

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2577

**O n -PACOTE DE VARIEDADES FLÂMULAS
REAIS E SEUS POLIEDROS**

ANTONIO CONDE
MIRIAN PERCIA MENDES

Nº 79

NOTAS DO ICMC
Série Matemática

São Carlos
Jun./1999

SYSNO	1033913
DATA	/ /
ICMC - SBAB	

O n -pacote de variedades flâmulas reais e seus poliedros

Antonio Conde e Mirian Percia Mendes*

June 15, 1999

Resumo. O objetivo dessa nota é mostrar que as variedades flâmulas reais podem ser vistas como órbitas de uma ação do grupo ortogonal nas matrizes simétricas reais. Apresentamos também um pouco da geometria com que essas variedades estão envolvidas.

Abstract. The purpose of this note is to show that the real flag manifolds can be seen as orbit of an action of orthogonal group on the real symmetric matrices. We also present a bit of Geometry with these manifolds are involved with.

*Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Departamento de Matemática, São Carlos, SP, Brazil, conde@icmc.sc.usp.br e mp-mendes@icmc.sc.usp.br

1 Introdução

Seja $F(n_1, \dots, n_s)$ o conjunto de todas as decomposições ortogonais ordenadas do $\mathbb{R}^n$, $n = n_1 + \dots + n_s$, por subespaços vetoriais reais de dimensões $n_1, \dots, n_s$.

O grupo ortogonal $O(n)$ atua transitivamente em $F(n_1, \dots, n_s)$ de maneira natural com subgrupo de isotropia $O(n_1) \times \dots \times O(n_s)$ e essa ação nos permite concluir que $F(n_1, \dots, n_s)$ e $O(n)/O(n_1) \times \dots \times O(n_s)$ são homeomorfos. Em outras palavras, $F(n_1, \dots, n_s)$ é uma variedade homogênea, compacta, conexa e com dimensão igual a $\binom{n}{2} - \sum_{i=1}^s \binom{n_i}{2}$.

Chamamos $F(n_1, \dots, n_s)$ de *variedade flâmula real*.

Convém observarmos que se $\{n_1, \dots, n_s\} = \{m_1, \dots, m_s\}$, isto é, que se as s -uplas, dadas pela partição de n , diferem apenas pela ordem então $F(n_1, \dots, n_s)$ e $F(m_1, \dots, m_s)$ são difeomorfos e esse difeomorfismo é induzido pelo isomorfismo linear (de espaços vetoriais) que leva uma decomposição na outra. Com isso sem perda de generalidade podemos fixar $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_s$, isto é, podemos fixar apenas as partições crescentes de n .

Afirmamos que as variedades flâmulas reais $F(n_1, \dots, n_s)$ podem ser vistas como órbitas de uma ação do grupo ortogonal nas matrizes simétricas reais $n \times n$.

Vamos trabalhar agora nessa direção e para isso, vamos introduzir alguma notação juntamente com alguns requisitos.

Lembremos que toda matriz A simétrica real $n \times n$ é diagonalizável por matrizes ortogonais.

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ os autovalores dessa matriz, autovalores esses com multiplicidades $n_1, \dots, n_s$, respectivamente.

Observemos que para cada $i = 1, \dots, s$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e, daí, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s$.

Consideremos $\sum_n \lambda$ o conjunto de pontos do $\mathbb{R}^s$ que são obtidos por per-

mutações das coordenadas de λ pela ação do grupo simétrico em n letras.

Schur, em [6], nos diz que se A é hermitiana, isto é, $A = A^*$ então, que a diagonal de A está no invólucro convexo de $\sum_n \lambda$.

Horn, em [4], apresenta uma recíproca desse resultado quando diz que cada ponto do invólucro convexo de $\sum_n \lambda$ é a diagonal de uma matriz hermitiana com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Vamos agora apresentar alguns requisitos da ação mencionada.

2 A Conjugação por elementos do grupo ortogonal

Seja $\mathcal{M}_n$ o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$.

Se fixarmos uma ordem linear para as coordenadas da matriz real $n \times n$ - por exemplo, a ordem do dicionário nos índices - então $\mathcal{M}_n \equiv \mathbb{R}^{n^2}$ onde $\equiv$ denota um isomorfismo linear, dado por tal ordem.

Com isso, $\dim \mathcal{M}_n = n^2$.

Além disso, se considerarmos em $\mathcal{M}_n$ o produto interno dado por: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$ onde tr denota o traço da matriz em questão, então o isomorfismo, mencionado acima, leva o produto interno de $\mathcal{M}_n$ no produto interno euclidiano do $\mathbb{R}^{n^2}$ e, portanto, vamos ter na verdade uma isometria linear.

