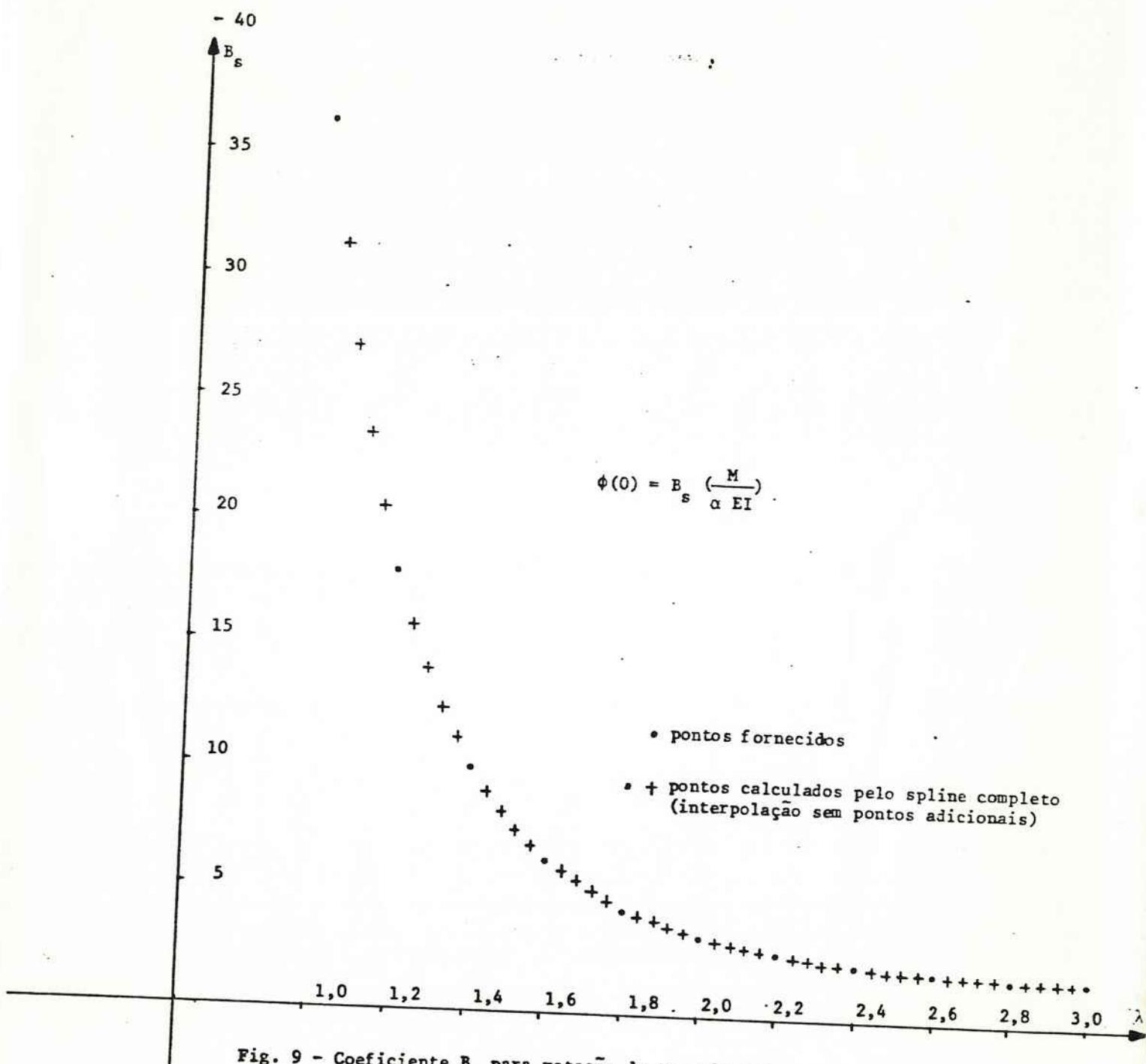
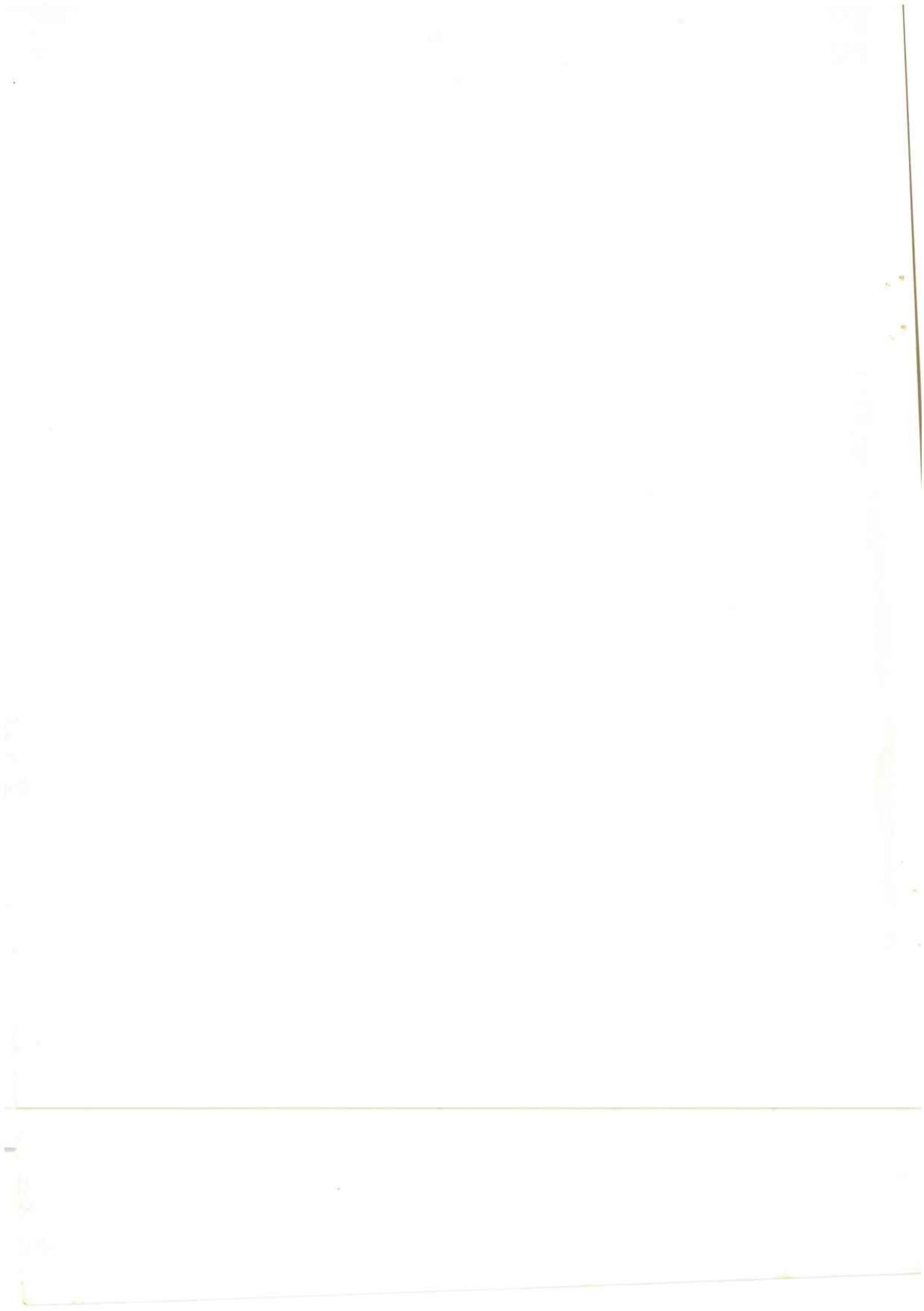


Fig. 9 - Coeficiente  $B_s$  para rotação do topo da estaca



REPRESENTAÇÃO DO MOMENTO FLETOR MÁXIMO NA ESTACA, SOB AÇÃO DE FORÇA HORIZONTAL  
APLICADA NA EXTREMIDADE SUPERIOR, POR MEIO DE SPLINE CÚBICO

Dadas tabelas 1 a 11 da referência (32), retiraram-se para cada valor de  $\lambda$  os valores máximos de  $A_M$ . Colocando-se  $x = \lambda$  e  $y =$  valor máximo de  $A_M$ , conseguiram-se os pares  $(x; y)$  abaixo:

$(1,0; 0,2591)$	$(1,2; 0,3116)$	$(1,4; 0,3629)$	$(1,6; 0,4131)$	$(1,8; 0,4618)$
$(2,0; 0,5111)$	$(2,2; 0,5581)$	$(2,4; 0,6012)$	$(2,6; 0,6393)$	$(2,8; 0,6745)$
$(3,0; 0,7032)$				

Os pares acima deram origem ao gráfico da Fig. 10.

