

METÓDO DE SENSIBILIDADE DE TRAJETÓRIA APLICADA À ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

ÉCYO R. C. FARIAS* ELMER P. T. CARI* LUÍS F. C. ALBERTO*

*Universidade de São Paulo - EESC, SP, Brasil

Email: ecyo.farias@usp.br; elmerpab@sc.usp.br; lfcalberto@usp.br;

Abstract— In this paper an estimation technique parameters for nonlinear dynamical systems is presented. The estimation methodology is based on the trajectory sensitivity which uses the partial derivative of outputs with respect to parameters to update the parameters. The methodology developed in this paper is applied to identification of the mass-spring system parameters. At first, the model structure (input and output variables, differential and algebraic equations) and the parameters to be estimated are chosen. Then, the parameter adjustment is performed to minimize the difference between the actual system output and the model system. In order to optimize the performance of the estimation process parameters and improve its robustness with respect to the initial conditions, it is further proposed the trajectory sensitivity methodology combined with the logarithmic barrier method and the synchronization “master-slave”. It raised a comparative analysis between the traditional sensitivity method and the approaches proposed. The results show that the logarithmic barrier ensures convergence until 100% within the limit of restricted parameters, beyond optimize the error minimization. Furthermore, with the synchronization, obtained optimization is even better with a great robustness in relation to the initial conditions of the parameters.

Keywords— Trajectory sensitivity, parameter estimation, nonlinear dynamical systems.

Resumo— Este artigo apresenta uma técnica de estimativa de parâmetros para sistemas dinâmicos não-lineares. A metodologia de estimativa baseia-se na sensibilidade de trajetória que utiliza as derivadas parciais das saídas em relação aos parâmetros para realizar o ajuste dos parâmetros. A metodologia desenvolvida neste artigo é aplicada para identificação dos parâmetros de um sistema de segunda ordem. Inicialmente, é feita a escolha da estrutura do modelo (variáveis de entrada e de saída, equações diferenciais e algébricas) e dos parâmetros a serem estimados. As saídas do sistema real são obtidas via simulação utilizando os valores verdadeiros dos parâmetros. Em seguida, é realizado iterativamente o ajuste dos parâmetros de forma a minimizar a diferença (erro) entre as saídas do sistema real e do sistema modelo. Com vista a otimizar o desempenho do processo de estimativa dos parâmetros e torná-lo robusto em relação às condições iniciais, propõe-se ainda o método de sensibilidade de trajetória combinado com o método barreira logarítmica e com a sincronização “mestre-escravo”. É feita uma análise comparativa entre o método de sensibilidade tradicional e as abordagens propostas. Os resultados mostram que a barreira logarítmica garante até 100% de convergência dentro do limite de restrição dos parâmetros, além de otimizar a minimização do erro. Além disso, caso se tenha sincronização, a otimização obtida é ainda melhor com uma grande robustez em relação às condições iniciais dos parâmetros.

Palavras-chave— Sensibilidade de trajetória, estimativa de parâmetros, sistema dinâmicos não-lineares.

1 Introdução

A estimativa de parâmetros de sistemas dinâmicos não-lineares é muito importante para representar um modelo nas diferentes áreas do conhecimento (elétrica, mecânica, química, dentre outras). Este processo, consiste em encontrar um conjunto de parâmetros que melhor descrevem o sistema real em análise. Assim, a estimativa de parâmetros está contida na área de identificação de sistemas, em que modelos matemáticos são levantados de forma a representar adequadamente as saídas observadas, isto é, os dados experimentais do sistema.

Neste trabalho, o método de estimativa dos parâmetros de um sistema de segunda ordem é baseado na técnica de sensibilidade de trajetória para sistemas dinâmicos lineares e não-lineares, conforme abordado em (Cari, 2009).

À variação das soluções das equações diferenciais em relação aos seus parâmetros chama-se de funções de sensibilidade de trajetória. O estudo das funções de sensibilidade é justificado pela necessidade de conhecer os efeitos da variação dos parâmetros nas soluções das equações diferenciais.