Sejam $\mathcal{M}_n^s$ e $\mathcal{M}_n^a$ os espaços vetoriais das matrizes simétricas e anti-simétricas reais $n \times n$, respectivamente.

Temos $\dim \mathcal{M}_n^s = n(n+1)/2$ e $\dim \mathcal{M}_n^a = n(n-1)/2 = \dim O(n)$.

Sabemos que $\mathcal{M}_n \equiv \mathcal{M}_n^s \oplus \mathcal{M}_n^a$ (soma direta de espaços vetoriais).

Consideremos

$$\begin{aligned}\mu : O(n) \times \mathcal{M}_n &\rightarrow \mathcal{M}_n \\ (X, A) &\mapsto \mu(X, A) = XAX^t\end{aligned}$$

a conjugação por elementos do grupo ortogonal $O(n)$.

É fácil verificar que μ é uma isometria linear de $\mathcal{M}_n$ que preserva os subespaços $\mathcal{M}_n^s$ e $\mathcal{M}_n^a$. Em outras palavras, para cada $X \in O(n)$,

$$\begin{aligned}\mu_X : \mathcal{M}_n^s &\rightarrow \mathcal{M}_n^s \\ A &\mapsto \mu_X(A) = XAX^t\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mu_X : \mathcal{M}_n^a &\rightarrow \mathcal{M}_n^a \\ A &\mapsto \mu_X(A) = XAX^t\end{aligned}$$

são isometrias lineares, isso pois $\langle XAX^t, XBX^t \rangle = \langle A, B \rangle$.

Assim, a conjugação μ , por elementos do grupo $O(n)$, preserva a decomposição $\mathcal{M}_n \equiv \mathcal{M}_n^s \oplus \mathcal{M}_n^a$ em soma direta.

Ainda, $\text{tr}(XAX^t) = \text{tr}(A)$ e, portanto, μ preserva também o traço. Com isso, μ preserva os hiperplanos $\text{tr}^{-1}(c)$ com $c \in \mathbb{R}$ e, em particular, preserva $\text{tr}^{-1}(1)$.

Nosso interesse está na ação

$$\begin{aligned}\mu : O(n) \times \mathcal{M}_n^s &\rightarrow \mathcal{M}_n^s \\ (X, A) &\mapsto \mu(X, A) = XAX^t\end{aligned}$$

que nada mais é do que a restrição da conjugação μ ao subespaço $\mathcal{M}_n^s$ de $\mathcal{M}_n$.

Observemos que essa ação que também estamos denotando por μ está bem definida pois $(XAX^t)^t = (X^t)^t A^t X^t = XA^t X^t = XAX^t$.

Consideremos $\mathcal{D}_n$ o subespaço de $\mathcal{M}_n^s$ formado pelas matrizes diagonais.

Como $\mathcal{D}_n \equiv \mathbb{R}^n$ então $\dim \mathcal{D}_n = n$.

Ainda, como matrizes simétricas são diagonalizáveis, as órbitas da ação μ encontram $\mathcal{D}_n$, isto é, $F(A) \cap \mathcal{D}_n \neq \emptyset$, $\forall A \in \mathcal{M}_n^s$ onde $F(A)$ denota a órbita da matriz A pela ação μ .

Observemos que se D é a matriz diagonal formada pelos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de A , λ_i com multiplicidade n_i , então $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \lambda_1 I_{n_1} \oplus \dots \oplus \lambda_s I_{n_s}$ onde I_{n_i} é a matriz identidade de ordem n_i , $i = 1, \dots, s$ está na intersecção $F(A) \cap \mathcal{D}_n$. Mais ainda, $F(A) \cap \mathcal{D}_n = \sum_n \lambda$.

Dada $A \in \mathcal{M}_n^s$, se $O(n)_A$ denota seu subgrupo de isotropia pela ação μ então é imediato que $X \in O(n)_A$ se, e somente se $XA = AX$.

Além disso, se $Y = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_s$ onde para cada $i = 1, \dots, s$, Y_i é uma matriz $n_i \times n_i$, isto é, se Y denota uma matriz formada por blocos Y_i de ordem n_i , então colocamos os seguintes resultados.