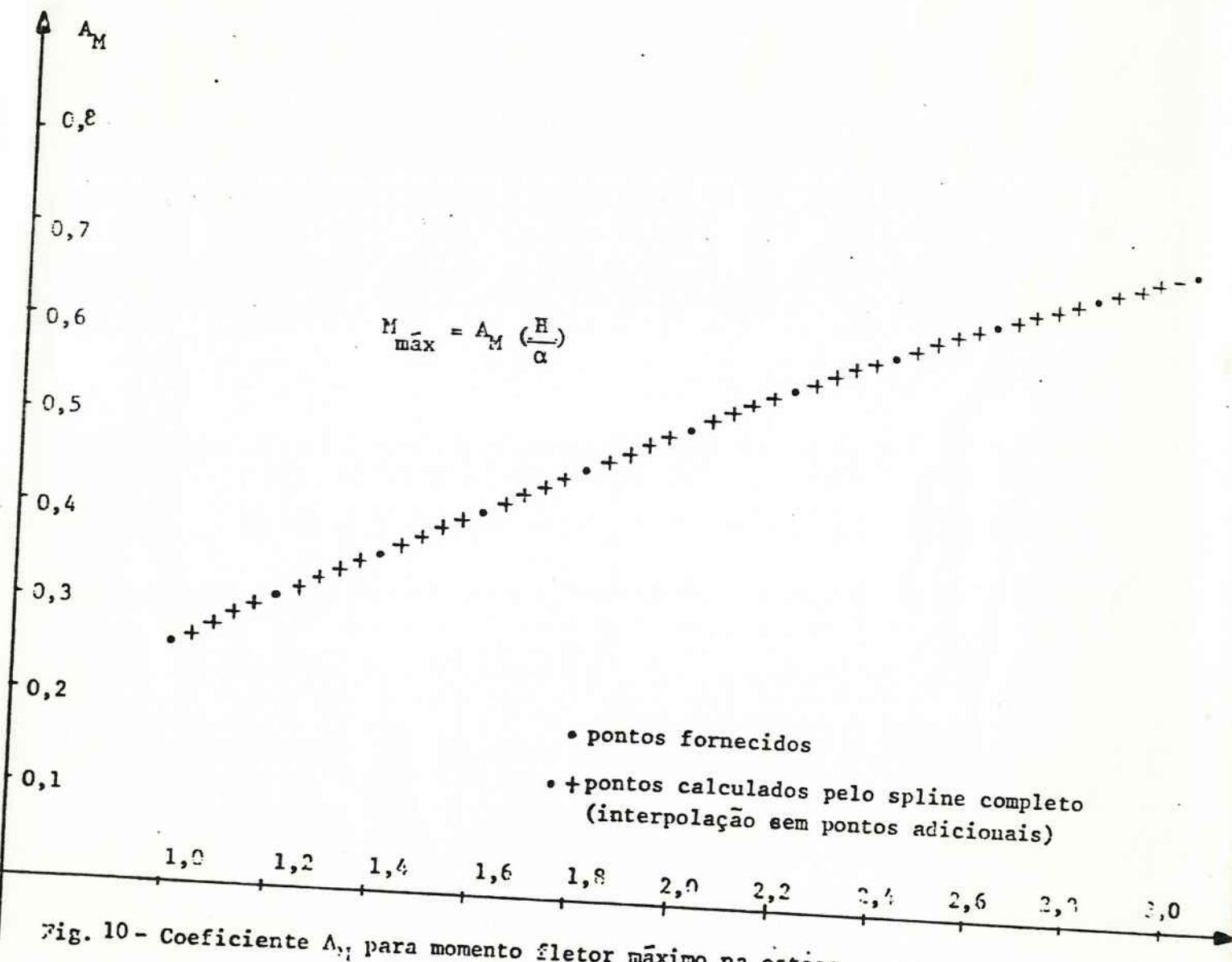
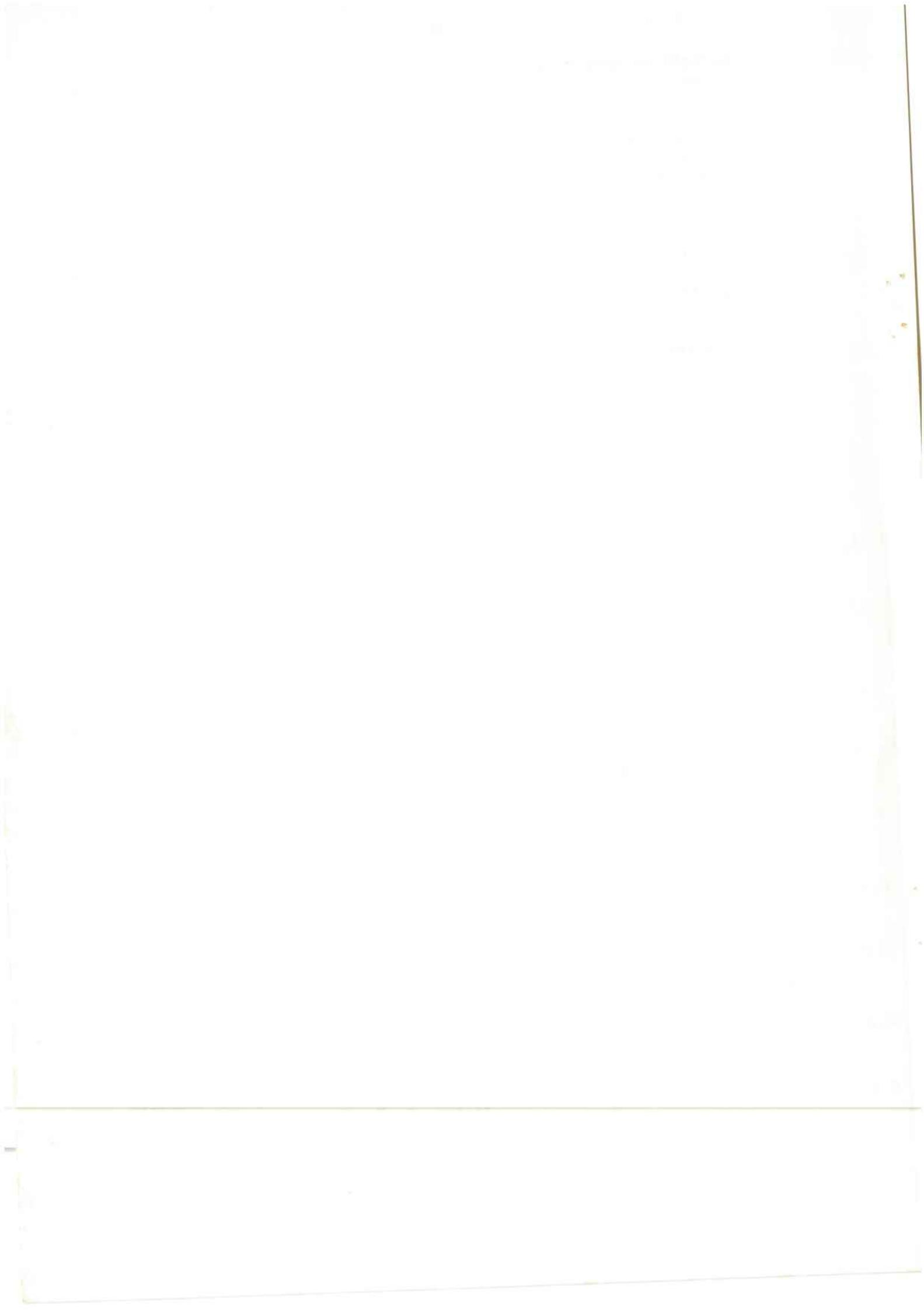


