

# Perturbações espaço-temporais para excitação de condensados de Bose-Einstein

Collective Modes in a harmonically trapped Bose-Einstein Condensate under Stationary and Propagating perturbations

Adrian Fernando Cozer Gaio<sup>1</sup>, Leandro Alvares Machado<sup>1</sup> , Mônica Andrioli Caracanhas<sup>\*1</sup> ,  
Kilvia Mayre Farias<sup>1</sup> , Vanderlei Salvador Bagnato<sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Universidade de São Paulo, Instituto de Física de São Carlos, 13560-970, São Carlos, SP, Brasil.

Recebido em 27 de junho de 2025. Revisado em 10 de setembro de 2025. Aceito em 23 de setembro de 2025.

Desde a realização experimental dos condensados de Bose-Einstein de gases atômicos no ano de 1995, muitos foram os estudos para determinar as propriedades desse estado coerente. Entre eles podemos citar os modos coletivos desse sistema, o qual consiste em uma assinatura importante do seu caráter superfluido. Nesse projeto, estudamos os modos coletivos de um condensado confinado em um potencial harmônico. Estabelecemos um protocolo para perturbação, a qual consistiu de um onda estacionária ou propagante, com valores de amplitude, frequência e número de ondas devidamente selecionados. Nossos resultados demonstram um caráter bastante peculiar da perturbação tipo propagante, que induz não só a excitação dos modos de deformação monopolar e quadrupolar, como também do modo dipolar do centro de massa da nuvem condensada. A evolução temporal dos modos foi calculada através da minimização da Lagrangiana do sistema perturbado. O ansatz para função de onda do condensado foi escolhido com base no regime de Thomas-Fermi, com os graus de liberdades necessários para fornecer a dinâmica dos modos. Extraímos o espectro de Fourier da solução das equações variacionais para os raios da nuvem a fim de individualizar a contribuição de cada modo coletivo, cujas frequências exatas foram obtidas com a linearização das equações dinâmicas em torno da solução do equilíbrio. Determinamos a resposta dos modos de monopolo e quadrupolo frente a presença do modo dipolar, e também com a variação da amplitude da perturbação, para diferentes geometrias da armadilha de confinamento. Nossa proposta de excitação nos mostrou um cenário bastante promissor no intuito de melhorar a precisão na detecção desses modos de mais baixa energia do sistema condensado, assim como a possibilidade de excitar seletivamente apenas um dos modos, dada a dependência do acoplamento entre eles com a geometria da armadilha de confinamento.

**Palavras-chave:** Condensado de Bose-Einstein, Modos coletivos, Perturbação espaço-temporal.

Since the first experimental realization of atomic Bose-Einstein condensates in 1995, numerous studies have sought to characterize the properties of this coherent quantum state. Among the most significant are investigations into the collective modes of the system, which serve as key signatures of its superfluid nature. In this project, we analyze the collective modes of a condensate confined within a harmonic trapping potential. We established a protocol for perturbing the system using either a stationary or propagating wave, with carefully selected values of amplitude, frequency, and wave number. Our results reveal a particularly intriguing behavior associated with the propagating perturbation, which not only excites the deformation modes-monopole and quadrupole-but also induces the dipole (center-of-mass) mode of the condensate. The temporal evolution of these modes was obtained by minimizing the Lagrangian of the perturbed system. The wavefunction ansatz was based on the Thomas-Fermi regime and included the necessary degrees of freedom (variational parameters) to capture the mode dynamics. We performed a Fourier analysis of the time evolution of the condensate radii to isolate the contribution of each collective mode. Their exact frequencies were determined by linearizing the dynamical equations around the equilibrium solution. We investigated the response of the monopole and quadrupole modes to the presence of the dipole mode and examined how this response varies with perturbation amplitude and trap geometry. Our excitation protocol presents a promising strategy for enhancing the precision in detecting low-energy collective modes of the condensate. Moreover, due to the geometry-dependent coupling between modes, it opens up the possibility of selectively exciting individual modes.

**Keywords:** Bose-Einstein Condensate, Collective Modes, Spatiotemporal Perturbation.

\*Endereço de correspondência: [caracanhas@ifsc.usp.br](mailto:caracanhas@ifsc.usp.br)

Editor-Chefe: Marcello Ferreira 

## 1. Introdução

A história do condensado de Bose-Einstein (BEC) remonta às discussões sobre a lei de Planck para a radiação de corpo negro [1–3]. Na década de 1920, o físico indiano Satyendra N. Bose (1894–1974) propôs uma nova descrição da radiação, tratando-a como um gás de partículas indistinguíveis – os fótons. Seu trabalho reinterpretou a estatística da luz sob essa perspectiva e foi posteriormente enviado a Albert Einstein (1879–1955). Einstein não apenas reconheceu a relevância da ideia, como também a estendeu para átomos massivos, apontando que as mesmas considerações poderiam ser aplicadas a sistemas materiais. Esse avanço levou à formulação das estatísticas quânticas: partículas com spin inteiro, denominadas bósons, obedecem à estatística de Bose-Einstein e podem ocupar o mesmo estado quântico; já partículas com spin semi-inteiro, os férmions, seguem a estatística de Fermi-Dirac e estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli, que impede a ocupação simultânea do mesmo estado. Essa diferença fundamental na natureza quântica da matéria é o que dá origem às diferentes estatísticas quânticas. O fato de partículas bosônicas poderem se acumular em um único estado quântico faz com que, em temperaturas suficientemente baixas, ocorra a transição de fase conhecida como condensação de Bose-Einstein.

Consideremos  $N$  bósons indistinguíveis distribuídos em  $g$  estados quânticos distintos. Cada estado  $i$  pode ter  $n_i = 0, 1, 2, \dots$  partículas, com as restrições:

$$\sum_{i=1}^g n_i = N, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^g n_i \epsilon_i = E, \quad (2)$$

onde  $\epsilon_i$  é a energia do estado  $i$ . Para bósons, qualquer número de partículas  $n$  de 0 a  $N$  pode ocupar um estado. A entropia do sistema é dada por:

$$S = k_B \ln W(\{n_i\}), \quad (3)$$

onde  $W(\{n_i\})$  é o número de maneiras de distribuir as partículas nesses estados. Maximizamos a entropia sujeita às restrições de conservação de partículas e energia, usando multiplicadores de Lagrange  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\delta \left[ \ln W(\{n_i\}) + \alpha \left( N - \sum_i n_i \right) + \beta \left( E - \sum_i n_i \epsilon_i \right) \right] = 0. \quad (4)$$

A maximização leva à ocupação média de cada estado:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} - 1}. \quad (5)$$

Identificando  $\beta = 1/(k_B T)$  e  $\alpha = -\mu/(k_B T)$ , obtemos a distribuição de Bose-Einstein:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/k_B T} - 1} \quad (6)$$

O potencial químico  $\mu$  surge naturalmente como o multiplicador de Lagrange associado à conservação do número de partículas. Fisicamente, ele mede a energia necessária para adicionar uma partícula ao sistema, e sua presença no formalismo grande canônico torna-se essencial para descrever gases quânticos em equilíbrio com um reservatório de partículas [4].

Dado um número fixo de partículas  $N$ , à medida que a temperatura do sistema é reduzida, a população dos estados de menor energia aumenta. Quando a temperatura crítica do sistema,  $T_c$ , é atingida, ocorre a saturação da ocupação dos estados excitados. Essa condição força as partículas a se acumularem no estado de mais baixa energia do sistema à medida que a temperatura é reduzida abaixo de  $T_c$ . Para um sistema de bósons não interagentes, esta temperatura crítica é definida a partir da condição de normalização equação (1), com  $\mu \rightarrow 0$  e a ocupação dada pela equação (6). No formalismo grande canônico, enquanto  $T$  regula a energia média,  $\mu$  aparece na probabilidade de encontrar o sistema com  $N$  partículas, mostrando que  $\mu$  regula a ocupação média de partículas no sistema. No condensado de Bose-Einstein,  $\mu \rightarrow \epsilon_0$ , permitindo que o estado fundamental seja macroscopicamente ocupado. Essa previsão teórica – o chamado condensado de Bose-Einstein – ficou décadas sem comprovação experimental, já que os métodos de resfriamento disponíveis não permitiam atingir temperaturas próximas do zero absoluto.

A possibilidade de observar uma fração macroscópica de partículas no mesmo estado quântico trouxe um novo regime da matéria, onde a mecânica quântica se manifesta em escala mesoscópica ou macroscópica. Esse regime abre caminho para explorar propriedades coletivas que não aparecem em gases ou líquidos clássicos. Vale lembrar que antes da realização experimental do BEC, já eram conhecidos sistemas relacionados, como a superfluidez no hélio-4 e a supercondutividade. Ambos sugeriam que efeitos quânticos coletivos eram reais e podiam ter implicações tecnológicas e conceituais profundas. Assim, o BEC foi visto como um potencial sistema para o entendimento unificado de estados quânticos coerentes da matéria.

O desenvolvimento de técnicas de resfriamento por laser cooling e evaporative cooling nos anos 1980–90 permitiu que átomos neutros fossem resfriados a temperaturas de nanoKelvins. Esse progresso culminou em 1995 com a primeira observação experimental de um BEC em gases diluídos de rubídio e sódio (Cornell, Wieman e Ketterle, laureados com o Nobel de 2001). Esse marco transformou um conceito puramente teórico em uma plataforma experimental. Desde então, os condensados se tornaram um “laboratório quântico” altamente controlável. Eles permitem estudar dinâmicas

fora do equilíbrio e transições de fase quânticas, simular modelos da matéria condensada, explorar fenômenos topológicos e coletivos, como vórtices quânticos, além de servir como base para tecnologias emergentes, incluindo sensores de altíssima precisão e possíveis aplicações em computação quântica.

Neste trabalho, propomos excitar um BEC ao aplicar, sobre o potencial harmônico de confinamento tridimensional, perturbações espaço-temporais dos tipos  $A \cos(kz - \Omega t)$  e  $A \cos(kz) \cos(\Omega t)$ , ou seja, perturbaremos o sistema apenas na direção axial, de forma a simular o protocolo experimental do Grupo de Óptica “Milton Ferreira de Souza” do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo. Vamos estudar os modos coletivos gerados no BEC a partir de tais perturbações, calculando sua evolução temporal através da minimização da Lagrangiana do sistema perturbado. Na sequência iremos derivar as equações que regem a evolução temporal dos BECs de sistemas reais, isto é, considerando a interação entre os átomos. Escolheremos o *ansatz* para a função de onda do condensado, cujos parâmetros variacionais serão usados para estudar a dinâmica dos modos.