Lema 2.1 *Sejam $X \in O(n)$ e $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \lambda_1 I_{n_1} \oplus \dots \oplus \lambda_s I_{n_s} \in \mathcal{D}_n$ com $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$. Então no produto DX , as linhas da matriz X ficam multiplicadas pelos λ_i 's e no produto XD , as colunas de X ficam multiplicadas por esses λ_i 's.*

Demonstração. Analisando o que se passa com os produtos DX e XD com $n = 2$, temos:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e daí,

$$DX = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} \end{pmatrix} \quad XD = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} \end{pmatrix}.$$

No caso geral, se denotarmos a matriz X - que tem por linhas, ou colunas $v_1, \dots, v_n$ - por $X = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, ou $X = (v_1, \dots, v_n)$, respectivamente, então

$$D \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ \lambda_n v_n \end{pmatrix} \text{ e } (v_1, \dots, v_n) D = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n). \quad \square$$

Lema 2.2 *Sejam $X \in O(n)$ e $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \lambda_1 I_{n_1} \oplus \dots \oplus \lambda_s I_{n_s} \in \mathcal{D}_n$. Então $X \in O(n)_D \Leftrightarrow X = X_1 \oplus \dots \oplus X_s$ onde para cada $i = 1, \dots, s$, $X_i \in O(n_i)$, isto é, para cada $i = 1, \dots, s$, $X \in O(n_1) \times \dots \times O(n_s)$.*

Demonstração. Se $X = (a_{ij})$ então $DX = XD$, pelo Lema anterior, nos leva a $\lambda_i a_{ij} = \lambda_j a_{ij}$ e daí, $(\lambda_i - \lambda_j) a_{ij} = 0$. Logo, para $\lambda_i \neq \lambda_j$ devemos ter $a_{ij} = 0$ e com isso, tal matriz X é formada por blocos. Assim, para que X comute com D , isto é, para que $X \in O(n)_D$, X deve ter o formato $X_1 \oplus \dots \oplus X_s$ onde para cada $i = 1, \dots, s$, $X_i \in O(n_i)$. $\square$

Com esse lema, chegamos ao resultado dado a seguir.

Teorema 2.3 *Para cada $i = 1, \dots, s$, seja λ_i um autovalor de multiplicidade n_i de uma matriz A simétrica real $n \times n$. Se $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathcal{M}_n^s$ então a órbita de A pela ação μ , que é a órbita de D por essa mesma ação, é o quociente $O(n)/O(n_1) \times \dots \times O(n_s)$.*

Demonstração. A aplicação

$$\begin{aligned} \mu_A : O(n) &\rightarrow \mathcal{M}_n^s \\ X &\mapsto \mu_A(X) = XAX^t \end{aligned}$$

se fatora através do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \xrightarrow{\mu_A} & F(A) = F(D) \\ \downarrow & \nearrow \widehat{\mu}_A & \\ O(n)/O(n_1) \times \dots \times O(n_s) & & \end{array}$$

onde $F(A) = \{XAX^t \in \mathcal{M}_n^s / X \in O(n)\}$ é a órbita de A pela ação. Daí, $\widehat{\mu}_A$ é bijetora e diferenciável. Como seu domínio é compacto, concluímos que é homeomorfismo e difeomorfismo. Portanto, a órbita $F(A)$ de A , pela ação μ considerada, é difeomorfo ao quociente $O(n)/O(n_1) \times \dots \times O(n_s)$. $\square$

Com esse resultado, concluímos que todas as variedades flâmulas reais que vem da partição do mesmo n , mergulham em $\mathcal{M}_n^s \equiv \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.

E mais, a órbita pela ação μ de cada matriz A que tomamos em $\mathcal{M}_n^s$ nos dá um mergulho de alguma variedade flâmula real $F(n_1, \dots, n_s)$ em $\mathcal{M}_n^s$ onde $n = n_1 + \dots + n_s$. Assim, $\mathcal{M}_n^s$ está estratificado por todas as variedades que vem da partição de n .

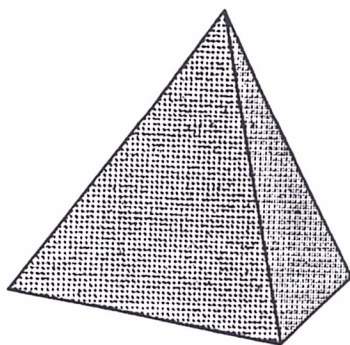
Vejamos agora um pouco da geometria que está associada a essas variedades.

3 Aplicações Geométricas

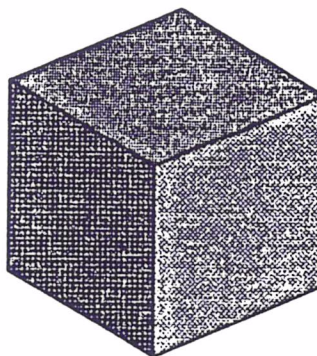
Começamos colocando alguns conceitos clássicos para fixarmos uma notação.

Chamamos de *poliedro* ao sólido limitado por superfícies planas. As porções de planos que formam a superfície do poliedro são polígonos que chamamos de *faces* (F) desse poliedro. Os lados e vértices desses polígonos denominam-se, respectivamente *arestas* (A) e *vértices* (V) do poliedro. Um poliedro é *regular* quando suas faces são polígonos regulares congruentes e os ângulos, em cada vértice, são também congruentes.