Em relação a outras técnicas de estimativa de

parâmetros (método dos gradientes, algoritmos genéticos, etc), o método de sensibilidade de trajetória possui algumas vantagens: rapidez de convergência (erro de convergência quadrático), pode ser facilmente implementada para a maioria dos sistemas não-lineares, permite a estimativa de parâmetros em intervalos de tempo relativamente pequenos e pode ser utilizada para estimar as condições iniciais das variáveis de estado.

A grande desvantagem deste método é que o sucesso de convergência aos valores verdadeiros dos parâmetros depende que os valores iniciais (chute inicial) estejam próximos dos valores reais.

A contribuição deste artigo são duas técnicas que combinadas com a sensibilidade de trajetória contornam o problema de convergência do método de sensibilidade. A primeira técnica consiste na restrição dos parâmetros usando o método de barreira logarítmica, enquanto que a segunda consiste na sincronização entre as saídas do sistema real e do sistema modelo. Estas serão empregadas em um sistema-teste de 2^a ordem.

A sequência dos capítulos pode ser descrita como segue. Na seção 2 é apresentado o método de estimativa de parâmetros baseada na sensibilidade

de trajetória. Nas seções 3 e 4 são apresentados a sincronização mestre-escravo e o método de barreira logarítmica, respectivamente. Na seção 5 é apresentada a modelagem do sistema massa-mola. Os resultados são apresentados na seção 6, e na seção 7 apresenta-se as conclusões deste trabalho.

2 Metodologia de Sensibilidade de Trajetória

Considere o sistema não linear modelado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), p, u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), p, u(t))\end{aligned}\quad (1)$$

onde $x(t)$ é o vetor de estados (soluções), u é o vetor de entrada, p é o vetor de parâmetros e $y(t)$ é o vetor de saída.

Admite-se que as funções f e g sejam diferenciáveis em relação a cada componente p_i do vetor de parâmetros, para $i = 1, \dots, p$. As sensibilidades de trajetória $\frac{\partial x(t)}{\partial p_i}$ e $\frac{\partial y(t)}{\partial p_i}$ dos estados $x(t)$ e da saída $y(t)$, obtidas diferenciando-se o conjuntos de equações dado por (1) em relação a p_i , são as equações de sensibilidade dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x(t)}{\partial p_i} = \frac{\partial f(x(t), p, u(t))}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial p_i} + \frac{\partial f(x(t), p, u(t))}{\partial p_i} \quad (2)$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial p_i} = \frac{\partial g(x(t), p, u(t))}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial p_i} + \frac{\partial g(x(t), p, u(t))}{\partial p_i} \quad (3)$$

Se f ou g não são diferenciáveis com relação ao parâmetro p_i , as funções de sensibilidade podem ser obtidas de forma aproximada procedendo da seguinte maneira. Sejam p^0 e p^1 , respectivamente, o vetor de parâmetros inicial e o vetor cuja i -ésima componente é $p_i^1 = p_i^0 + \Delta p_i$, em que Δp_i é uma pequena perturbação no parâmetro. A resposta no tempo obtida com os parâmetros p^0 e p^1 são dadas por $y_0(t)$ e $y_1(t)$, respectivamente. Assim, as funções de sensibilidades de trajetória podem ser aproximadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x(t)}{\partial p_i} &\approx \frac{x^1(t) - x^0(t)}{\Delta p_i} \\ \frac{\partial y(t)}{\partial p_i} &\approx \frac{y^1(t) - y^0(t)}{\Delta p_i}\end{aligned}\quad (4)$$

Com o intuito de aproximar o comportamento do modelo em relação ao sistema real, faz-se uso de um algoritmo ou técnica de ajuste de parâmetros.