## 2. A Equação de Gross-Pitaevskii

Os átomos, de maneira geral, interagem via diversos potenciais complexos, como por exemplo forças de van der Waals, efeitos de spin, orbitais eletrônicos. Contudo, em um gás diluído e ultrafrio, apenas colisões binárias de baixa energia são relevantes. Nesse regime, os átomos passam a maior parte do tempo relativamente afastados uns dos outros, de modo que a interação efetiva entre eles pode ser considerada de curto alcance. Isso significa que, exceto quando estão muito próximos, os átomos não experienciam a presença uns dos outros. Nessa situação, em vez de precisarmos conhecer em detalhe o potencial microscópico real, podemos substituí-lo por uma interação de contato caracterizada unicamente por um parâmetro: o comprimento de espalhamento  $a_s$ . Fisicamente,  $a_s$  está relacionado ao desvio de fase sofrido pela onda incidente durante o processo de espalhamento. Em baixas energias, o espalhamento é dominado pelo canal  $s$  ( $l = 0$ ), pois os canais com  $l > 0$  são suprimidos pela barreira centrífuga. Assim, no regime de gás diluído, isto é, quando  $a_s n^{1/3} \ll 1$ , com  $n$  sendo a densidade do gás, podemos aproximar o potencial de interação entre os bósons pelo pseudopotencial:

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{7}$$

Sendo  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  a função delta de Dirac e  $g$  a constante de acoplamento

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \tag{8}$$

onde  $\hbar$  representa a constante de Plack e  $m$  a massa atômica do gás. Este potencial  $\delta$ -funcional reproduz

corretamente a amplitude de espalhamento em gases diluídos e ultrafrios de bósons, onde toda a complexidade da interação interatômica pode ser resumida em um único parâmetro físico ( $a_s$ ), que é adequadamente modelado pelo potencial de contato, reproduzindo com precisão a física das colisões de baixa energia [5].

Assim, podemos escrever a Hamiltoniana do sistema de  $N$  bósons interagentes:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}_i) + \sum_{i<j} g\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right], \tag{9}$$

com  $V_{ext}(\mathbf{r}_i)$  sendo o potencial externo (potencial de armadilha) e  $\mathbf{p}_i$  o momentum da  $i$ -ésima partícula de massa  $m$ .

A caracterização de um sistema físico requer a medição de suas grandezas fundamentais, como energia ou momento linear. Na mecânica clássica, um sistema é descrito por um conjunto completo de variáveis mensuráveis, por exemplo, a posição  $\mathbf{r}$ , o momento  $\mathbf{p}$  e o momento angular  $\mathbf{L}$  de um corpo rígido de massa  $m$  e momento de inércia  $I$ . Já na mecânica quântica, essas grandezas são representadas por operadores  $\hat{\mathbf{O}}$  que atuam no espaço de Hilbert das funções de onda [6]; esse procedimento é conhecido como primeira quantização. Na chamada segunda quantização, em vez de quantizarmos diretamente as partículas, quantizamos os campos que as descrevem. Nesse formalismo, o número de partículas é controlado por operadores de criação e aniquilação que atuam no espaço de Fock. Para o caso de bósons indistinguíveis, o sistema pode ser descrito em termos da ocupação dos níveis de energia acessíveis, o que permite reescrever a Hamiltoniana de forma conveniente em termos do operador de campo bosônico:

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \frac{g}{2} \iint \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}. \tag{10}$$

Em que  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)^\dagger$  e  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  são os operadores de criação e aniquilação da partícula na posição  $\mathbf{r}$ . Esses operadores obedecem às relações de comutação bosônica:

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{11}$$

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = 0. \tag{12}$$

Portanto, para considerar a evolução do operador de campo, usamos a equação de movimento de Heisenberg, e aplicamos então as relações de comutações nas equações (11) e (12):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}] = \left[ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right) + g\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \right] \times \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \tag{13}$$

Vamos usar a aproximação de campo médio na expressão acima, substituindo o operador  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  por seu valor esperado  $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \psi_0(\mathbf{r}, t)$ , ou seja, pela substituição de um grau de liberdade quântico pela aproximação clássica [7]. Podemos escrever  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \phi_j(\mathbf{r}, t) \hat{a}_j$ , sendo  $\hat{a}_j^\dagger$  e  $\hat{a}_j$  os operadores de criação e aniquilação da partícula no estado  $\phi_j$ . Como queremos explorar o estado fundamental do sistema, uma forma conveniente de se escrever o operador  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  é:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}, t) \hat{a}_0 + \sum_{j \neq 0} \phi_j(\mathbf{r}, t) \hat{a}_j. \quad (14)$$

Dado o operador número  $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , seu valor esperado para o estado fundamental é  $N_0 = \langle \hat{N}_0 \rangle = \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle$ . Devido à comutação  $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 1$ , podemos expressar  $N_0 = \langle \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger + 1 \rangle$ , de modo que é possível aproximar  $\langle \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \rangle \simeq N_0$ , pois  $N_0 \gg 1$ . Em consequência desse fato,  $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] \simeq 0$ , e podemos tratar  $\phi_0 \hat{a}_0$  como um campo clássico. Além disso, como  $N_0 = \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle = \langle \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \rangle$ , vem  $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^\dagger = \sqrt{N_0}$ , que é a aproximação de Bogoliubov [8, 9]. Assim, escrevemos a equação (14) como:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) &= \Psi_0(\mathbf{r}, t) + \delta \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \\ &= \sqrt{N_0} \phi_0(\mathbf{r}, t) + \sum_{j \neq 0} \phi_j(\mathbf{r}, t) \hat{a}_j. \end{aligned} \quad (15)$$

Finalmente, aplicando a equação acima à equação (13) e considerando somente os termos de ordem zero em  $\delta \hat{\Psi}$ , vem a equação de Gross-Pitaevskii (GPE):

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_0(\mathbf{r}, t) \\ = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g |\Psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi_0(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (16)$$

A equação (16) descreve a evolução da função de onda do BEC, e é válida no regime de gases ultrafrios, isto é, cuja temperatura tende ao zero absoluto e muito diluídos, com espaçamento interatômico ( $d \sim n^{-1/3}$ ) muito maior que o comprimento de espalhamento  $a_s$ . O seu termo não linear  $g |\Psi_0|^2$  representa as interações entre os átomos. A partir de sua solução podemos encontrar o funcional de energia relacionado ao BEC:

$$\begin{aligned} E[\Psi_0] &= \frac{\langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \\ &= \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi_0(\mathbf{r})|^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2} |\Psi_0(\mathbf{r})|^4 \right] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (17)$$

Podemos usar método variacional para minimizar a ação relativa à Hamiltoniana com a variação da função de onda do sistema. Dessa forma obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi_0^*} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}_0^*} \right) = 0, \quad (18)$$

com a Lagrangiana do sistema dada por:

$$\begin{aligned} L &= E - \mu N \\ &= \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi_0(\mathbf{r})|^2 + [V_{ext}(\mathbf{r}) - \mu] |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{g}{2} |\Psi_0(\mathbf{r})|^4 \right\} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (19)$$

Definimo o potencial químico  $\mu$  como a energia necessária para colocar (ou retirar) uma partícula no sistema.

Dessa forma, pelas equações (19) e (18), vem a GPE independente do tempo

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \right) \Psi_0(\mathbf{r}) = \mu \Psi_0(\mathbf{r}). \quad (20)$$

### 3. A Aproximação de Thomas-Fermi

A aproximação de Thomas-Fermi (TF) se baseia em desprezarmos o termo cinético da equação (20), devido ao grande número de partículas no sistema interagente, cuja distribuição acaba por amenizar os gradientes de densidade locais, com exceção das regiões das bordas. Para um potencial de armadilha harmônico, essa condição se traduz em altos valores da razão [10]

$$u = \frac{8\pi a N}{l_0}, \quad (21)$$

que compara a dimensão do sistema interagente com a largura do estado fundamental do oscilador  $l_0 = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ , correspondente ao aprisionamento harmônico. O termo  $u$  também representa a razão entre a energia de interação e a energia cinética. Com essa aproximação a equação (20) se torna

$$V_{ext}(\mathbf{r}) \Psi_0(\mathbf{r}) + g |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \Psi_0(\mathbf{r}) = \mu \Psi_0(\mathbf{r}), \quad (22)$$

de modo que podemos definir a densidade de Thomas-Fermi:

$$\begin{aligned} n_{TF}(\mathbf{r}) &= |\Psi_{TF}(\mathbf{r})|^2 = \frac{\mu - V_{ext}(\mathbf{r})}{g} \\ \Rightarrow |\Psi_{TF}(\mathbf{r})| &= \sqrt{\frac{\mu - V_{ext}(\mathbf{r})}{g}}. \end{aligned} \quad (23)$$

No entanto, uma densidade negativa (que ocorre se  $V_{ext} > \mu$ ) não é fisicamente possível, sendo razoável impor uma função de Heaviside à equação anterior, de forma que

$$n_{TF}(\mathbf{r}) = \frac{\mu - V_{ext}(\mathbf{r})}{g} \Theta(\mu - V_{ext}), \quad (24)$$

sendo a função de Heaviside:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (25)$$

Considerando o potencial harmônico:

$$V_{ext}(x, y, z) = \frac{m}{2}(x^2\omega_x^2 + y^2\omega_y^2 + z^2\omega_z^2), \quad (26)$$

e o raio de Thomas-Fermi  $R_j$ , que delimita a nuvem condensada na direção  $j$  [8]

$$R_j = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_j^2}}, \quad (27)$$

reescrevemos a equação (24) como:

$$n_{TF}(x, y, z) = n_0 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2}\right) \times \Theta \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2}\right), \quad (28)$$

sendo  $n_0 \equiv n(0, 0, 0) = \mu/g$  a densidade de pico do BEC. A densidade de Thomas-Fermi  $n_{TF}$  tem uma seção transversal parabólica e preenche o interior de um elipsoide [11].