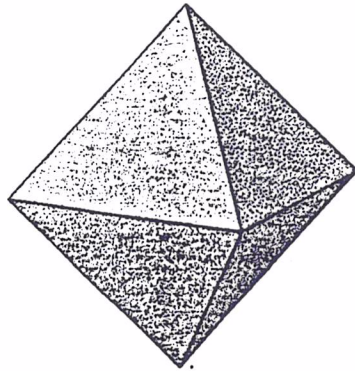
Sabemos que existem apenas 5 poliedros regulares. São eles: o tetraedro, o hexaedro (cubo), o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.



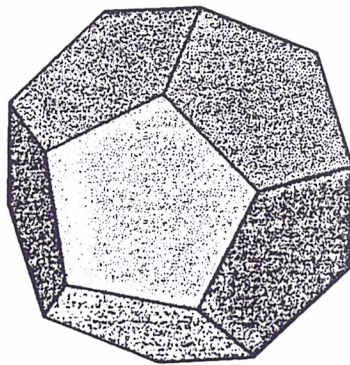
tetraedro



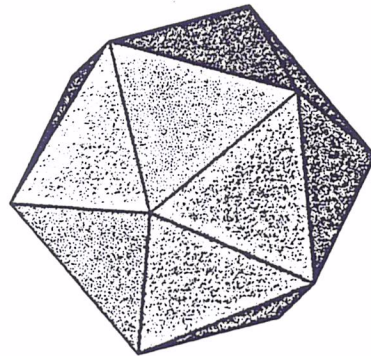
hexaedro (cubo)



octaedro



dodecaedro



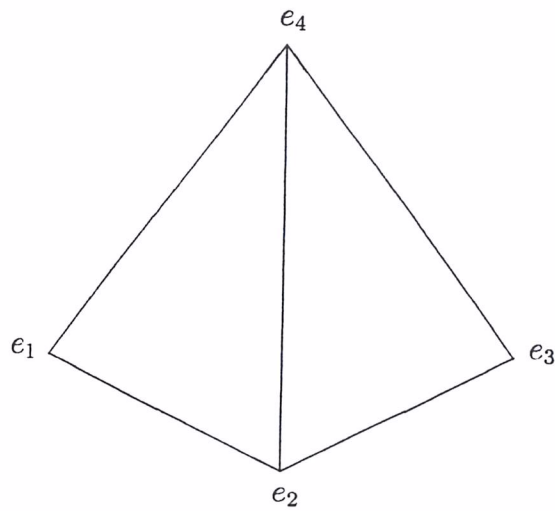
icosaedro

A seguir apresentamos uma tabela contendo os elementos V , A , F dos mesmos.

poliedros	V	A	F
tetraedro	4	6	4
hexaedro	8	12	6
octaedro	6	12	8
dodecaedro	20	30	12
icosaedro	12	30	20

Se considerarmos $n = 4$ então $\mathcal{D}_4 \equiv \mathbb{R}^4$ e, com isso, temos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, a sua base canônica.

No, $\mathbb{R}^3$, as extremidades desses vetores básicos nos dão um tetraedro (cheio) que nada mais é do que o invólucro convexo de $\sum_4 \lambda$ onde $\lambda = (0, 0, 0, 1)$. Esse simplexo básico é dado por: $\sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i$ com $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3, 4$.



Observemos que quando:

- apenas um $\lambda_i = 0$, estamos numa das faces do tetraedro, a saber: na face oposta ao e_i ;
- $\lambda_i = \lambda_j = 0$ com $i \neq j$, estamos na aresta oposta a face determinada por e_i e e_j ;
- três λ_i 's são iguais a zero, estamos num dos vértices do tetraedro.

Além disso, temos as seguintes e apenas essas possibilidades de partições crescentes de $n = 4$:

1. $n_1 + n_2 = 2 + 2$;
2. $n_1 + n_2 = 1 + 3$;

$$3. \ n_1 + n_2 + n_3 = 1 + 1 + 2;$$

$$4. \ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Vejamos cada uma delas separadamente.

$$1. \ n_1 + n_2 = 2 + 2$$

Tomamos λ_1 e λ_2 com multiplicidade 2 cada um deles e daí, a matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2).$$

Cada permutação da quádrupla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$ nos dá um ponto do invólucro convexo de $\sum_4 \lambda$ e, portanto, um vértice de um poliedro.

Como temos 6 possibilidades de permuta, nosso candidato é um poliedro com 6 vértices.