Fig. 10 - Coeficiente  $A_M$  para momento fletor máximo na estaca



## REPRESENTAÇÃO DE CURVAS DE NÍVEL PELO SPLINE PARAMÉTRICO NATURAL

Para a superfície de influência de  $M_y$ , numa placa retangular, de acordo com a referência (28), diagrama 62, leram-se as seguintes coordenadas  $(x; y)$ :\*

Para a curva de nível - 2:

(80; 0)	(60; - 32)	(40; - 49)	(20; - 55)	(0; - 51,5)	(- 20; - 42)
(- 40; 0)	(- 20; 42)	(0; - 51,5)	(20; 55)	(40; 49)	(60; 32)
(80; 0)					

Para a curva de nível - 3:

(80; 0)	(60; - 24)	(40; - 38,5)	(20; - 42,8)	(0; - 37)	(- 20; - 15)
(- 23; 0)	(- 20; 15)	(0; 37)	(20; 42,8)	(40; 38,5)	(60; 24)
(80; 0)					

Para a curva de nível - 4:

(80; 0)	(60; - 18,5)	(40; - 29)	(20; - 30)	(0; - 16,5)	(- 5; 0)
(0; 16,5)	(20; 30)	(40; 29)	(60; 18,5)	(80; 0)	

Para a curva de nível - 5:

(80; 0)	(60; - 13,5)	(40; - 19,5)	(20; - 15,5)	(10,5; 0)	(20; 15,5)
(40; 19,5)	(60; 13,5)	(80; 0)			

Para a curva de nível - 6:

(80; 0)	(60; - 8,5)	(40; - 10,5)	(28,5; 0)	(40; 10,5)	(60; 8,5)
(80; 0)					

Na Fig. 11, encontram-se desenhadas as curvas de nível acima, com pontos de interpolação obtidos pelo spline paramétrico natural. Ressalta-se o fato de que os pontos dos desenhos, obtidos por um passo uniforme da variável  $t$ , não coincidem aqui com os pontos lidos nas variáveis  $(x; y)$ .

\*Na leitura dos pontos  $(x; y)$  considerou-se o eixo x horizontal, designado por  $y$  na Fig. 11.



REPRESENTAÇÃO DE CURVAS DE NÍVEL PELO SPLINE PARAMÉTRICO NATURAL

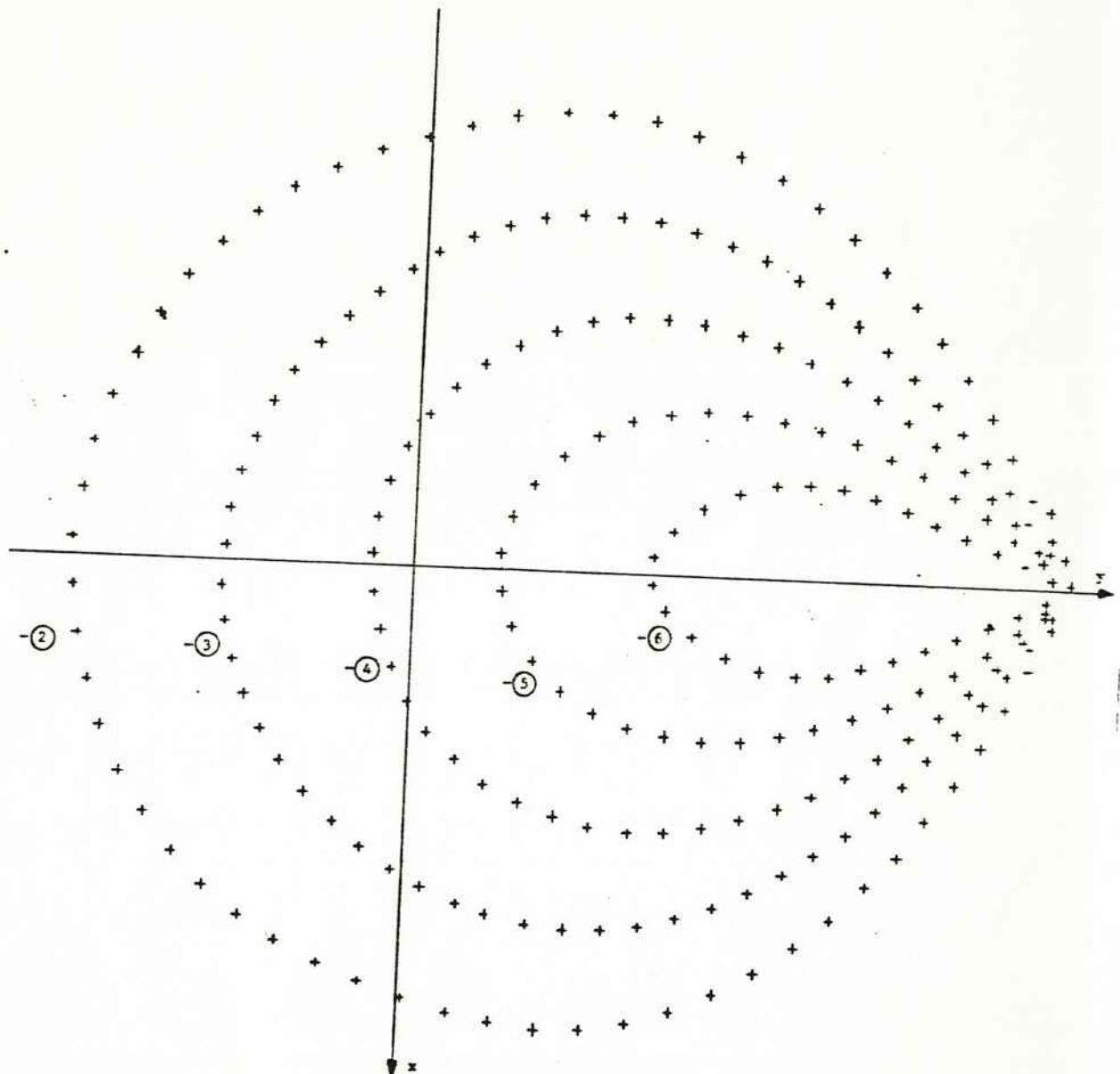
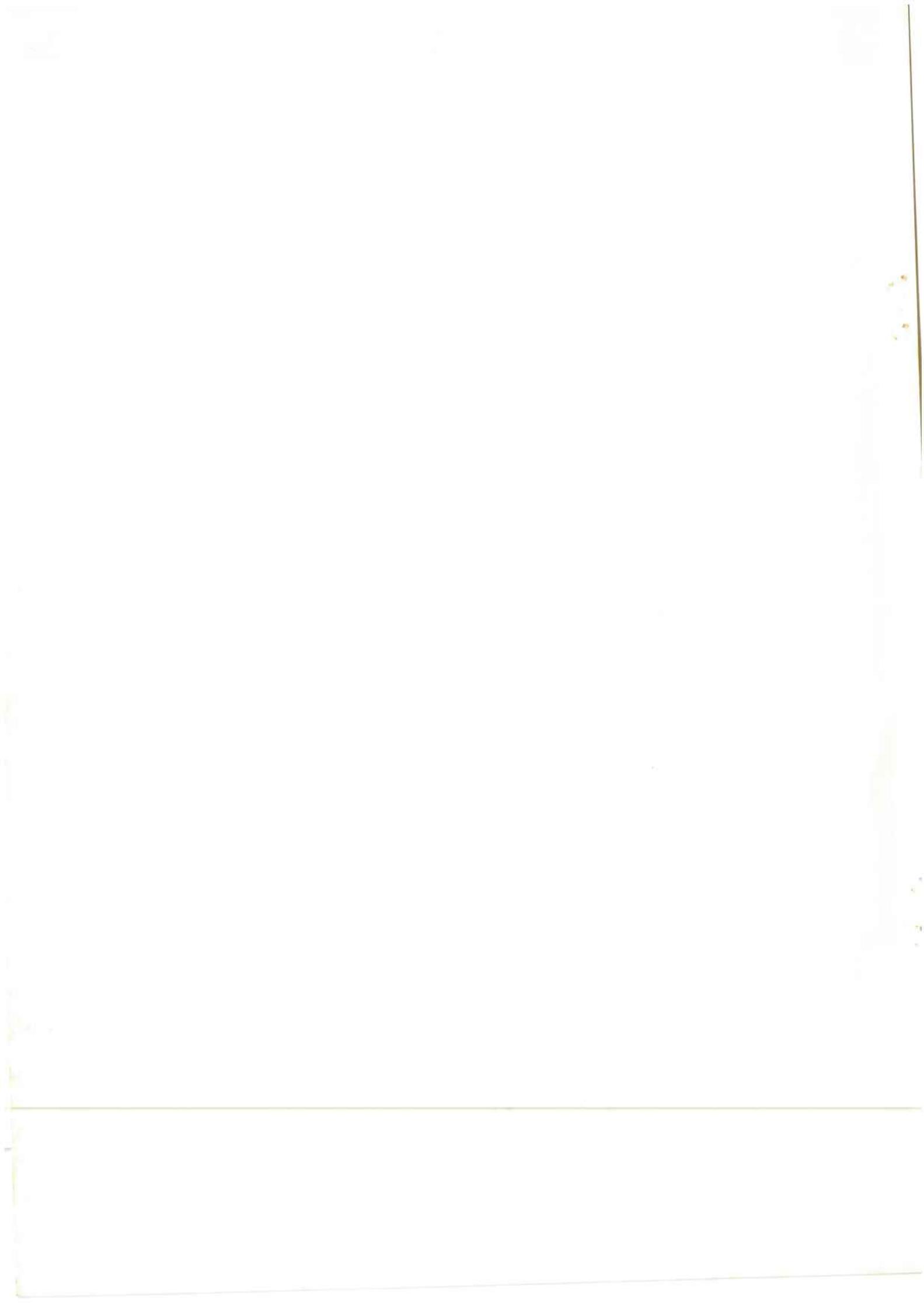