Por razões experimentais, devido à simetria axial do aprisionamento com campo magnético de quadrupolo, escrevemos o potencial da equação (26) da forma:

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}\omega_r^2(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2), \quad (29)$$

para  $\omega_r = \omega_x = \omega_y$  a frequência radial do oscilador. O fator  $\lambda = \omega_z/\omega_r$  define a assimetria da armadilha e, conseqüentemente, é proporcional à razão entre os raios da nuvem condensada segundo a equação (27). A equação do elipsoide se torna:

$$x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2 = R_r^2. \quad (30)$$

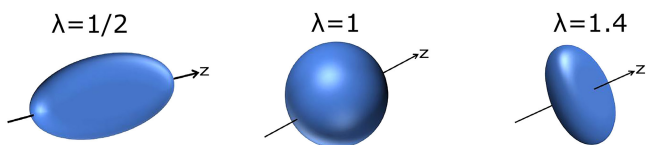
A Figura 1 ilustra três possíveis formatos para nuvem condensada com a variação da assimetria da armadilha harmônica  $\lambda$ , segundo a equação (30).

Considerando a condição de normalização da função de onda do BEC

$$N_0 = \int |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (31)$$

podemos, a partir da equação (28), encontrar o número de partículas condensadas em termos das densidade de pico e dimensões do BEC:

$$N_0 = \frac{8\pi}{15}n_0R_xR_yR_z. \quad (32)$$



**Figura 1:** Formatos da nuvem condensada na aproximação de Thomas-Fermi para diferentes assimetrias do confinamento harmônico: charuto ( $\lambda < 1$ ), esfera ( $\lambda = 1$ ) e panqueca ( $\lambda > 1$ ).

## 4. Método Variacional

Na mecânica clássica, o método variacional se manifesta de forma natural no *princípio da mínima ação* de Hamilton [12]. A ação é definida como a integral da lagrangiana ao longo do tempo:

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (33)$$

onde  $L(q, \dot{q}, t) = T - V$  é a lagrangiana do sistema. O princípio variacional afirma que a trajetória real do sistema  $q(t)$  torna a ação estacionária:

$$\delta S = 0. \quad (34)$$

A variação leva às equações de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (35)$$

O método variacional também é uma ferramenta para aproximar soluções de sistemas físicos complexos. Em mecânica quântica, por exemplo, é usado para estimar energias fundamentais. A ideia central é escolher uma função de teste (ansatz), calcular um funcional de energia, e otimizar os parâmetros dessa função. Mesmo a equação de Schrödinger pode ser reinterpretada via princípios variacional, conforme exemplificado em nossa seção 2, com a derivação da equação de Gross Pitaevskii. Nessa parte utilizaremos o princípio variacional para descrever a dinâmica das oscilações coletivas do condensado.

Como vimos na seção anterior, a GPE governa a evolução da função de onda macroscópica do BEC. Essa função de onda, por sua vez, é uma função escalar complexa que, por identidade matemática, pode ser decomposta em amplitude e fase

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t)e^{iS(\mathbf{r}, t)}, \quad (36)$$

onde  $f(\mathbf{r}, t)$  e  $S(\mathbf{r}, t)$  são funções de variáveis reais associadas à densidade e fase do BEC, respectivamente. Nesse contexto dos superfluidos, perceba que essa decomposição adquire um significado físico direto: o módulo ao quadrado da função de onda representa a densidade de partículas do condensado ( $|\Psi|^2 = n(\mathbf{r}, t)$ ). Além disso, o gradiente da fase está relacionado ao campo de velocidade superfluido ( $\mathbf{v} = \hbar/m\nabla S(\mathbf{r}, t)$ ). Portanto, de maneira resumida,  $f(\mathbf{r}, t)$  descreve a distribuição espacial de partículas, enquanto  $S(\mathbf{r}, t)$  codifica informação dinâmica sobre o movimento coletivo do fluido quântico. Essa correspondência é a base da chamada formulação hidrodinâmica da GPE [8].

Baseando-nos no perfil de densidade de Thomas-Fermi dado pela equação (28), podemos escolher  $f(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_{TF}(\mathbf{r}, t)}$ , enquanto, para a fase  $S(\mathbf{r}, t)$ , temos a liberdade de introduzir os graus de liberdade relevantes de acordo com o fenômeno que desejamos descrever. Como discutido anteriormente, a fase está

diretamente relacionada ao campo de velocidade do condensado. Assim, é natural propor para  $S(\mathbf{r}, t)$  uma expansão polinomial de baixa ordem

$$S(\mathbf{r}, t) = \alpha_1(t)x + \alpha_2(t)y + \alpha_3(t)(z - z_0) + \beta_1(t)x^2 + \beta_2(t)y^2 + \beta_3(t)(z - z_0)^2, \quad (37)$$

onde  $R_x, R_y, R_z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  e  $z_0$  serão tratados como parâmetros variacionais dependentes do tempo. A escolha dessa forma para a fase é justificada fisicamente: os termos *lineares* descrevem translações do centro de massa do condensado, correspondendo às oscilações de dipolo, enquanto os termos *quadráticos* geram dilatações ou deformações quadrupolares, que estão associados a modos coletivos mais complexos, como os modos de respiração e quadrupolo. Em outras palavras, ao expandir  $S(\mathbf{r}, t)$  em termos polinomiais de baixa ordem, construímos diretamente os campos de velocidade que caracterizam os modos coletivos de baixa energia observados experimentalmente em BECs. Portanto, a solução tentativa geral para a função de onda do condensado pode ser escrita como [13]

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_0 \left( 1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{(z - z_0)^2}{R_z^2} \right)} \times e^{i[\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 (z - z_0)]} e^{i[\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 (z - z_0)^2]} \times \Theta \left( 1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{(z - z_0)^2}{R_z^2} \right), \quad (38)$$

com  $n_0$  dado pela equação (32).

Seguindo [8], faremos a minimização da ação com relação aos parâmetros variacionais

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (39)$$

com  $L$  sendo a Lagrangiana do sistema:

$$L = \int d\mathbf{r} \left[ \frac{i\hbar}{2} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) - \varepsilon \right], \quad (40)$$

e  $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi(\mathbf{r})|^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) |\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2} |\Psi(\mathbf{r})|^4$ . Assim, seguindo [14]:

$$L_0 = -\frac{N\hbar}{7} (-7\alpha_3 \dot{z}_0 + R_x^2 \dot{\beta}_1 + R_y^2 \dot{\beta}_2 + R_z^2 \dot{\beta}_3) - \frac{N\hbar^2}{14m} \left( 7\alpha_1^2 + 7\alpha_2^2 + 7\alpha_3^2 + 4R_x^2 \beta_1^2 + 4R_y^2 \beta_2^2 + 4R_z^2 \beta_3^2 + \frac{1}{R_x^2} + \frac{1}{R_y^2} + \frac{1}{R_z^2} \right) - \frac{mN\omega_r^2}{14} (R_x^2 + R_y^2 + \lambda^2(R_z^2 + 7z_0^2)) - \frac{15gN^2}{28\pi R_x R_y R_z}. \quad (41)$$

Os termos proporcionais a  $1/R_i^2$  referem-se à pressão quântica. Dentro do regime TF, veremos que a contribuição deles será desprezível quando comparada aos demais termos de  $L_0$ .

A Lagrangiana completa será dada pela soma da Lagrangiana da equação (41) com a do potencial da perturbação temporal,  $L_{pert}$ . Esse potencial gera uma perturbação no potencial de armadilha da equação (29), sendo responsável por excitar a nuvem condensada. Sua forma, para uma perturbação do tipo onda estacionária, é dada por:

$$V_{est}(z, t) = A \cos(kz) \sin(\Omega t), \quad (42)$$

ou, para o caso de uma perturbação de onda propagante, temos:

$$V_{osc}(z, t) = A \cos(kz - \Omega t), \quad (43)$$

com os valores de amplitude  $A$ , número de onda  $k$  e frequência  $\Omega$  ajustáveis nos experimentos. Assim, seguindo a equação (43), a expressão total da Lagrangiana equação (40) terá um termo adicional devido à essa excitação dado por:

$$L_{osc} = - \int_V n_0 \left( 1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{(z - z_0)^2}{R_z^2} \right) \times \Theta \left( 1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{(z - z_0)^2}{R_z^2} \right) \times A \cos(kz - \Omega t) dx dy dz. \quad (44)$$

Podemos usar substituição de variáveis  $\vartheta = x/R_x, \xi = y/R_y, \nu = (z - z_0)/R_z$  e  $\Upsilon^2 = \vartheta^2 + \xi^2 + \nu^2$  na integral acima, de forma que

$$L_{osc} = - \int_V n_0 R_0^3 (1 - \Upsilon^2) \Theta(1 - \Upsilon^2) \times A \cos[k(\nu R_z + z_0) - \Omega t] d\vartheta d\xi d\nu. \quad (45)$$

Com a mudança para coordenadas esféricas, teremos:

$$L_{osc} = - \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} n_0 R_0^3 (1 - \Upsilon^2) \Upsilon^2 \sin(\theta) \times A \cos[kR_z \Upsilon \cos(\theta) + kz_0 - \Omega t] d\phi d\theta d\Upsilon. \quad (46)$$

Finalmente, ao realizar a integral obtemos

$$L_{osc} = \frac{15N_0}{k^5 R_z^5} f(z_0, t) [3kR_z \cos(kR_z) + (k^2 R_z^2 - 3) \sin(kR_z)]. \quad (47)$$