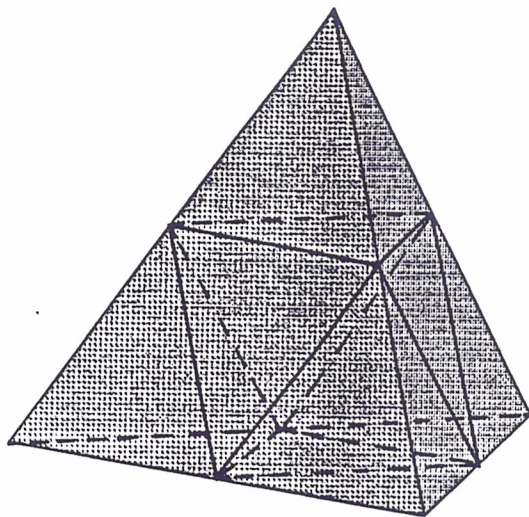
Teorema 3.1 *Os 6 pontos da intersecção $F(2,2) \cap \mathcal{D}_4$ podem ser os vértices de um octaedro regular, quando fazemos a escolha adequada de λ_1 e λ_2 .*

Demonstração. Escolhamos λ_1 e λ_2 no tetraedro cada um deles com multiplicidade 2. Vamos considerar $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1/2$. Então o ponto $\lambda = (0, 0, 1/2, 1/2) \in \mathbb{R}^4$ é um ponto do tetraedro. Na verdade, o ponto médio da aresta determinada por e_3 e e_4 . Esse ponto corresponde a matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \text{diag}(0, 0, 1/2, 1/2).$$

E essa nos dá a órbita $F(2,2)$.

Observemos que quando permutamos as coordenadas de λ , isto é, quando tomamos todos os pontos médios das arestas do tetraedro, percorremos todos os 6 vértices do octaedro. Unindo, então esses pontos médios, obtemos o poliedro desejado. $\square$



2. $n_1 + n_2 = 1 + 3;$

Com o mesmo raciocínio, tomamos λ_1 com multiplicidade 1 e λ_2 com multiplicidade 3 e, daí, a matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2).$$

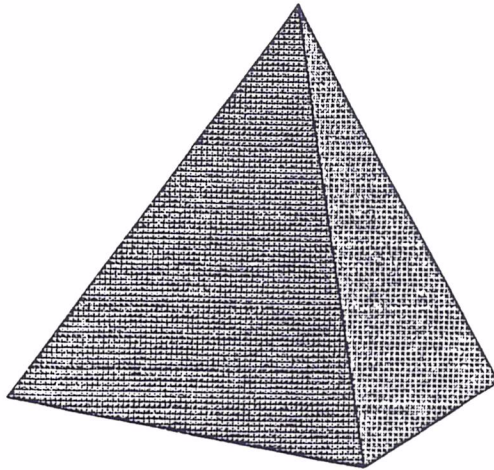
Cada permutação da quádrupla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2)$ é um vértice do invólucro convexo de $\sum_4 \lambda$. Como temos 4 possibilidades de permuta, nosso candidato a tal invólucro convexo é um *tetraedro*.

Teorema 3.2 *Os 4 pontos da intersecção $F(1,3) \cap \mathcal{D}_4$ podem ser os vértices de um tetraedro, quando fazemos a escolha adequada de λ_1 e λ_2 .*

Demonstração. Escolhamos λ_1 e λ_2 no tetraedro com multiplicidades 3 e 1, respectivamente. Vamos considerar $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Então o ponto $\lambda = (0, 0, 0, 1)$ é um ponto do tetraedro. A ele, fazemos corresponder a matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(0, 0, 0, 1)$$

que nos dá a órbita $F(1, 3)$. Permutando as coordenadas de λ , temos $\sum_4 \lambda$ e, daí, obtemos todos os 4 vértices do tetraedro. $\square$



3. $n_1 + n_2 + n_3 = 1 + 1 + 2;$

Tomamos λ_1 com multiplicidade 1, λ_2 com multiplicidade 1 e λ_3 com multiplicidade 2. A matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3).$$

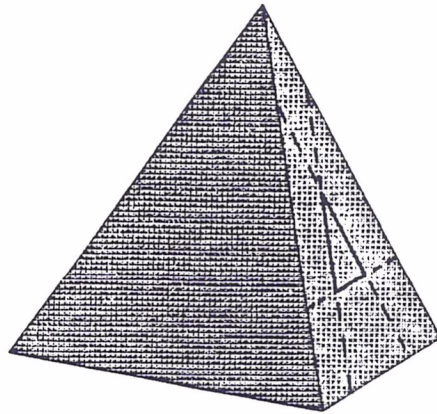
nos dá a quádrupla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ que é um ponto de $\sum_4 \lambda$. Aqui, para esse ponto λ temos 12 possibilidades de permuta.