A atualização dos parâmetros é feita com base no cálculo das funções de sensibilidade de trajetória. O ajuste no vetor de parâmetros p é efetuado no sentido de minimizar a diferença entre as saídas do sistema real e as saídas do sistema modelo. Em geral, procura-se minimizar a função objetivo $J(p)$ dada pelo quadrado das diferenças entre as saídas. Neste artigo, utiliza-se a função objetivo baseada

na norma 2, mais conhecida por *método dos mínimos quadrados*. A formulação matemática desta função é dada por:

$$J(p) = \frac{1}{2} \int_0^{T_0} (y_r(t) - y_m(t))^T (y_r(t) - y_m(t)) dt \quad (5)$$

sendo $y_r(t)$ o vetor de saída do sistema real (valor medido), $y_m(t)$ é o vetor de saída do sistema modelo e $[0, T_0]$ o intervalo de tempo analisado.

O valor ótimo para o funcional $J(p)$ é obtido por meio da aplicação do operador gradiente de sentido contrário em relação ao vetor p quando igualado a zero:

$$\nabla J(p) = -\frac{\partial J(p)}{\partial p} = 0 \quad (6)$$

A partir de (5) e (6), obtém-se:

$$G(p) = -\frac{\partial J(p)}{\partial p} = \int_0^{T_0} \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)^T (y_r(t) - y_m(t)) dt \quad (7)$$

Realizando a expansão em série de Taylor para $G(p)$ no ponto $p = p^{(k)}$ e desprezando os termos de segunda ordem, obtém-se a expressão de ajuste dos parâmetros na k -ésima iteração, dada por:

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - \Gamma^{-1}(p) G(p) \Big|_{p=p^{(k)}} \quad (8)$$

sendo $\Gamma(p)$ a matriz Jacobiana, expressa por:

$$\Gamma(p) \approx \int_0^{T_0} \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right)^T \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right) \Big|_{p=p^{(k)}} \quad (9)$$

Para a implementação numérica, a saída $y_r(t)$ do sistema real é amostrada em intervalos de tempo discreto, de forma que as integrais (5), (7) e (9) transformam-se em somatórios.

O algoritmo do método está sintetizado na Figura 1 e consiste nos passos enumerados a seguir:

1. Obtenção da saída do sistema real a partir de medidas do sistema com os parâmetros reais;
2. Obtenção da saída do sistema modelo a partir de equações matemáticas do modelo;
3. Comparação entre as saídas do sistema real e do sistema modelo por intermédio do cálculo de $J(p^{(k)})$;
4. Obtenção das equações de sensibilidade numéricas a partir da derivação (variação numérica) das equações em relação aos parâmetros;
5. Interrupção, caso $J(p^{(k)})$ seja menor que uma tolerância especificada. Caso contrário, prosiga com o passo 6;
6. Resolução da equação $\frac{\partial J(p)}{\partial p} = 0$ por intermédio do método de Newton e cálculo da função $\Gamma(p^{(k)})$;
7. Cálculo do Δp - Método de Newton;
8. Atualização dos parâmetros, iteração do algoritmo para $k = k + 1$ e retorno ao passo 2.

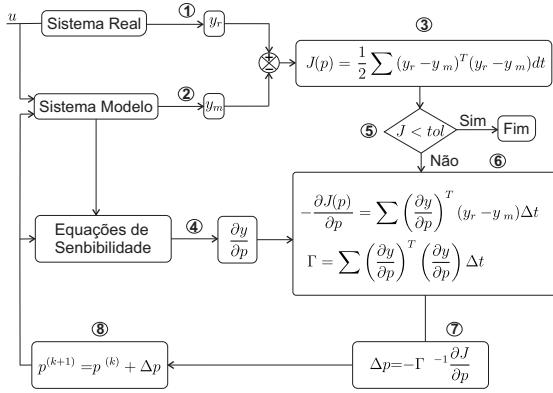


Figura 1: Diagrama de blocos do procedimento de estimativa de parâmetros baseado na técnica de sensibilidade de trajetória.

A grande desvantagem do método de estimativa de parâmetros baseada na técnica de sensibilidade de trajetória está associada à elevada sensibilidade, ou falta de robustez, em relação às condições dos parâmetros (Cari *et al*, 2006). Isto é, a convergência dos parâmetros depende que os valores iniciais estejam suficientemente próximos dos valores verdadeiros.