Realizando as variações na equação (39) com cada um dos termos variacionais do nosso ansatz, com  $L = L_0 + L_{osc}$ , após simplificarmos o sistema de equações de Euler-Lagrange resultantes, obtemos:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{m\dot{z}_0}{\hbar}, \quad (48)$$

$$\beta_1 = \frac{m\dot{R}_x}{2\hbar R_x}, \quad \beta_2 = \frac{m\dot{R}_y}{2\hbar R_y}, \quad \beta_3 = \frac{m\dot{R}_z}{2\hbar R_z}, \quad (49)$$

$$\ddot{z}_0 = -\lambda^2 \omega_r^2 z_0 + \frac{15}{mk^5 \bar{R}_z^5} [3kR_z \cos(kR_z) + (k^2 R_z^2 - 3) \sin(kR_z)] \frac{\partial f(z_0, t)}{\partial z_0}, \quad (50)$$

$$\ddot{R}_x = -\omega_r^2 R_x + \frac{15gN}{4\pi m R_x^2 R_y R_z} + \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1}{R_x^3}, \quad (51)$$

$$\ddot{R}_y = -\omega_r^2 R_y + \frac{15gN}{4\pi m R_x R_y^2 R_z} + \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1}{R_y^3}, \quad (52)$$

$$\ddot{R}_z = \frac{105}{mk^5 \bar{R}_z^6} f(z_0, t) [(k^3 R_z^3 - 15kR_z) \cos(kR_z) + (15 - 6k^2 R_z^2) \sin(kR_z)] - \lambda^2 \omega_r^2 R_z + \frac{15gN}{4\pi m R_x R_y R_z^2} + \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1}{R_z^3}. \quad (53)$$

Nas equações acima,  $f(z_0, t)$  é dado por:

$$f(z_0, t) \equiv V_{osc}(z_0, t) = A \cos(kz_0 - \Omega t). \quad (54)$$

Para o caso de uma perturbação do tipo estacionária, equação (42), basta consideramos

$$f(z_0, t) \equiv V_{est}(z_0, t) = A \cos(kz_0) \sin(\Omega t). \quad (55)$$

As equações dinâmicas para os raios (Equações (51–53)) e centro de massa da nuvem (equação (50)), serão empregadas para estudarmos a dinâmica da nuvem sob a presença de perturbações externas. Para nossa simulação, iremos adimensionalizá-las através das relações abaixo:

$$A = \bar{A} \hbar \omega_r, \quad (56)$$

$$z_0 = \bar{z}_0 l_0, \quad R_i = \bar{R}_i l_0, \quad (57)$$

$$k = \bar{k} / l_0, \quad (58)$$

$$\Omega = \bar{\Omega} \omega_r, \quad (59)$$

$$P_0 = \frac{15Na_s}{l_0}. \quad (60)$$

Portanto, teremos:

$$\ddot{\bar{z}}_0 + \lambda^2 \bar{z}_0 - \frac{15}{\bar{k}^5 \bar{R}_z^5} [3\bar{k} \bar{R}_z \cos(\bar{k} \bar{R}_z) + (\bar{k}^2 \bar{R}_z^2 - 3) \sin(\bar{k} \bar{R}_z)] \frac{\partial \bar{f}(\bar{z}_0, \tau)}{\partial \bar{z}_0} = 0, \quad (61)$$

$$\ddot{\bar{R}}_x + \bar{R}_x - \frac{P_0}{\bar{R}_x^2 \bar{R}_y \bar{R}_z} - \frac{1}{\bar{R}_x^3} = 0, \quad (62)$$

$$\ddot{\bar{R}}_y + \bar{R}_y - \frac{P_0}{\bar{R}_x \bar{R}_y^2 \bar{R}_z} - \frac{1}{\bar{R}_y^3} = 0, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{R}}_z - \frac{105 \bar{f}(\bar{z}_0, \tau)}{\bar{k}^5 \bar{R}_z^6} [(\bar{k}^3 \bar{R}_z^3 - 15 \bar{k} \bar{R}_z) \cos(\bar{k} \bar{R}_z) + (15 - 6 \bar{k}^2 \bar{R}_z^2) \sin(\bar{k} \bar{R}_z)] \\ + \lambda^2 \bar{R}_z - \frac{P_0}{\bar{R}_x \bar{R}_y \bar{R}_z^2} - \frac{1}{\bar{R}_z^3} = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

com  $\bar{f}(\bar{z}_0, \tau)$  a depender do tipo de perturbação

$$\bar{f}(\bar{z}_0, \tau) = \bar{A} \cos(\bar{k} \bar{z}_0 - \bar{\Omega} \tau), \quad (65)$$

$$\bar{f}(\bar{z}_0, \tau) = \bar{A} \cos(\bar{k} \bar{z}_0) \sin(\bar{\Omega} \tau). \quad (66)$$

Para encontrar as condições do BEC em equilíbrio antes da perturbação, com  $\bar{z}_0 = 0$ , devemos resolver o sistema de equações acopladas:

$$\bar{R}_x - \frac{P_0}{\bar{R}_x^2 \bar{R}_y \bar{R}_z} - \frac{1}{\bar{R}_x^3} = 0, \quad (67)$$

$$\bar{R}_y - \frac{P_0}{\bar{R}_x \bar{R}_y^2 \bar{R}_z} - \frac{1}{\bar{R}_y^3} = 0, \quad (68)$$

$$\lambda^2 \bar{R}_z - \frac{P_0}{\bar{R}_x \bar{R}_y \bar{R}_z^2} - \frac{1}{\bar{R}_z^3} = 0. \quad (69)$$

## 5. Excitações no Condensado

Quando perturbamos um BEC confinado em uma armadilha harmônica, uma das manifestações mais intrigantes da superfluidez é sua capacidade de exibir oscilações coletivas. Essas oscilações, de baixa energia e com comprimento de onda comparável ao tamanho do próprio BEC, são conhecidas como modos coletivos e já foram previstos teoricamente [8, 15, 16] e observados experimentalmente [17, 18] em diversos contextos. O espectro de frequências desses modos pode ser obtido ao se considerar perturbações de pequena magnitude ao redor da solução estacionária. As equações dinâmicas obtidas (Equações 67, 68 e 69) neste contexto são equações diferenciais ordinárias não lineares e acopladas, cuja solução analítica geral é, em regra, inviável. Por essa razão, uma descrição mais completa da dinâmica requer o uso de métodos computacionais capazes de tratá-las de maneira auto-consistente. Essa abordagem não apenas permite explorar a evolução temporal do sistema, mas também oferece uma oportunidade didática: o leitor pode escolher e implementar o método numérico de sua preferência, ajustar os parâmetros do modelo e verificar propriedades fundamentais, como a conservação da energia e do número de partículas. Tais atividades enriquecem o processo de aprendizado ao combinar teoria, simulação e análise crítica dos resultados. Neste trabalho, a integração temporal dessas equações diferenciais foram obtidas a partir do método de Runge-Kutta de quarta ordem [19].

Dentro desse espectro de flutuações de densidade em torno do equilíbrio, o primeiro modo que identificamos é o chamado modo dipolar. Ele corresponde ao movimento

do centro de massa da nuvem condensada ao redor do mínimo do potencial, exatamente como um oscilador harmônico. Dependendo da forma da excitação externa, esse modo pode ocorrer nas três direções espaciais, sendo que as frequências de oscilação correspondem às frequências da armadilha em cada direção. Embora o modo dipolar esteja presente no espectro de excitações do BEC, ele é geralmente considerado um modo de natureza clássica, pois não depende das propriedades quânticas intrínsecas do condensado. Por outro lado, existem modos que surgem exclusivamente do caráter quântico do sistema, como é o caso dos modos monopolar (também conhecido como modo de respiração ou “breathing mode”, em inglês) e quadrupolar. Esses modos descrevem oscilações nos raios do BEC. O modo de respiração caracteriza-se por uma oscilação em fase dos raios do condensado, onde os raios se expandem e se contraem simultaneamente, evocando o movimento de respiração. Já o modo quadrupolar é definido por uma oscilação fora de fase entre os raios, isto é, enquanto uma direção se expande, a outra se contrai. No nosso caso, em que o potencial de confinamento possui simetria cilíndrica, o modo quadrupolar manifesta-se como uma oscilação fora de fase entre os raios nas direções radial e axial. A Figura 2 ilustra a dinâmica desses modos coletivos discutidos aqui.

Os temas modos normais e linearização aparecem naturalmente em mecânica clássica [20], assim como em física quântica. A linearização é o passo que permite tratar um sistema de equações não lineares como um sistema linear de equações diferenciais acopladas. Só nesse regime linear é que os modos normais podem ser identificados de forma clara. A fim de obter as frequências exatas de oscilação dos modos coletivos,

vamos linearizar as equações dinâmicas (adimensionais) do condensado Equações (62–64) expandindo a solução da equação diferencial em torno do valor de equilíbrio  $\bar{R}_{0i}$  obtido nas Equações (67–69)

$$\bar{R}_i(t) = \bar{R}_{0i} + \delta\bar{R}_i(t), \tag{70}$$

com  $i = x, y, z$  e  $\delta\bar{R}_i(t) = \delta\bar{R}_i e^{-i\omega t}$ . Obteremos então:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \delta\bar{R}_i e^{-i\omega t} \\ &= \frac{P_0}{(\bar{R}_{0i} + \delta\bar{R}_i e^{-i\omega t})^2 (\bar{R}_{0j} + \delta\bar{R}_j e^{-i\omega t}) (\bar{R}_{0k} + \delta\bar{R}_k e^{-i\omega t})} \\ &+ \frac{1}{(\bar{R}_{0i} + \delta\bar{R}_i e^{-i\omega t})^3} - \lambda_i^2 \bar{R}_{0i} - \lambda_i^2 \delta\bar{R}_i e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{71}$$

Considerando os termos até primeira ordem em  $\delta\bar{R}_i$ , obteremos o sistema de equações linearizadas para o desvio dos raios em torno do valor de equilíbrio

$$\begin{aligned} \omega^2 \delta\bar{R}_i = & 2 \frac{P_0 \delta\bar{R}_i}{\bar{R}_{0i}^3 \bar{R}_{0j} \bar{R}_{0k}} + \frac{P_0 \delta\bar{R}_j}{\bar{R}_{0i}^2 \bar{R}_{0j}^2 \bar{R}_{0k}} + \frac{P_0 \delta\bar{R}_k}{\bar{R}_{0i}^2 \bar{R}_{0j} \bar{R}_{0k}^2} \\ & + 3 \frac{\delta\bar{R}_i}{\bar{R}_i^4} + \lambda_i^2 \delta\bar{R}_i, \end{aligned} \tag{72}$$

o qual pode ser expresso da forma matricial

$$(\hat{A}_{3 \times 3} - \omega^2 \hat{I}_{3 \times 3}) \delta\hat{R} = 0, \tag{73}$$

com  $\hat{I}$  sendo a matriz identidade. A solução não trivial para a equação acima ocorre quando o determinante da matriz  $\hat{A} - \omega^2 \hat{I}$  é nulo. Os autovalores dessa matriz fornecerão três frequências  $\omega$  reais para o sistema do condensado, as quais correspondem aos modos de oscilação monopolar (ou de respiração), quadrupolar e quadrupolar transversal. Este último não será considerado nesse trabalho a medida que não é sensível ao nosso protocolo de excitação.