Fig. 11 - Superfície de influência para  $n = 6$ , places retangulares, curvas de nível - 2, - 3, - 4, - 5, - 6 (Gucker, Diagrama 62). Pontos obtidos pelo spline cúbico para ótimo natural.



**REPRESENTAÇÃO DE CURVAS DE NÍVEL PELO SPLINE CÚBICO PARAMÉTRICO PERIÓDICO**

Para a superfície de influência de  $m_y$ , placa circular, de acordo com a referência (28), diagrama 89, leram-se as seguintes coordenadas  $(x; y)$ :

Para a curva de nível 2:

(41; 0)	(40; 8)	(30; 29)	(20; 37,5)	(10; 42)	(0; 44)
(- 10; 43)	(- 20; 40,5)	(- 30; 37)	(- 40; 31,5)	(- 50; 26)	(- 60; 23,5)
(- 70; 20,5)	(- 80; 11)	(- 82,5; 0)	(- 80; - 11)	(- 70; - 20,5)	(- 60; - 23,5)
(- 50; - 26)	(- 40; - 31,5)	(- 30; - 37)	(- 20; - 40,5)	(- 10; - 43)	(0; - 44)
(10; - 42)	(20; - 37,5)	(30; - 29)	(40; - 8)	(41; 0)	

Para a curva de nível 3:

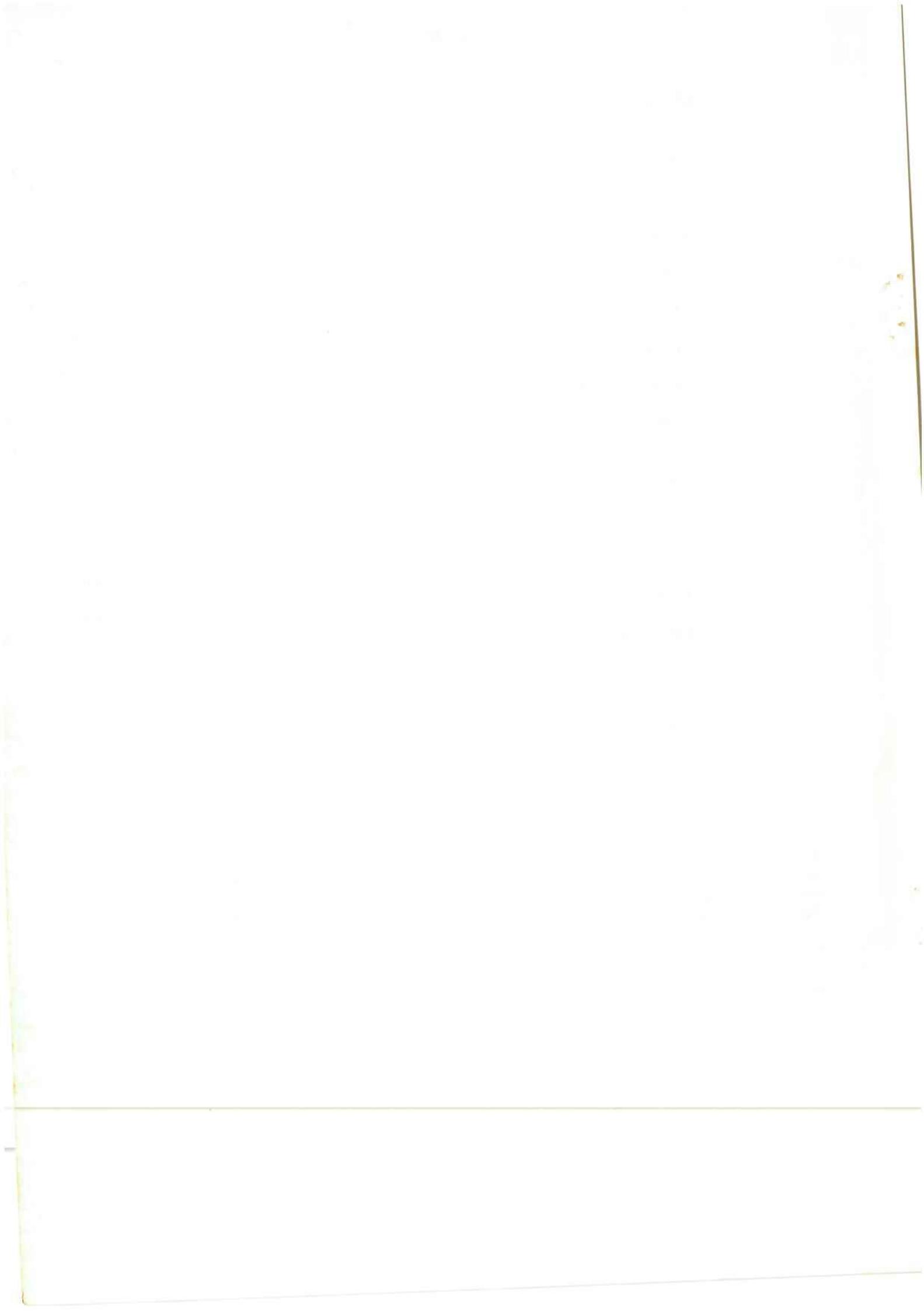
(11; 0)	(10; 6)	(0; 20)	(- 10; 24,0)	(- 20; 24,5)	(- 30; 22,5)
(- 40; 19)	(- 50; 15,5)	(- 60; 14,5)	(- 70; 10)	(- 74,5; 0)	(- 70; - 10)
(- 60; - 14,5)	(- 50; - 15,5)	(- 40; - 19)	(- 30; - 22,5)	(- 20; - 24,5)	(- 10; - 24)
(0; - 20)	(10; - 6)	(11; 0)			