Teorema 3.3 *Os 12 pontos da intersecção $F(1,1,2) \cap \mathcal{D}_4$ podem ser os vértices de um cuboctaedro, quando fazemos a escolha adequada de λ_1, λ_2 e λ_3 .*

Demonstração. Consideremos λ_1 e λ_2 no tetraedro cada um deles com multiplicidade 1 e λ_3 com multiplicidade 2, respectivamente. Vamos escolher $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1/2$ e $\lambda_3 = 1/4$. Tomando $\lambda = (0, 1/2, 1/4, 1/4)$, observamos que esse ponto está no tetraedro. A ele, fazemos corresponder a matriz diagonal:

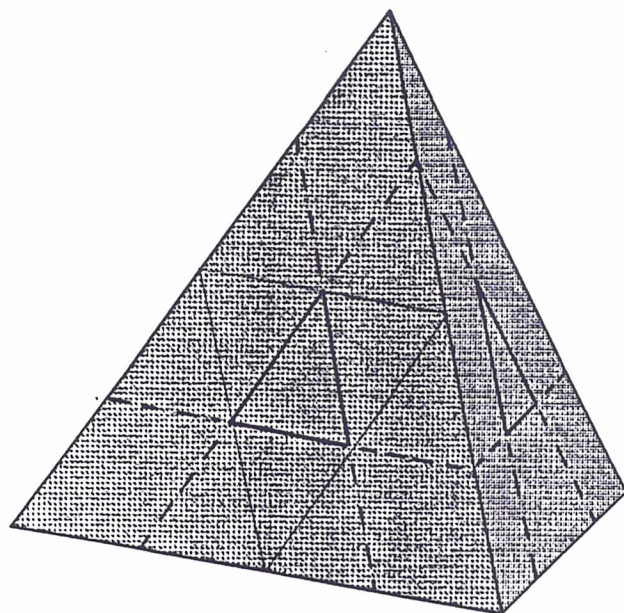
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \text{diag}(0, 1/2, 1/4, 1/4)$$

que nos dá a órbita $F(1,1,2)$. Quando permutamos as coordenadas de λ , em cada face vamos obter um triângulo equilátero, homotético à face com razão $1/4$ e lados paralelos aos da face.

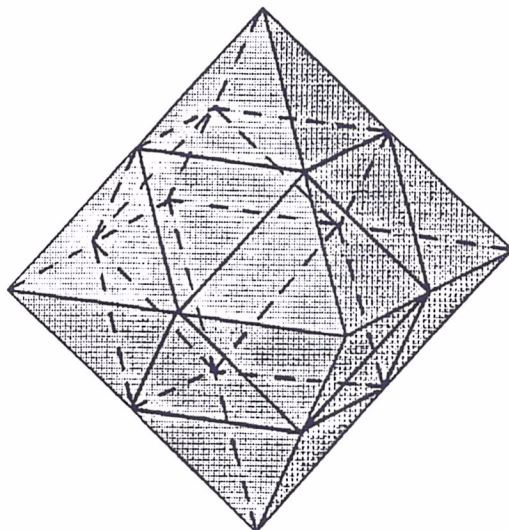


Desse modo, quando permutamos as coordenadas de λ , obtemos 4

triângulos equiláteros, um em cada face do tetraedro original. O invólucro convexo desses 4 triângulos equiláteros está no tetraedro truncado na altura $1/2$, que é o octaedro.



Para chegarmos ao invólucro convexo devemos truncar novamente o octaedro na altura $1/2$ das arestas. O corte de cada "bico" (vértice de encontro de 4 arestas) do octaedro produz uma face quadrada e então em cada uma de suas faces deve restar um triângulo. Como, no octaedro, temos 6 "bicos", temos 12 vértices. Assim chegamos ao cuboctaedro. □



4. $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Aqui, tomamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 todos com multiplicidade 1, a matriz diagonal associada D onde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4),$$

e a quádrupla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Cada permutação dessa última é um candidato a vértice de um poliedro. Observemos que aqui, temos 24 possibilidades de permuta.

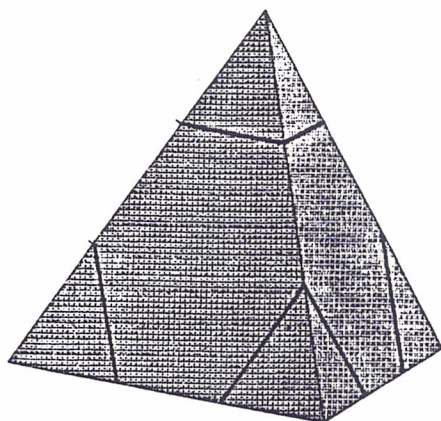
Teorema 3.4 *Os 24 pontos da intersecção $F(1, 1, 1, 1) \cap \mathcal{D}_4$ podem ser os vértices de um octaedro truncado, quando fazemos a escolha adequada de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 .*