Dentro do regime de TF, temos que as frequências dos modos monopolar e quadrupolar apresentam uma aproximação analítica, dada respectivamente por [8, 9]

$$\omega_M = \sqrt{2 + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\sqrt{16 - 16\lambda^2 + 9\lambda^4}}, \tag{74}$$

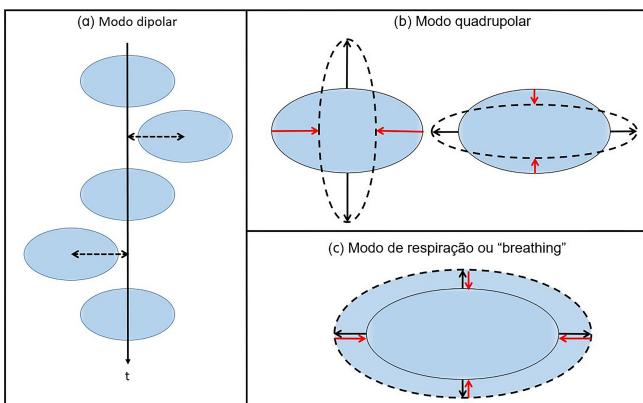
e

$$\omega_Q = \sqrt{2 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\sqrt{16 - 16\lambda^2 + 9\lambda^4}}, \tag{75}$$

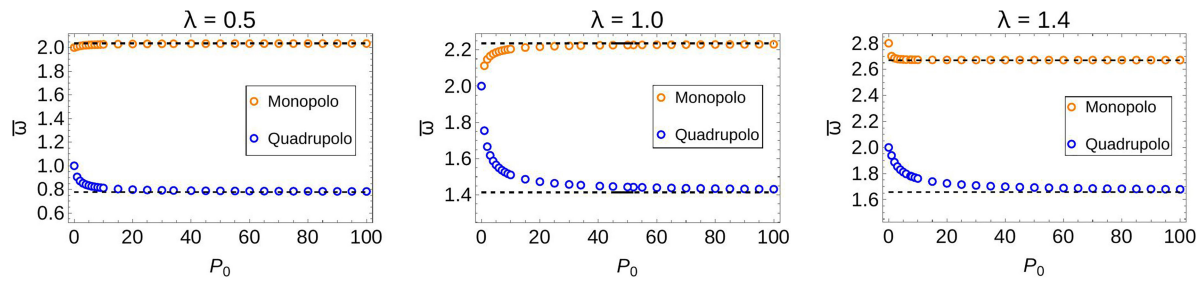
na qual notamos a dependência explícita com a geometria da armadilha de confinamento através do  $\lambda$ .

## 6. Resultados

Para realizarmos a simulação numérica da dinâmica do BEC perturbado, precisamos selecionar os parâmetros adequados para excitação dentro do regime TF. Consideraremos três valores para o fator de anisotropia da armadilha:  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 1.0$  e  $\lambda = 1.4$ , para



**Figura 2:** Representação ilustrativas de alguns modos coletivos de um condensado. (a) Modo dipolar, caracterizado pelo deslocamento periódico do centro de massa da nuvem ao redor do mínimo do potencial. (b) Modo quadrupolar, evidenciando oscilações fora de fase nos raios do condensado; setas vermelhas indicam contração, enquanto setas pretas indicam expansão. (c) Modo monopolar (ou de respiração), representado por oscilações em fase, com os raios se expandindo e contraindo simultaneamente.



**Figura 3:** Variação do parâmetro  $P_0$  para três valores do fator de anisotropia:  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 1.0$  e  $\lambda = 1.4$ . Os pontos representam os valores exatos das frequências dos modos coletivos, obtidos a partir da equação (73); a linha tracejada corresponde à aproximação dessas frequências, conforme descrito nas Equações (74) e (75).

garantirmos uma análise das três geometrias possíveis do condensado, conforme discutido anteriormente. Escolhemos o valor para a interação que nos fornecesse os autovalores da matriz da linearização, equação (73), que se aproximassem da solução analítica dada pela equação (74) e (75). O gráfico da Fig. 3 nos mostra a evolução desses autovalores como função do parâmetro da interação  $P_0$  para as três geometrias de confinamento harmônico. Podemos perceber que para  $P_0 \approx 100$ , os valores das frequências dos modos tende para os valores das previsões analíticas do regime TF, de modo que adotamos  $P_0 = 200$  como uma valor razoável para as nossas simulações.

Para frequência de perturbação  $\bar{\Omega}$ , escolhemos a média aritmética dos autovalores  $\omega_Q$  e  $\omega_M$ :

$$\bar{\Omega} = \frac{\omega_Q + \omega_M}{2}. \tag{76}$$

Isso garantirá que não saíamos muito do regime de ressonâncias e, ao mesmo tempo, que não fiquemos exatamente sobre alguma ressonância, o que poderia fazer um modo coletivo prevalecer sobre outro.

A magnitude do vetor de onda, porém, foi selecionada com base nas dimensões de equilíbrio do BEC, com o seu valor sendo fixado de acordo com a média geométrica dos raios da nuvem:

$$\bar{k} = \frac{2\pi}{(\bar{R}_{0x}\bar{R}_{0y}\bar{R}_{0z})^{1/3}}. \tag{77}$$

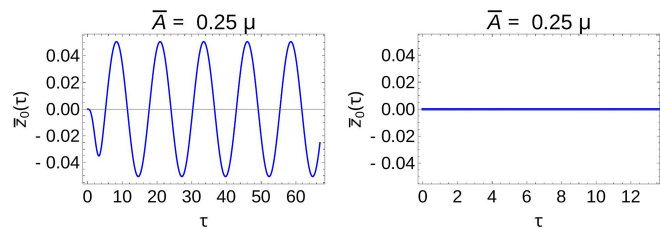
Essa é a escala relevante para os modos coletivos de baixa energia do BEC.

Quanto a amplitude da excitação  $\bar{A}$ , iremos variá-la levando em conta o potencial químico do BEC:

$$\bar{\mu} = \frac{P_0}{2\bar{R}_{0x}\bar{R}_{0y}\bar{R}_{0z}}. \tag{78}$$

A fim de nos mantermos no regime perturbativo, limitamos a amplitude da excitação até o valor máximo de  $\bar{A} = 0.5\bar{\mu}$ .

Após realizadas as calibrações e observações iniciais, passamos à análise dos resultados das simulações. Um dos primeiros resultados relevantes, observado para

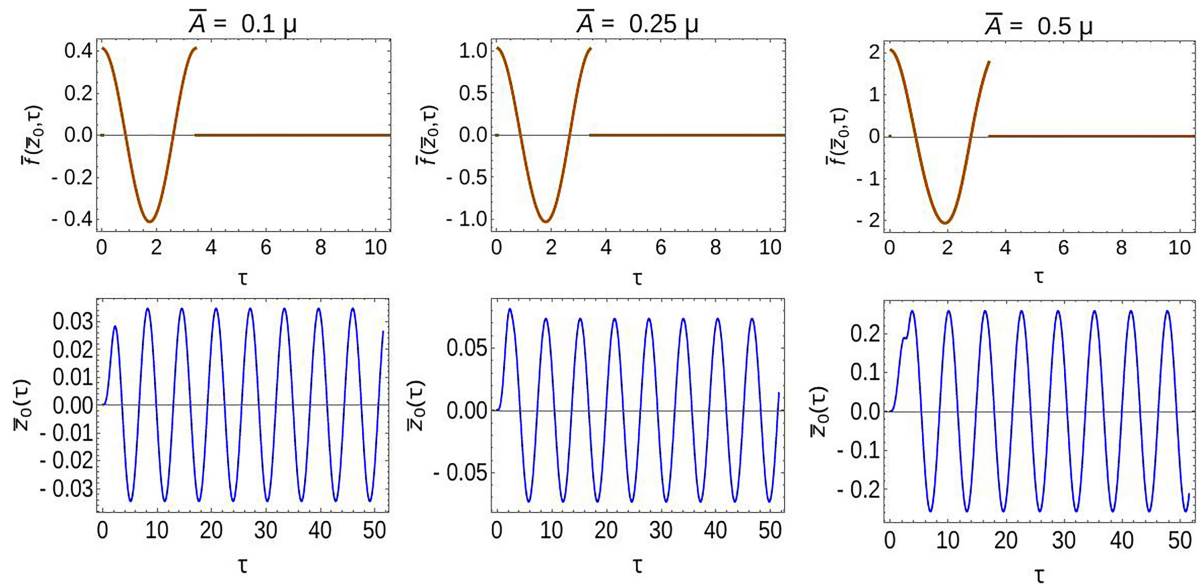


**Figura 4:** Comparação da dinâmica do centro de massa no eixo  $z$ : à esquerda temos uma perturbação do tipo onda propagante; à direita, uma perturbação estacionária. Para excitação foram usados  $\bar{\Omega} = 1.41$  e  $\bar{k} = 1.98$ . Nossa armadilha possui o *aspect-ratio*  $\lambda = 0.5$ , e potencial químico no equilíbrio de  $\bar{\mu} = 3.12$ .

todos os valores de  $\lambda$ , foi a excitação de um modo coletivo clássico adicional – o modo dipolar – no caso da perturbação com onda propagante. Esse modo corresponde à oscilação harmônica do centro de massa da nuvem em torno do mínimo do potencial, com frequência igual à do confinamento radial, ou seja,  $\omega_D = \bar{\omega}_r = 1$  (em unidades adimensionais). É importante notar que o modo dipolar não foi observado quando utilizamos parâmetros análogos na excitação estacionária, conforme ilustrado nos gráficos da Fig. 4, que mostram a evolução temporal da coordenada  $z$  do centro de massa para os diferentes tipos de perturbação, durante e após a aplicação da excitação externa. Ressaltamos que a excitação é interrompida após um período completo de sua frequência característica, isto é,  $T_{exc} = 2\pi/\bar{\Omega}$ .