Para a curva de nível 4:

(- 14,5; 0)	(- 20; 9,5)	(- 30; 13)	(- 40; 12)	(- 50; 9)	(- 60; 8,5)
(- 67,5; 0)	(- 60; - 8,5)	(- 50; - 9)	(- 40; - 12)	(- 30; - 13)	(- 20; - 9,5)
(- 14,5; 0)					

Na Fig. 12, representam-se as curvas de nível acima com pontos obtidos pelo spline cúbico paramétrico periódico. Aqui as curvas fechadas são contínuas, com derivadas primeira e segunda também contínuas, diferindo das curvas fechadas da Fig. 11.

Ressalta-se novamente o fato de que os pontos assinalados na Fig. 12 foram obtidos com passo uniforme na variável  $t$ , não coincidindo com os pontos da leitura inicial, que deram origem ao spline.



REPRESENTAÇÃO DE CURVAS DE NÍVEL PELO SPLINE PARAMÉTRICO PERIÓDICO

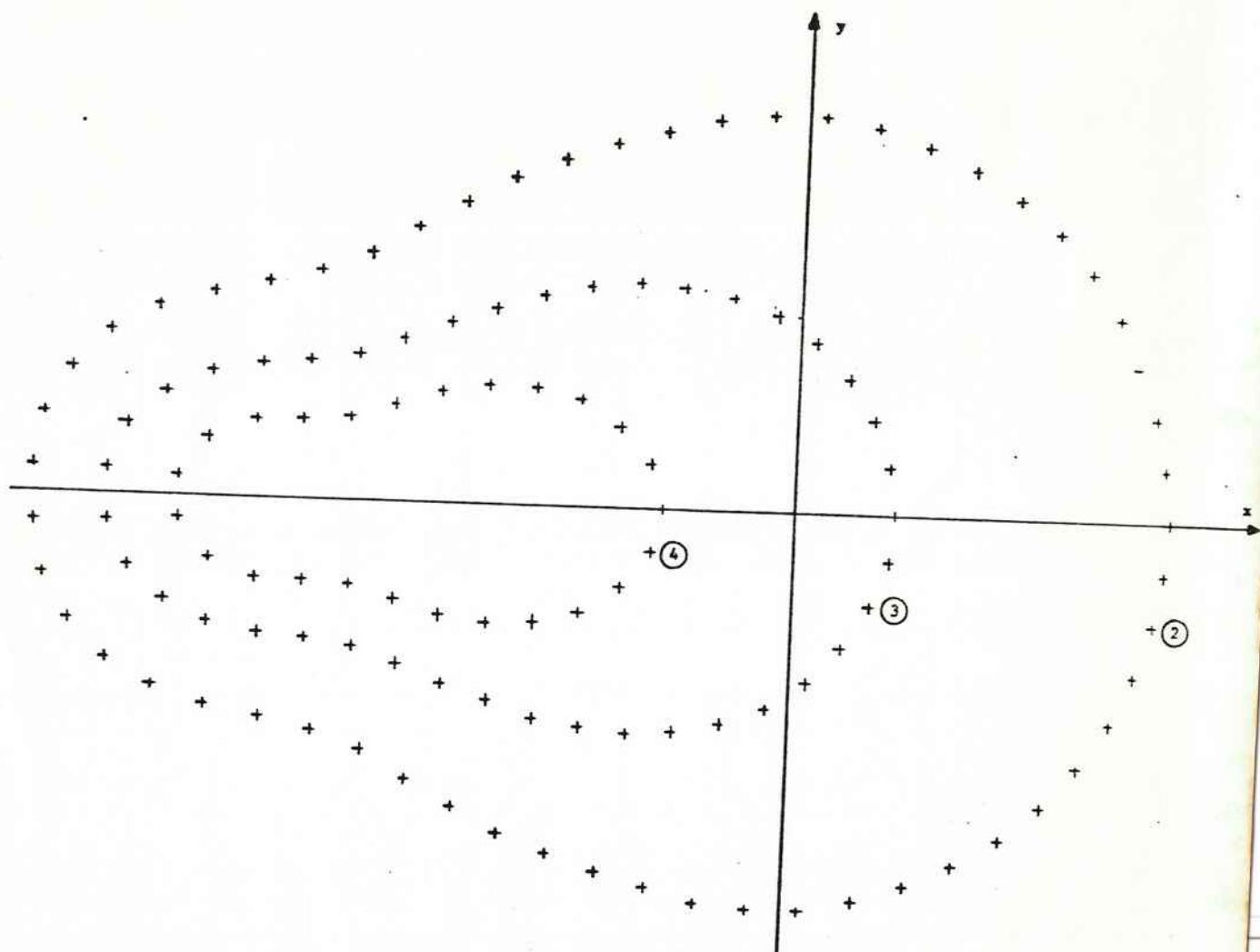
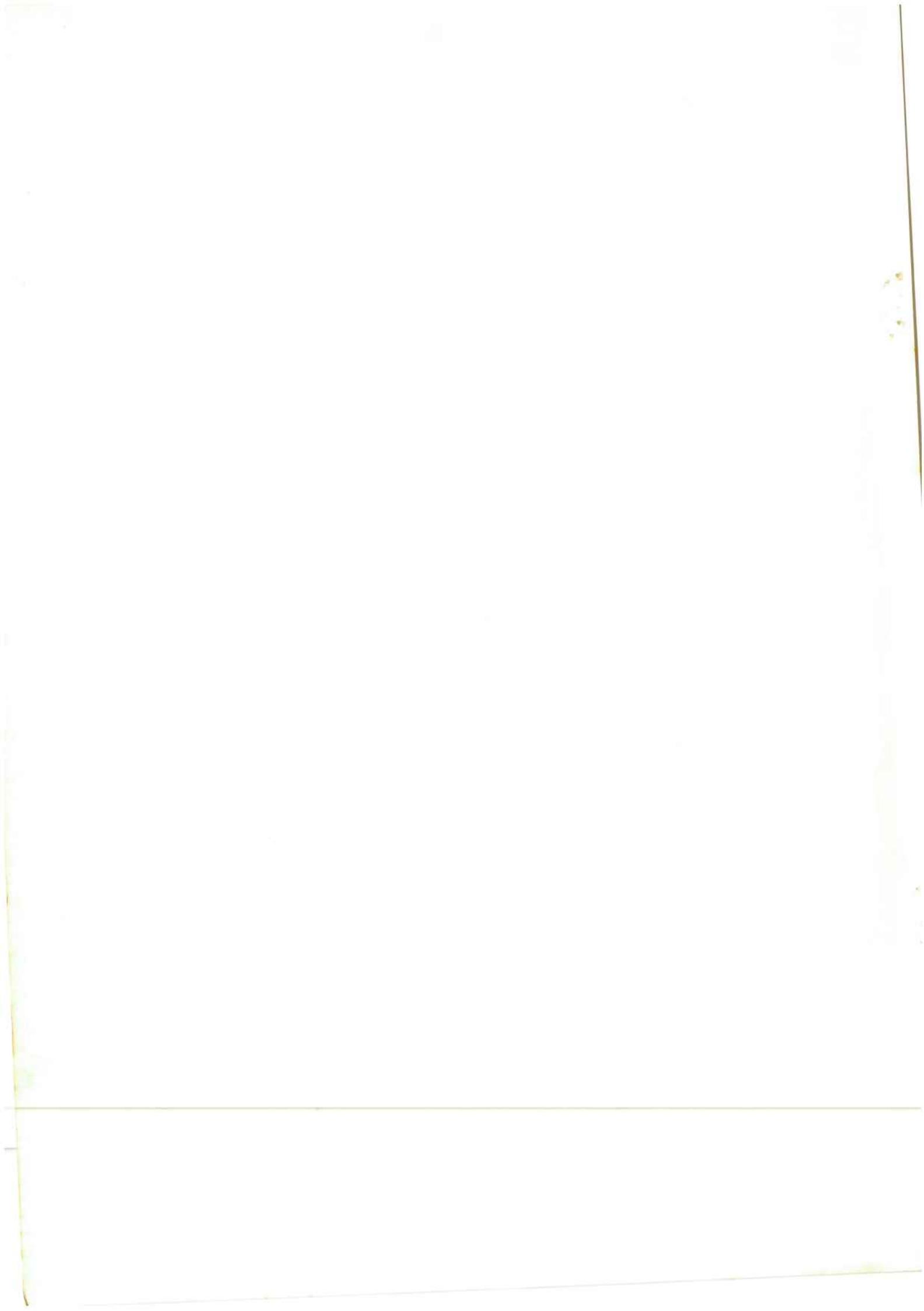