Demonstração. Consideremos $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1/6, \lambda_3 = 1/3$ e $\lambda_4 = 1/2$. Observemos que o ponto $\lambda = (0, 1/6, 1/3, 1/2)$ está no tetraedro e que a matriz diagonal associada,

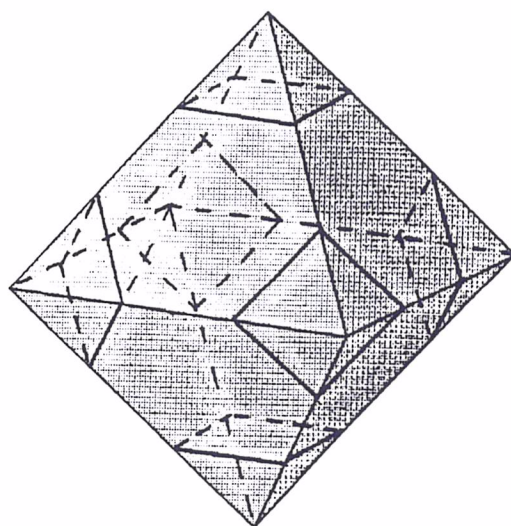
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \text{diag}(0, 1/6, 1/3, 1/2),$$

nos dá a órbita $F(1, 1, 1, 1)$.

Quando permutamos as coordenadas de λ , em cada face, vamos obter um hexágono e quando permutamos todas as coordenadas de ponto λ , obtemos 4 hexágonos, um em cada face do tetraedro original. O invólucro desses 4 hexágonos está no tetraedro truncado na altura de $1/2$ de cada aresta, isto é, no octaedro.



Para chegarmos ao invólucro convexo devemos então truncar o octaedro na altura de $\frac{1}{3}$ de cada aresta. O corte de cada "bico" do octaedro produz uma face quadrada e, sendo assim, em cada face do octaedro deve restar um hexágono. Como no octaedro temos 6 bicos, chegamos aos 24 vértices do octaedro truncado. $\square$



O aparecimento desse poliedro é, bastante curioso pois, juntamente com o hexaedro e o dodecaedro rômico, é um dos três únicos sólidos que tecem o $\mathbb{R}^3$.

Observação 3.5 *O caso $F(1, 3) = \mathbb{R}P^3$ nos diz que essa variedade mergulha em $\mathcal{M}_4^s \equiv \mathbb{R}^{10}$. Mais geralmente, $F(1, n) = \mathbb{R}P^n$ pode ser mergulhado em $\mathcal{M}_{n+1}^s$ quando usamos a partição $1 + n$. Além disso, $|\mathbb{R}P^n \cap \mathcal{D}_n| = n + 1$ pontos e esses pontos nos levam a um simplexo básico do $\mathbb{R}^n$.*

4 Considerações Finais

Vimos que $\mathcal{M}_n^s \equiv \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ é folheado por flâmulas de diferentes dimensões, cada uma delas compacta proveniente de uma partição (crescente) desse n . Além disso, $\mathbb{R}^n \equiv \mathcal{D}_n$ é atravessado várias vezes por cada flâmula. E, mais, se $n = n_1 + \dots + n_s$ então a intersecção $F(n_1, \dots, n_s) \cap \mathcal{D}_n$ tem $n!/n_1! \dots n_s!$ pontos. Isso porque, cada λ_i ($i = 1, \dots, s$) da matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ - cuja órbita $F(D)$ é a flâmula $F(n_1, \dots, n_s)$ - tem multiplicidade n_i .

Lema 4.1 *Se $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathcal{D}_n$ (λ_i com multiplicidade n_i , $i = 1, \dots, s$) então o espaço tangente à variedade flâmula $F(n_1, \dots, n_s)$ no ponto D é dado por: $T_D F(D) = \{XD - DX/X^t = -X\}$.*

Demonstração. Vejamos que a imagem do espaço vetorial real das matrizes $n \times n$ anti-simétricas, pela derivada da aplicação μ_D no ponto I_n é o espaço tangente à flâmula $F(n_1, \dots, n_s)$ no ponto $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$.

O diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \in O(n) & \mapsto & \mu_D(X) = XDX^t = \psi(X, X^t) \in \mathcal{M}_n^s \\ & \searrow & \nearrow \\ & \xi(X) = (X, X^t) \in O(n) \times O(n) \end{array}$$

nos dá:

$$\begin{aligned} d\xi(X_0)Y &= (Y, Y^t); \\ d\psi(X_0, Y_0)(X, Y) &= X_0DY^t + XDY_0^t \end{aligned}$$

e,

$$d\mu_D(X_0)(X) = X_0DX^t + XDX_0^t.$$

Logo, a derivada de μ_D em $X_0 = I_n$ é dada por $d\mu_D(I_n)(X) = XD - DX$, já que $X^t = -X$. Desse modo, a imagem de $d\mu_D(I_n)$ é o subespaço das matrizes do tipo $XD - DX$ com X tangente a $O(n)$ na identidade e D diagonal fixa. Como μ_D é a projeção de $O(n) \rightarrow F(n_1, \dots, n_s)$ e, portanto, tem derivada sobrejetora então a imagem de $d\mu_D(I_n)$ é o espaço tangente à flâmula $F(n_1, \dots, n_s)$ no ponto $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ onde cada λ_i , $i = 1, \dots, s$ tem multiplicidade n_i . $\square$

Observação 4.2 O resultado apresentado nesse Lema é válido para qualquer matriz simétrica A . Nesse caso, $T_A F(A) = \{XA - AX/X^t = -X\}$.

Teorema 4.3 A flâmula $F(D)$, por $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathcal{D}_n$ - onde para cada $i = 1, \dots, s$, λ_i tem multiplicidade n_i e $n = n_1 + \dots + n_s$ - corta $\mathcal{D}_n$ ortogonalmente, i.é, $\mathcal{D}_n$ é um n -plano perpendicular a flâmula em cada ponto de $F(D) \cap \mathcal{D}_n$.

Demonstração. Em $\mathcal{M}_n$, espaço vetorial real das matrizes $n \times n$, temos o produto interno dado por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$ que preserva a decomposição $\mathcal{M}_n \equiv \mathcal{M}_n^s \oplus \mathcal{M}_n^a$ onde $\mathcal{M}_n^a \equiv T_{I_n} O(n)$ é o subespaço vetorial de $\mathcal{M}_n$ formado pelas matrizes anti-simétricas.

Consideremos $Y_0 \in \mathcal{D}_n$ e daí, $Y_0(XD - DX)$.

Observemos que como $D \in \mathcal{D}_n$ então DX e XD tem a mesma diagonal e, portanto, a diagonal de $d\mu_D(I_n)(X)$ é nula. Então $\text{tr}(Y_0(XD - DX)) = \text{tr}((XD - DX)Y_0^t) = \langle XD - DX, Y_0 \rangle = 0$, i.é, $\langle d\mu_D(I_n)(X), Y_0 \rangle = 0$.

Logo, pelo Lema anterior, concluímos que $F(n_1, \dots, n_s)$ corta $\mathcal{D}_n$ ortogonalmente. $\square$

Referências

- [1] ATIYAH, M.F. Convexity and commuting hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.*, v.14, p.1-15, 1982.
- [2] CUNDY, H.M.;ROLLETT, A.P. *Mathematical Models*. 2 ed. Oxford, Univ. Press, 1954.
- [3] HOFFMAN, K.;KUNZE, R. *Linear Algebra*. 2 ed., Anglewood cliffs, Prentice Hall, 1979.

- [4] HORN, A. Doubly stocastic matrices and the diagonal of a rotation matrix. *Amer. J. Math.*, v.75, p. 620-30, 1954.
- [5] LANG, S. *Linear Algebra*. 3 ed. New York, Springer, 1987.
- [6] SCHUR, I. Über eine klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf der Determinantentheory. *Sitzungsberichte der berliner mathematischen gedellschaft.*, v.22, p.9-20, 1923.

NOTAS DO ICMC

SÉRIE MATEMÁTICA

- 078/99 MENEGATTO, V.A.; PERON, A.P. – Positive definite Kernels on complex spheres.
- 077/99 ZVENGROWSKI, P. – Seminar on flag manifolds USP at São Carlos.
- 076/99 ARRIETA, J.M.; CARVALHO, A.N.; RODRIGUEZ-BERNAL, A. – Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions.
- 075/99 CREMA, J.; BOLDRINI, J.L. – More on forced periodic solutions of quasi-parabolic equations.
- 074/99 CREMA, J.; BOLDRINI, J.L. – Periodic solutions of quasilinear equations with discontinuous perturbations.
- 073/99 MENDES, M.P. – An algebraic problem and the software Maple.
- 072/99 BRUCE, J.W.; TARI, F. – Duality and implicit differential equations.
- 071/99 SUN, X.; MENEGATTO, V.A. – Strictly positive definite functions on the complex Hilbert sphere.
- 070/99 MANCINI, S.; RUAS, M.A.S.; TEIXEIRA, M.A. – On divergent diagrams of finite codimension.
- 069/98 LINHARES, O. L.; ANDRADE, E.X.L. DE – Matrizes especiais matrizes de teste.