Outro resultado interessante se deve ao fato da anisotropia da armadilha também influenciar na amplitude da oscilação do centro de massa que, de acordo com o termo da perturbação na equação dinâmica para direção  $z$ , equação (61), se refletirá na modulação do sinal da perturbação externa sofrida pelo condensado. Os valores de  $f(\bar{z}_0, \tau)$  para onda propagante para diferentes amplitudes da perturbação são mostradas pela Fig. 5.

A seguir, apresentamos os espectros de Fourier obtidos a partir do processamento dos sinais de oscilação dos raios da nuvem condensada, os quais resultam da solução das equações dinâmicas acopladas, Equações (61), (62), (63) e (64). A análise foi realizada durante a fase de oscilação livre da nuvem, ou seja, após o desligamento



**Figura 5:** Evolução do sinal da perturbação para diferentes amplitudes da onda propagante. Os gráficos inferiores ilustram a oscilação do centro de massa ao longo do eixo  $z$ , durante e após a aplicação da excitação. Os parâmetros utilizados foram:  $\Omega = 2.17$ ,  $k = 2.27$  e  $\lambda = 1.4$ . Para esse regime de confinamento, o valor do potencial químico é  $\bar{\mu} = 4.72$ .

da perturbação externa, tanto no caso da excitação por onda propagante (equação 65) quanto no caso da excitação por onda estacionária (equação 66).

Para  $\lambda = 0.5$ , correspondendo à uma geometria alongada (tipo charuto), os espectros são mostrados na Fig. 6. A Fig. 7 apresenta os espectros referentes à anisotropia  $\lambda = 1$ , que representa a geometria esférica. Por fim, na Fig. 8 são exibidos os espectros para  $\lambda = 1.4$ , correspondente à uma geometria achatada (tipo panqueca).

Observamos claramente que a geometria alongada do tipo charuto (no nosso caso,  $\lambda = 0.5$ ) favorece a excitação do modo quadrupolar, como evidenciado nos espectros da Fig. 6. Esse efeito é particularmente visível no espectro associado à direção  $z$ , que é justamente a direção em que o sistema foi perturbado. O pico do modo monopolar aparece de forma bem discreta na posição correspondente da linha tarcejada. Para favorecer a excitação do modo monopolar, seria necessária uma perturbação simétrica nas três direções espaciais,  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Além disso, verificamos que a excitação estacionária proporcionou uma melhor definição dos picos associados às frequências dos modos monopolar ( $\omega_M$ ) e quadrupolar ( $\omega_Q$ ), que se apresentaram mais intensos em comparação com o caso da excitação propagante. Para maiores amplitudes da excitação, conseguimos inclusive identificar o pico correspondente à um harmônico superior do modo quadrupolar, com frequência de  $2\omega_Q$ .

Para o caso esférico ( $\lambda = 1$ ), ilustrado na Fig. 7, observamos que os modos monopolar e quadrupolar foram excitados com intensidades semelhantes, apesar da direcionalidade da excitação. Esse comportamento sugere um maior acoplamento entre os modos na geometria esfericamente simétrica. Também é possível notar,

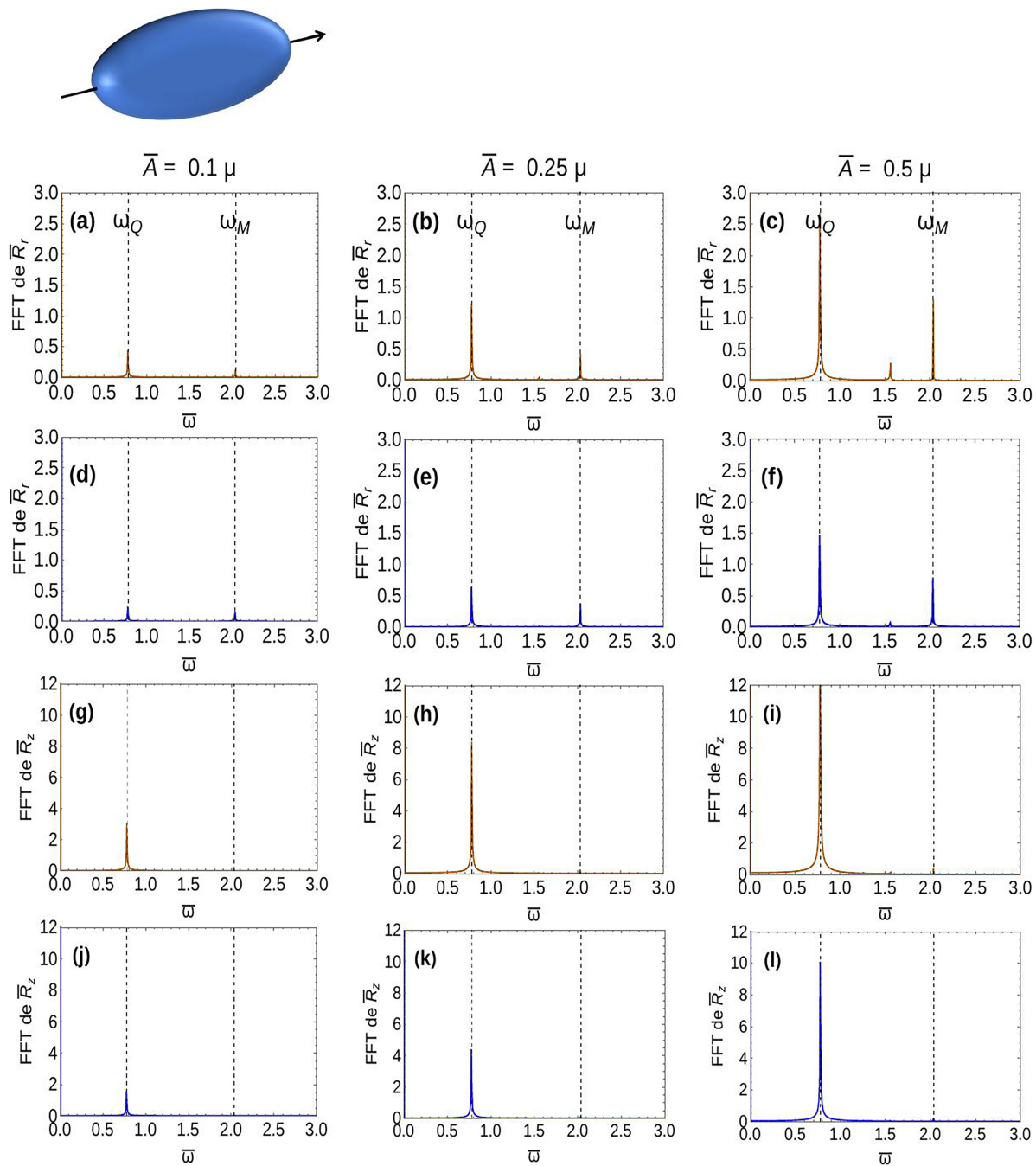
para maiores amplitudes de perturbação, o surgimento de picos espúrios relacionados à excitação de harmônicos superiores do modo quadrupolar. Esses modos adicionais contribuem tanto para o alargamento dos picos dos modos coletivos quanto para um desvio mais acentuado em relação às previsões do modelo linear.

Para a geometria do tipo panqueca (neste trabalho, correspondente a  $\lambda = 1.4$ ), observou-se uma maior instabilidade do sistema para altos valores de  $\bar{A}$ , como evidenciado nos espectros das Fig. 8. Nessas condições, nota-se uma deformação acentuada dos picos associados aos modos coletivos, indicando a quebra do regime perturbativo. Vale destacar que nossa abordagem baseia-se na aproximação de regime linear, enquanto os picos observados nessas situações refletem dinâmicas não lineares de ordem superior, para as quais não dispomos de uma teoria analítica que os descreva com precisão.

Adicionalmente, é importante ressaltar que, no caso da excitação com onda propagante, observa-se um desvio e alargamento menor dos picos espectrais obtidos, em comparação à excitação por onda estacionária. Essa diferença é particularmente evidente para  $\lambda = 1.4$ , onde a amplitude do modo de centro de massa é mais pronunciada e, conseqüentemente, a distorção do sinal de entrada, representado pela função  $f(\bar{z}_0, \tau)$ , torna-se mais significativa.

### 6.1. Interpretação via modelo de níveis quânticos

Como discutido anteriormente, os modos coletivos em um BEC são manifestações do caráter quântico do sistema. Isso permite uma interpretação alternativa dos resultados neste regime: considerar esses modos como estados quânticos de um sistema de níveis em