Este problema pode ser contornado por meio do aumento da região de convergência dos parâmetros, de forma que a correta estimativa ocorre mesmo que os valores iniciais dos parâmetros sejam relativamente distantes dos valores verdadeiros. Neste artigo, isto é conseguido combinando a metodologia de sensibilidade de trajetória tradicional com a sincronização mestre-escravo no processo de estimativa.

3 Sincronização Mestre-Escravo

O acoplamento mestre-escravo consiste em acoplar algumas saídas do sistema mestre (sistema real) com o sistema escravo (sistema modelo) em forma unidirecional, isto é, o sistema mestre acopla o sistema escravo. Em resumo, durante o processo de estimativa, o ajuste dos parâmetros é realizado de forma que as saídas dos sistemas real e auxiliar sincronizem, ficando suficientemente próximas durante um intervalo de tempo finito (Cari, 2009).

4 O Método de Barreira Logarítmica

A otimização é um ramo da matemática aplicada e tem como objetivo encontrar a melhor solução para um determinado problema. Neste artigo, utiliza-se o método de barreira logarítmica para otimizar o processo de minimização do erro quadrático médio entre as saídas do sistema real e do sistema modelo na estimativa dos parâmetros do sistema massa-mola.

Considere o problema otimização P com res-

trição de desigualdade representado por:

$$\begin{aligned} P : \quad & \text{Minimizar } f(x) \\ \text{sujeito a: } & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

cuja região de factibilidade é expressa por:

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

em que $f(x)$ é a função objetivo e $g_i(x)$ é a restrição de desigualdade do problema.

A função barreira logarítmica do problema P é dada por:

$$P(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_1^m \log g_i(x) \quad (10)$$

onde $\mu \geq 0$ é o parâmetro barreira.

As funções barreira tem como propriedades: (i) são infinitas em todo lugar, menos em \mathcal{F} ; (ii) são suaves dentro de \mathcal{F} ; (iii) seu valor tende a $+\infty$ à medida que x se aproxima da fronteira de \mathcal{F} .

5 Modelagem do Sistema Massa-Mola

Como referência, será utilizado um sistema de 2^a ordem. Seja o sistema massa-mola representado pela Figura 2, cuja equação de movimento é dada por

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} u(t) - \frac{k}{m} y. \quad (11)$$

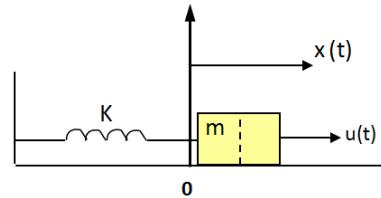


Figura 2: Esquema do sistema Massa-Mola

Definindo $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$ como sendo posição e velocidade lineares, respectivamente. Desta forma, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 + \frac{u}{m}, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

sendo u a força externa aplicada (constante de entrada), $[x_1, x_2]$ as variáveis a serem medidas e $[k, m]$ os parâmetros de constante elástica e de massa, respectivamente. As condições tanto para posição quanto para velocidade são consideradas inicialmente nulas.

6 Resultados da Estimação

Os resultados apresentados a seguir, para a estimativa dos parâmetros, referem-se a medidas obtidas por simulação, considerando os valores reais dos parâmetros.

6.1 Estimação de parâmetros com o método de sensibilidade tradicional

A metodologia de sensibilidade de trajetória proposta foi aplicada para estimativa dos parâmetros do sistema massa-mola. O procedimento adotado para tal pode ser resumido no diagrama de blocos da Figura 3.

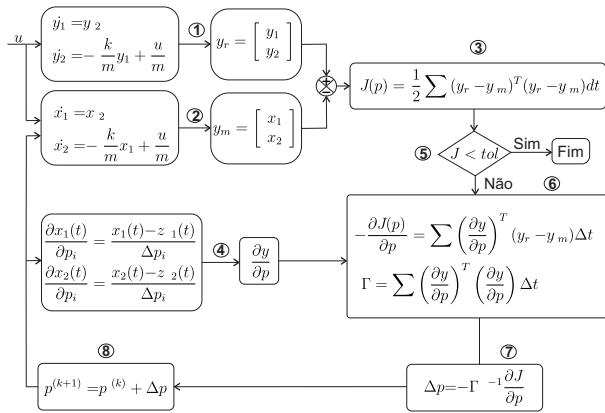


Figura 3: Diagrama de blocos do procedimento de estimativa de parâmetros baseado na técnica de sensibilidade de trajetória tradicional.