Fig. 12 - Superfície de influência para  $m_y$ , placa circular, curvas de nível 2, 3, 4  
(Pucher, diagrama 89). Pontos obtidos pelo spline cúbico paramétrico



REPRESENTAÇÃO DO PERFIL DE UM VEÍCULO PELO SPLINE CÚBICO

As Figs. 13 e 14 foram obtidas com o fornecimento das seguintes coordenadas ( $x; y$ ):

Para o trecho inicial do perfil do veículo:

(10; 12) (15; 24,8) (20; 29) (25; 31,6) (30; 33,5) (35; 34,5) (40; 35)  
(47,5; 35,5)

Para o trecho final do perfil do veículo (após o pára-brisa):

(53,5; 44,5) (58,5; 46,7) (63,5; 47,5) (68,5; 47,8) (73,5; 48) (78,5; 47,5)  
(83,5; 47,3) (88,5; 46,2) (93,5; 45) (98,5; 43) (103,5; 40,6)  
(108,5; 37) (113,5; 33) (118,5; 27) (123,5; 17)

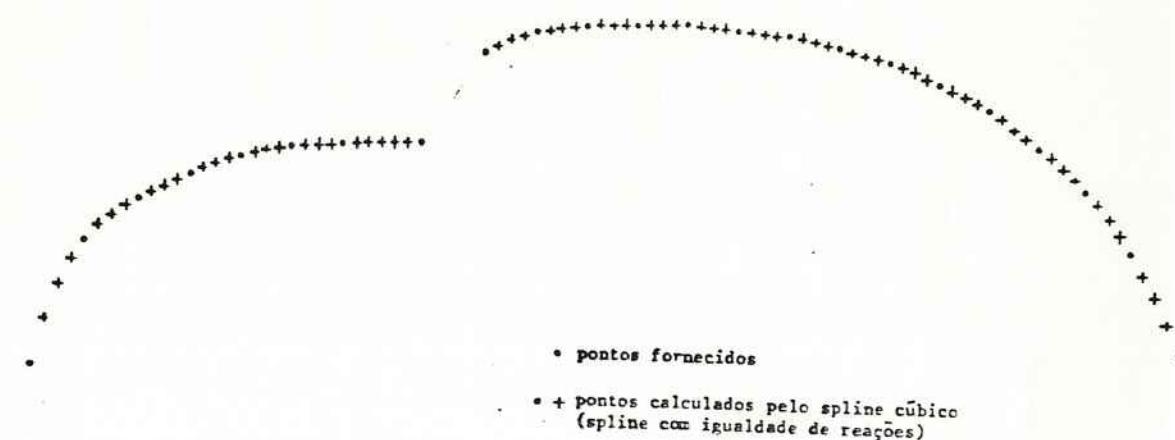


Fig. 13 - Perfil de um veículo

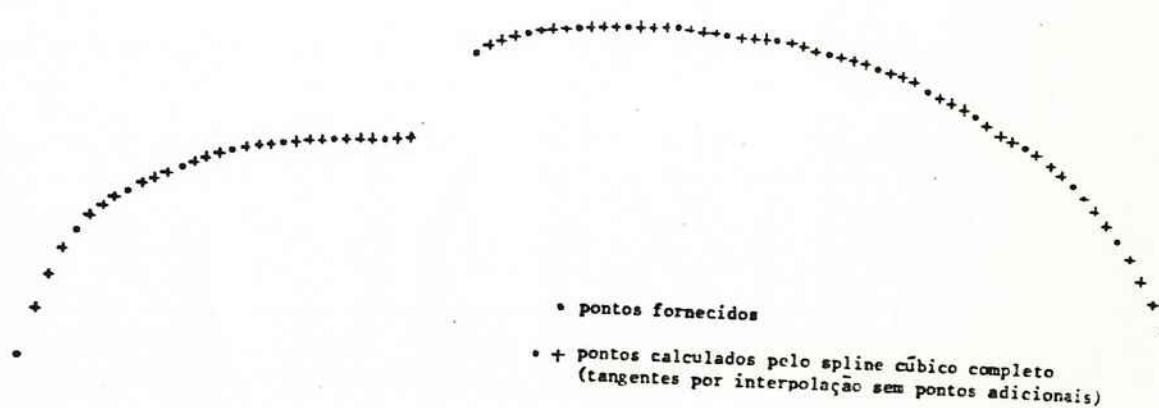
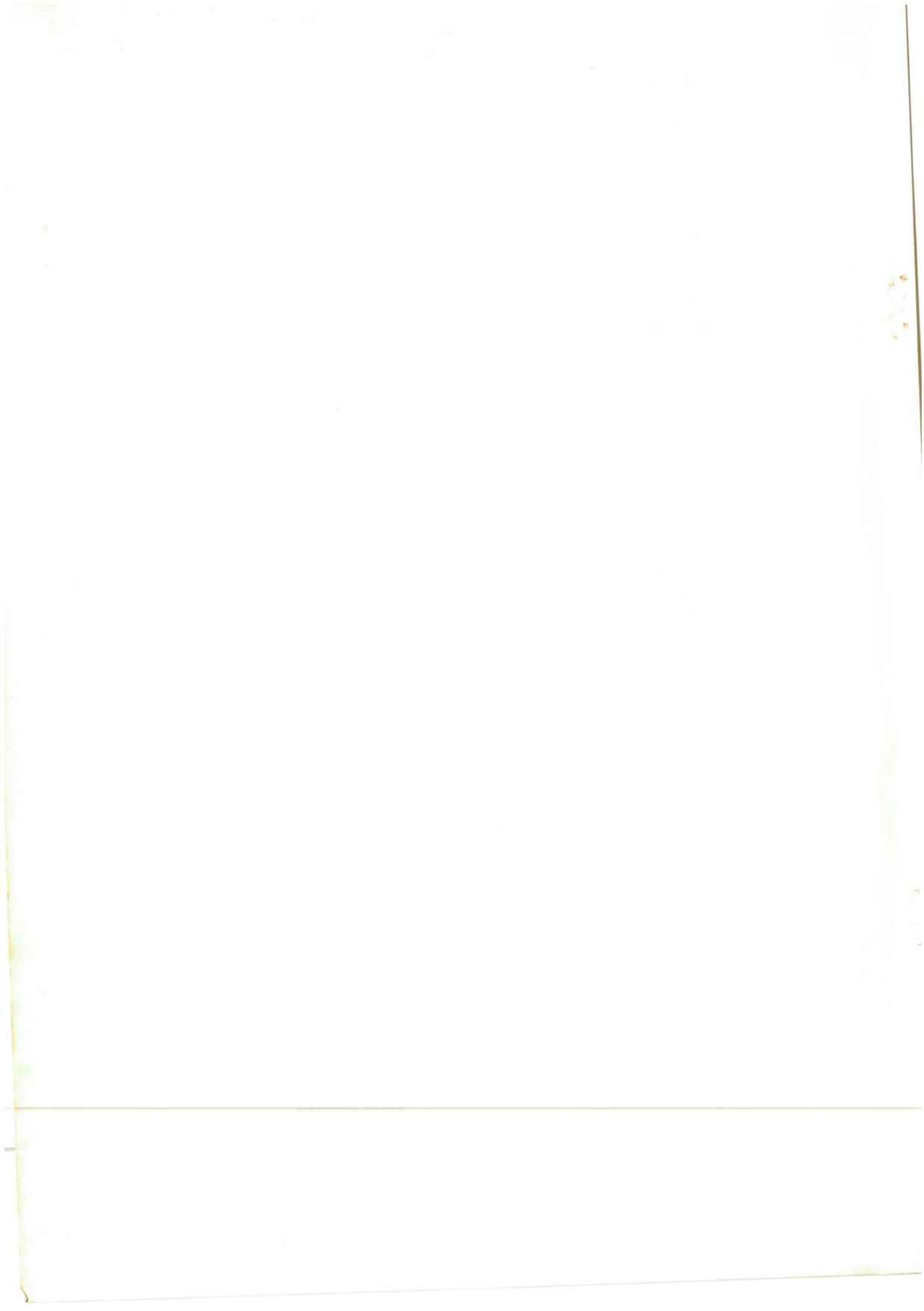
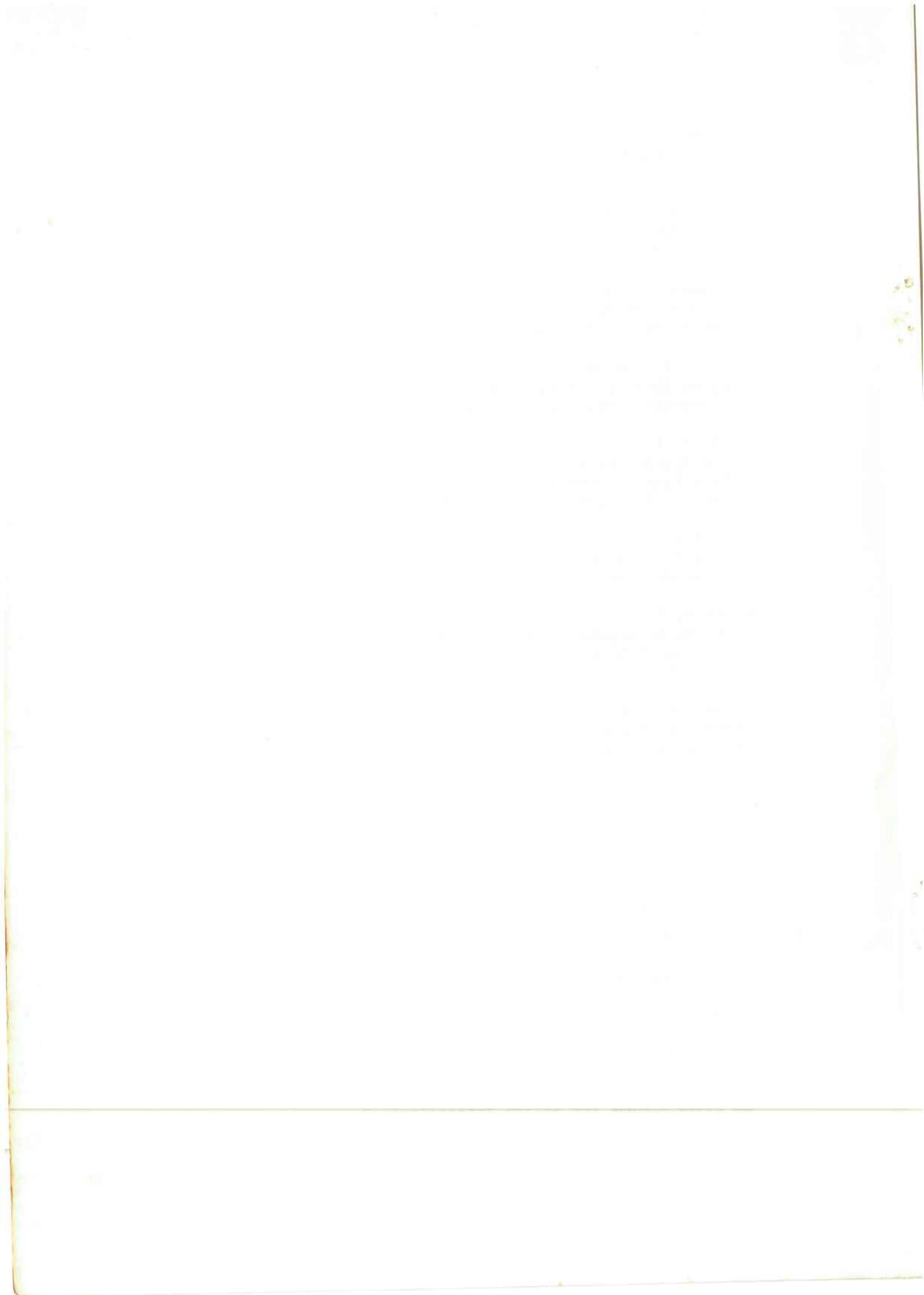