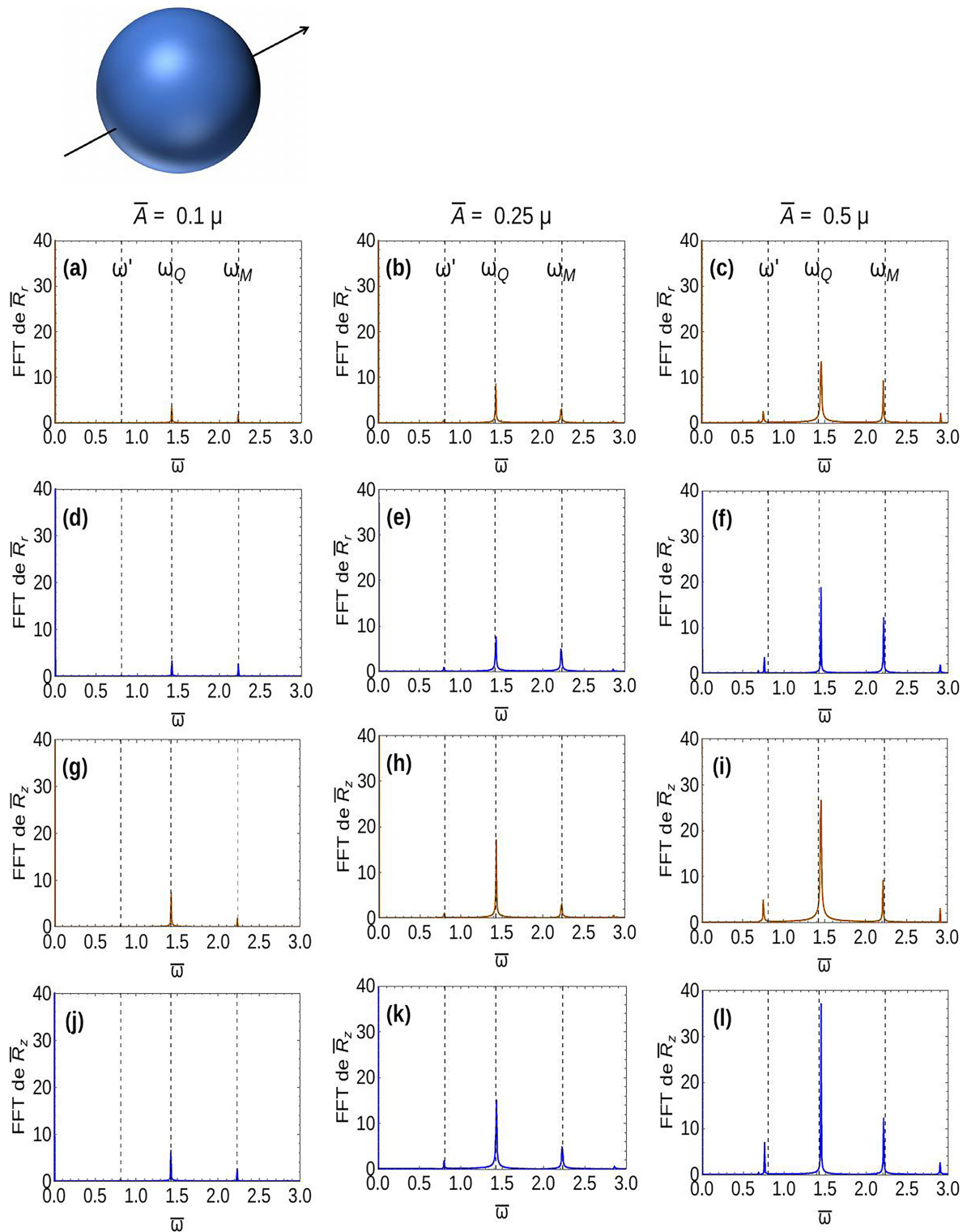
**Figura 6:** Espectros associados ao eixo radial – (a) a (f) – e axial – (g) a (l) – para  $\lambda = 0.5$  e três valores distintos da amplitude de excitação  $\bar{A}$  ( $\bar{\mu} = 3.12$ ). Foram utilizados os parâmetros  $\bar{\Omega} = 1.41$  e  $k = 1.98$ . Os gráficos superiores (curvas em laranja) correspondem à excitação estacionária, enquanto os inferiores (curvas em azul) referem-se à excitação propagante. As linhas tracejadas indicam os valores exatos previstos para as frequências dos modos monopolo ( $M$ ) e quadrupolo ( $Q$ ).

casca [21]. A ideia central é que os modos coletivos correspondem a perturbações lineares ao redor da configuração estacionária do sistema, o que justificou a linearização das equações dinâmicas (62–64) para obtenção das frequências dos modos. Dessa forma, a evolução temporal desses estados quânticos pode ser mapeada utilizando o formalismo de Schrödinger.

Nesse modelo, os modos monopolar e quadrupolar desempenham papel de destaque, uma vez que são os

modos efetivamente excitados no sistema. O estado fundamental, denotado por  $|1\rangle$ , representa o BEC em equilíbrio, isto é, sem qualquer excitação. O primeiro estado excitado,  $|2\rangle$ , corresponde ao modo quadrupolar, enquanto o estado mais energético,  $|3\rangle$ , está associado ao modo monopolar.

A Figura 9 representa esse sistema de três níveis, análogo ao de um átomo sujeito a excitação externa. À medida que mais modos coletivos lineares passam

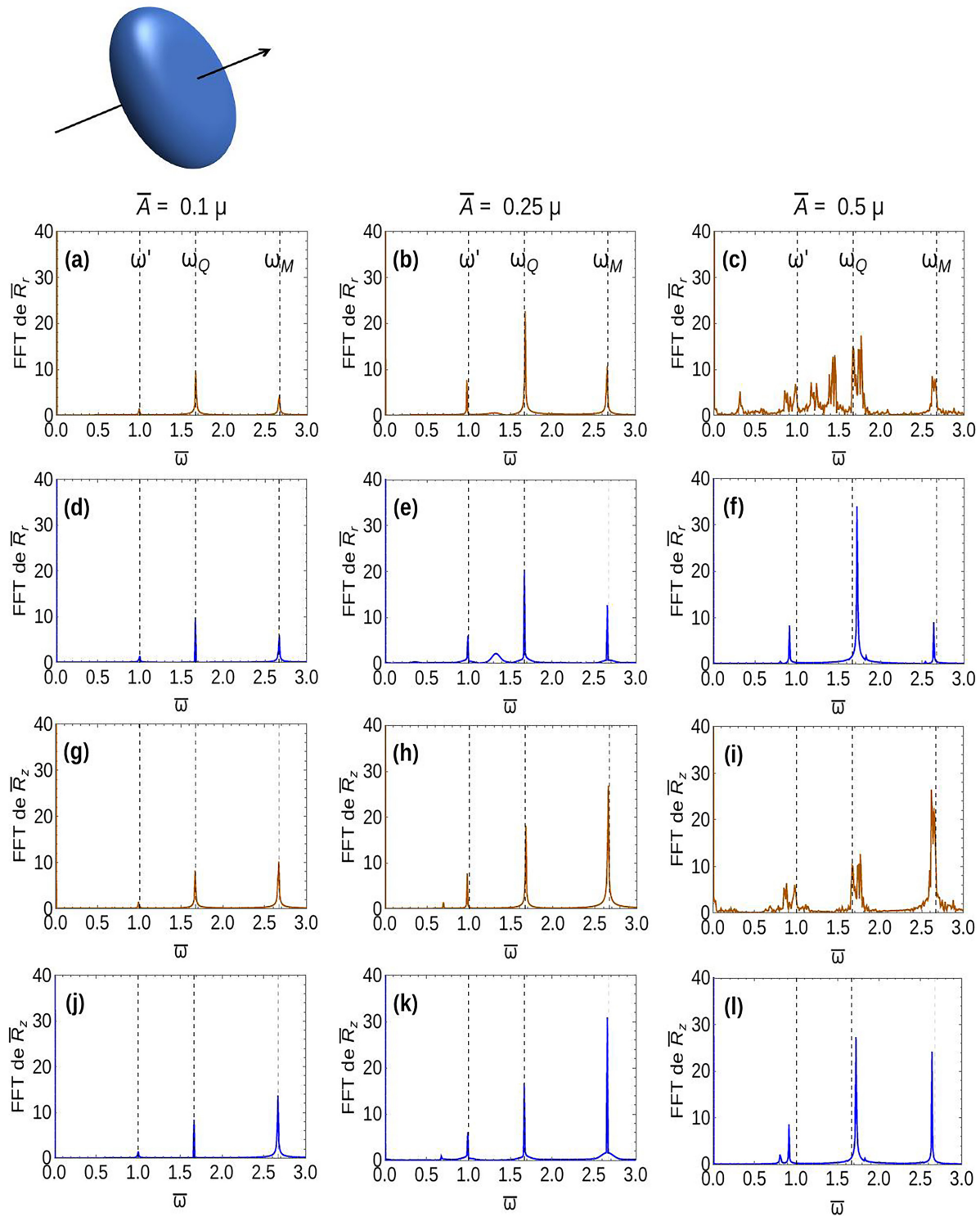


**Figura 7:** Espectros associados ao eixo radial – (a) a (f) – e axial – (g) a (l) – para  $\lambda = 1$  ( $\bar{\mu} = 4.13$ ). Foram utilizados os parâmetros  $\bar{\Omega} = 1.83$  e  $\bar{k} = 2.17$ . Os gráficos superiores (curvas em laranja) referem-se à perturbação estacionária, os inferiores (curvas em azul), à propagante.

a ser excitados, o sistema pode ser descrito com um número maior de estados quânticos contribuindo para a dinâmica. A configuração esquematizada na Fig. 9 permite três transições possíveis:  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ ,  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$  e  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ . Cada transição está associada a uma

frequência de Rabi, determinada pelos elementos de matriz do operador do potencial externo

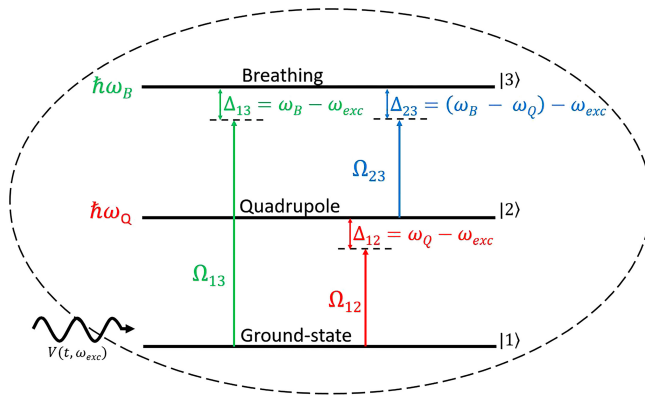
$$\Omega_{ij} = \frac{1}{\hbar} \langle i | \hat{V}_{\text{osc}} | j \rangle. \tag{79}$$



**Figura 8:** Espectros associados ao eixo radial – (a) a (f) – e axial – (g) a (l) – para  $\lambda = 1.4$  ( $\bar{\mu} = 4.72$ ). Foram usados  $\bar{\Omega} = 2.17$  e  $k = 2.27$ . Os gráficos superiores (curvas em laranja) referem-se à perturbação estacionária, os inferiores (curvas em azul), à propagante.

Frequências de Rabi mais altas indicam maior acoplamento entre o estado quântico e a excitação externa, revelando maior probabilidade de popular aquele estado.

Observe que duas transições contribuem para a população do modo monopolar: uma com frequência  $\omega_B$ , e outra com frequência  $\omega' = \omega_B - \omega_Q$ . De fato, ao observarmos a Fig. 7 para o caso  $\lambda = 1$ , o espectro de Fourier



**Figura 9:** Sistema de três níveis sob a influência de uma excitação externa. O estado mais energético representa o modo monopolar (modo de respiração), o estado intermediário representa o modo quadrupolar, e o estado fundamental representa o BEC em repouso. Fonte: [21].

dos raios do BEC exibe picos nas frequências dos modos monopolar e quadrupolar, além de um pequeno pico adicional na frequência intermediária  $\omega' = \omega_B - \omega_Q \sim 0.82$ , exatamente como previsto pelo modelo de três níveis. Também para  $\lambda = 1.4$ , vemos o pico adicional em  $\omega' \sim 1.01$ , conforme evidenciado pela Fig. 8. No caso da geometria tipo charuto ( $\lambda = 0.5$ ), observa-se uma excitação mais intensa do modo quadrupolar, o que sugere que a frequência de Rabi  $\Omega_{12}$  domina a dinâmica nessa configuração. Já para o caso esférico ( $\lambda = 1$ ), espera-se que as frequências de Rabi associadas às três transições –  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{13}$  e  $\Omega_{23}$  – tenham importâncias semelhantes, como de fato é confirmado pelo modelo variacional.

A presença do pico intermediário com frequência  $\omega'$  torna-se mais pronunciada para valores maiores de  $\lambda$  e da amplitude de excitação  $A$ . Para  $\lambda = 0.5$ , entretanto, esse pico intermediário não aparece claramente no espectro de Fourier (ver Figs. 6), sugerindo que a magnitude da frequência de Rabi  $\Omega_{23}$  é irrelevante para a dinâmica nesse caso. Assim, podemos concluir que a frequência de Rabi depende da assimetria da armadilha  $\lambda$  além da amplitude de excitação  $A$ , ou seja,  $\Omega_{ij} = \Omega_{ij}(\lambda, A)$ .

Outro ponto importante é o comportamento do sistema quando a amplitude de excitação é aumentada. Nessa situação, o sistema deixa o regime linear, e modos não-lineares passam a influenciar significativamente a dinâmica. Como o modelo de níveis é baseado em uma descrição linear e coerente, ele deixa de ser adequado. De acordo com [21], esse fenômeno pode ser interpretado como o surgimento de frequências de Rabi suficientemente altas para que as transições ocorram de forma não adiabática, levando à decoerência, conforme previsto pelo mecanismo de tunelamento de Landau-Zener [22, 23]. Além disso, nesse regime onde o comportamento não-linear do sistema desempenha um papel significativo, podemos esperar que hajam deslocamentos na frequência dos modos coletivos, como previsto nas referências [24, 25]. Esse deslocamento de frequência em

relação àquelas previstas pela linearização é claramente observado nos gráficos de maior amplitude de excitação nas Figuras 7 e 8.

## 7. Considerações Finais

Os resultados obtidos indicam que a escolha entre uma perturbação propagante ou estacionária deve ser feita com base nos objetivos específicos do experimento. Para uma maior precisão na determinação das frequências dos modos coletivos, ou para o estudo da dinâmica do centro de massa, recomenda-se a utilização de uma perturbação do tipo propagante. Por outro lado, quando o objetivo é aumentar a intensidade dos picos no espectro de Fourier, ou seja, melhorar a resolução na identificação dos modos coletivos –, a perturbação estacionária se mostra mais eficaz.

A geometria da armadilha de confinamento também desempenha um papel crucial na resposta do sistema. Condensados com geometria do tipo panqueca tendem a apresentar maior instabilidade frente à perturbações. Para estudos focados exclusivamente no modo quadrupolar, a geometria alongada (tipo charuto) é mais adequada do que a esférica. Quando se deseja investigar simultaneamente os modos quadrupolar e monopolar, a geometria esférica é a escolha mais apropriada. Já para estudos centrados no modo monopolar, a geometria tipo panqueca pode ser utilizada, desde que a amplitude da excitação seja mantida dentro de limites que preservem o regime linear.

Quanto à intensidade da perturbação, amplitudes entre 10% e 25% do potencial químico revelaram-se adequadas para excitar os modos coletivos sem romper o regime linear. Amplitudes superiores a esse intervalo podem levar o sistema a regimes não lineares, exigindo modelos teóricos mais sofisticados, que extrapolam o escopo deste trabalho.

## 8. Conclusões

Neste trabalho, investigamos os modos coletivos de um BEC confinado em um potencial harmônico, por meio de um protocolo de excitação baseado em perturbações do tipo onda estacionária e onda propagante. Os resultados revelaram um comportamento distinto no caso da excitação com onda propagante, a qual induz não apenas os modos de deformação (monopolar e quadrupolar), mas também o modo dipolar, associado ao movimento do centro de massa da nuvem. Analisamos a resposta dos modos monopolar e quadrupolar diante da presença do modo dipolar e da variação da amplitude da perturbação, considerando diferentes geometrias da armadilha de confinamento.

O protocolo de excitação proposto demonstrou ser promissor tanto para aprimorar a precisão na detecção dos modos de baixa energia do sistema quanto para permitir a excitação seletiva de modos específicos, em

virtude da dependência do acoplamento entre os modos com a geometria da armadilha. A implementação experimental desses potenciais perturbativos, embora viável, envolve alguns desafios práticos. Em muitos experimentos, utiliza-se a interferência de feixes de laser contrapropagantes para criar potenciais periódicos. Essa técnica é bastante comum, pois permite alcançar alta resolução espacial e um controle preciso da frequência dos feixes. Nessa configuração, tanto a modulação temporal da intensidade quanto a diferença de frequência entre os feixes podem ser ajustadas de modo a gerar ondas estacionárias ou propagantes, que então interagem com o condensado. Outra possibilidade, embora mais complexa, é a utilização de arranjos de campos magnéticos. A partir de configurações adequadas de condutores e bobinas, alimentados por correntes elétricas dependentes do tempo, é possível produzir campos magnéticos conservativos que também variam temporalmente, atuando como potenciais perturbativos adicionais. Nesse caso, o potencial criado se sobrepõe ao potencial da própria armadilha magnética, induzindo o efeito desejado. No entanto, essa abordagem apresenta limitações: a resolução espacial é inferior à obtida por meios ópticos e o sistema tende a ser mais suscetível a ruídos nas correntes elétricas.

Através de um modelamento de três níveis [21], conseguimos mostrar que os modos coletivos podem apresentar efeitos de interferência característicos da superposição de estados quânticos. Assim, um análogo às técnicas de espectroscopia com feixes de luz coerente, usualmente aplicadas em átomos, também podem ser empregadas para excitar modos coletivos, abrindo novas possibilidades de investigações experimentais. Para a excitação seletiva de modos coletivos, a amplitude da perturbação deve ser cuidadosamente ajustada: suficientemente pequena em comparação ao potencial químico do sistema, de modo a mantermos o regime linear, mas ao mesmo tempo grande o bastante para que seus efeitos se distingam de ruídos intrínsecos. Alcançar esse equilíbrio exige um esforço experimental considerável, pois a excitação de um único modo coletivo depende tanto da simetria da perturbação imposta quanto da separação espectral entre as frequências dos diferentes modos. Recentemente, propusemos uma técnica inovadora nesse contexto, baseada na chamada excitação em dois períodos [14, 21], inspirada nos experimentos de Ramsey. Essa abordagem mostrou-se eficaz para aumentar a resolução espectral na medida das oscilações coletivas, além de abrir a possibilidade de investigar transições entre modos coletivos.

## Agradecimentos

Este trabalho foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), por meio dos auxílios 2013/07276-1, 2014/50857-8, 2024/04637-8, 2024/20641-5, e pelo Conselho Nacional

de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por meio do auxílio 465360/2014-9.

## Referências

- [1] S.N. Bose, *Zeitschrift für Physik* **26**, 178 (1924).
- [2] A. Einstein, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* **261**, 44 (1924).
- [3] A. Einstein, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* **3**, 3 (1925).
- [4] S.R.A. Salinas, *Introdução à Física Estatística* (Editora da Universidade de São Paulo – EDUSP, São Paulo, 2005).
- [5] M.M. Lima e L. Madeira, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **45**, e20230079 (2023).
- [6] D.J. Griffiths e D.F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2018), 3 ed.
- [7] P.W. Courteille, S.V. Bagnato e V.I. Yukalov, arXiv:cond-mat/0109421 (2008).
- [8] C.J. Pethick e H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, New York, 2008).
- [9] L.P. Pitaevskii e S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [10] F. Dalfovo e S. Stringari, *Phys. Rev. A* **53**, 2477 (1996).
- [11] A.L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
- [12] A. Deriglazov, *Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism* (Springer, Cham, 2017), 2 ed.
- [13] V.M. Pérez-García, H. Michinel, J.I. Cirac, M. Lewenstein e P. Zoller, *Phys. Rev. A* **56**, 1424 (1997).
- [14] L.A. Machado, *Excitação de condensado de Bose-Einstein por meio da técnica de campos separados*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos (2024).
- [15] S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2360 (1996).
- [16] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii e S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [17] M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. Van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend e W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988 (1996).
- [18] D.S. Jin, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman e E.A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420 (1996).
- [19] H. Gould, J. Tobochnik e W. Christian, *An introduction to computer simulation methods* (Addison-Wesley Reading, Reading, 1988), v. 1.
- [20] A.P. French, *Vibrações e Ondas* (Editora UnB, Brasília, 2002).
- [21] L.A. Machado, L. Madeira, M.A. Caracanhas e V.S. Bagnato, *AVS Quantum Science* **7**, 026201 (2025).
- [22] S.N. Shevchenko, S. Ashhab e F. Nori, *Phys. Rep.* **492**, 1 (2010).
- [23] C. Wittig, *J. Phys. Chem. B* **109**, 8428 (2005).
- [24] F. Dalfovo, C. Minniti e L.P. Pitaevskii, *Phys. Rev. A* **56**, 4855 (1997).
- [25] I. Vidanović, A. Balaž, H. Al-Jibbouri e A. Pelster, *Phys. Rev. A* **84**, 013618 (2011).