Fig. 14 - Perfil de um veículo

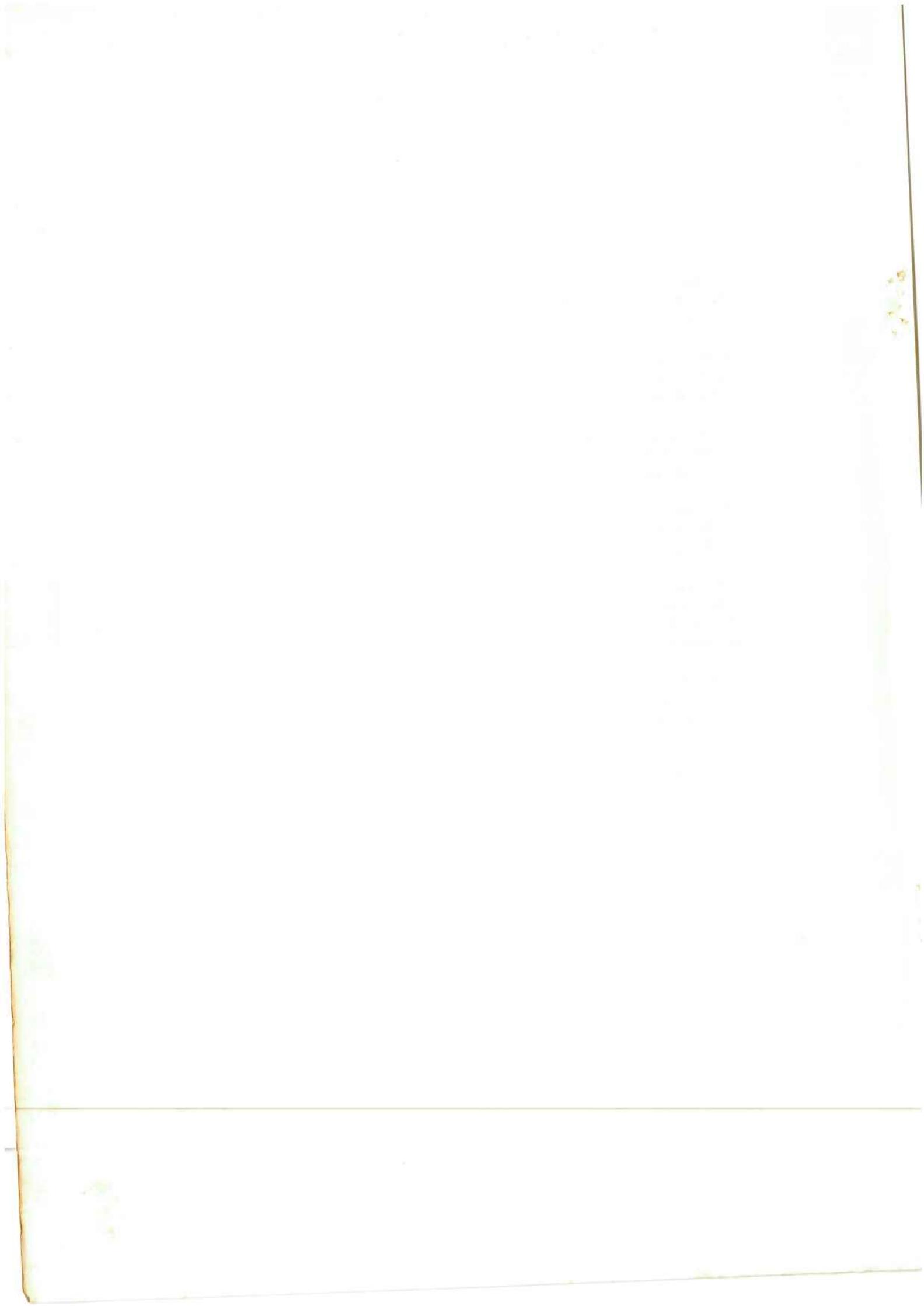


BIBLIOGRAFIA

1. Ahlberg, J. H., Nilson, E. N., e Walsh, J. L.  
"The Theory of Splines and their Application"  
Academic Press, New York, 1967
2. Behforooz, G. H., e Papamichael, N.  
"End Conditions for Cubic Spline Interpolation"  
J. Inst. Maths. Applics., 23, 1979, 355-366
3. Birkhoff, G., de Boor, C.  
"Error Bounds for Spline Interpolation"  
J. Math. Mech., 13, 1964, 827-836
4. Böhmer, K., Meinardus, G., e Schempp, W.  
"Tagung Über Spline-Funktionen"  
Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974
5. de Boor, C.  
"Good Approximation by Splines with Variable Knots"  
Spline Function and Approximation Theory  
A. Meir e A. Sharma, ed., Birkhäuser Verlag, Basel, 1973, 57-62
6. de Boor, C.  
"A Practical Guide to Splines"  
Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1978
7. Buchaim, R.  
"Efeitos de Segunda Ordem e Estado Limite Último de Instabilidade em Pilares de Concreto"  
Tese de Mestrado, Escola Politécnica da USP, 1979
8. Burden, R., Fairès, D., e Reynolds, A. C.  
"Numerical Analysis"  
Prindle, Weber e Schmidt, 1978
9. CEB-FIP  
"Manual of Buckling and Instability"  
The Construction Press, London, 1978
10. Conte, S., e de Boor, C.  
"Elementary Numerical Analysis"  
2nd Ed., McGraw-Hill Book Company, 1972
11. Epstein, M. P.  
"On the Influence of Parametrization in Parametric Interpolation"  
SIAM, J. Num. Anal. vol. 13, No. 2, 1976, 261-268
12. Forsythe, G., e Moler, C.  
"Computer Solutions of Linear Algebraic Systems"  
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967
13. Hall, C. A.  
"On Error Bounds for Spline Interpolation"  
J. Approx. Theory, 1, 1968, 209-218



14. Hall, C. A., e Meyer, W. W.  
"Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation"  
*J. Approx. Theory*, 16, 1976, 105-122
15. Handscomb, D. C. (ed.)  
"Methods of Numerical Approximation"  
Pergamon Press, 1965
16. Hayes, J. G. (ed.)  
"Numerical Approximation to Functions and Data"  
The Institute of Mathematics and its Applications  
The Athlone Press, 1970
17. Henrici, P.  
"Essentials of Numerical Analysis"  
John Wiley and Sons, 1982
18. Jordan, G., Engeln, F. Reuter  
"Numerische Mathematik für Ingenieure"  
Bibliographisches Institute Mannheim/Wien/Zürich, 1982
19. Kershaw, D.  
"A Note on the Convergence of Interpolatory Cubic Splines"  
SIAM, J. Num. Anal., vol. 8, No. 1, 1971, 67-74
20. Kershaw, D.  
"The Orders of Approximation of the First Derivative of Cubic Splines at the Knots"  
Mathematics of Computation, vol. 26, No. 117, 1972, 191-198
21. Laurent, P. J.  
"Approximation et Optimisation"  
Hermann, Paris, 1972
22. Lucas, Thomas  
"Error Bounds for Interpolating Cubic Splines under Various End Conditions"  
SIAM, J. Num. Anal., vol. 11, No. 3, 1974, 569-584
23. Papamichael, N., e Worsey, A. J.  
"End Conditions for Improved Cubic Spline Derivative Approximations"  
*Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 7, No. 2, 1981, 101-109
24. Papamichael, N., e Behforooz, G. H.  
"End Conditions for Cubic Spline Interpolation"  
*J. Inst. Maths. Applies.*, 23, 1979, 355-366
25. Papamichael, N., e Behforooz, G. H.  
"End Conditions for Interpolatory Cubic Splines with Unequally Spaced Knots"  
*Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 6, No. 1, 1980, 59-65



26. Pfeil, W.  
"Dimensionamento do Concreto Armado à Flexão Composta"  
Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1976
27. Prenter, P. M.  
"Splines and Variational Methods"  
Wiley, New York, 1975
28. Pucher, A.  
"Einflussfelder elastischer Platten"  
Dritte Auflage, Springer-Verlag, Wien-New York, 1964
29. Rice, J. R.  
"The Approximation of Functions"  
Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Nass., 1969
30. Schumaker, L. L.  
"Spline Functions. Basic Theory"  
Wiley Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts, 1981
31. Schweikert, D. G.  
"An Interpolating Curve Using a Spline under Tension"  
J. Math. Physics, 45, 1966, 312-317
32. Soares, C. A.  
"Estacas Totalmente Enterradas com Extremidades Livres, sob Esforços de Extremidades"  
São Paulo, 1984
33. Späth, H.  
"Spline Algorithmen für Konstruktion glatter Kurven und Flächen"  
R. Oldenbourg Verlag, München, 1973
34. Varga, R. S.  
"Matrix Iterative Analysis"  
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962