Vale destacar que os dados da saída y_r do sistema real foram obtidos via simulação, utilizando como valores verdadeiros dos parâmetros $[k_r, m_r] = [6, 3]$ e condições iniciais $[y_1(0), y_2(0)] = [0, 0]$. Os valores dos parâmetros iniciais foram adotados como $[k^{(0)}, m^{(0)}] = [9, 5/2]$, isto é, com erro associado de 50% e -16,67%, respectivamente.

Na Tabela 1, mostra-se a convergência a valores corretos dos parâmetros após 8 iterações. Nas Figuras 4 e ?? são ilustradas a saída x_1 (posição linear) antes e depois da estimativa dos parâmetros, respectivamente.

Tabela 1: Resultados com a metodologia de sensibilidade trajetória tradicional.

Iteração	k	m	$J_p (\%)$
0	9	2,5	3,6027
1	13,7526	4,4321	2,2041
2	9,3376	5,2498	0,6012
3	4,5043	1,5447	4,0061
4	6,7009	2,5520	1,0523
5	7,2053	3,0358	0,1603
6	5,9261	3,0358	0,0075
7	6,0064	3,0032	0,0000
8 (final)	6	3	0
real	6	3	—

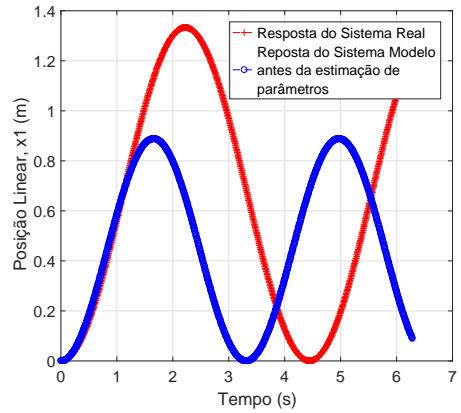


Figura 4: Resposta da posição linear do bloco de massa m antes e depois da estimativa de parâmetros.

As funções de sensibilidade $\frac{\partial y}{\partial m}$ e $\frac{\partial y}{\partial k}$ são mostradas na Figura 5. A análise do comportamento destas funções revela algumas observações importantes. De fato, $\frac{\partial y}{\partial m}$ indica que a resposta do sistema é mais sensível à variação do parâmetro m quando comparado à variação em relação ao parâmetro k (isto é, o parâmetro m possui uma maior influência sobre a resposta do sistema).

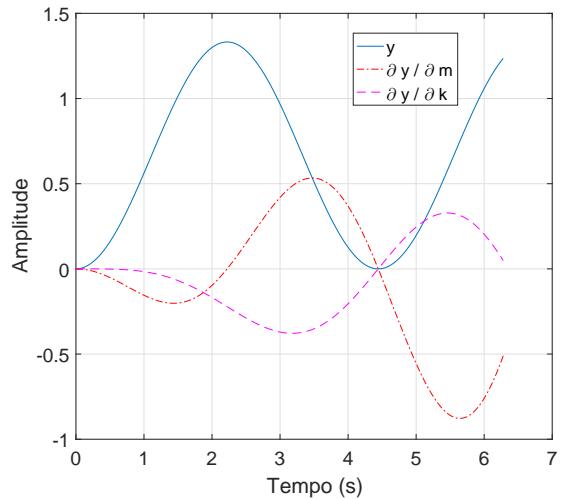


Figura 5: Funções de sensibilidade de trajetória após a estimativa de parâmetros.

Para avaliar a máxima incerteza e, portanto, a sensibilidade em relação às condições iniciais dos parâmetros, levantou-se a região de convergência mostrada na Figura 6, em que os valores iniciais dos parâmetros foram sucessivamente incrementados ou decrementados até atingir valores limitantes do processo de convergência.

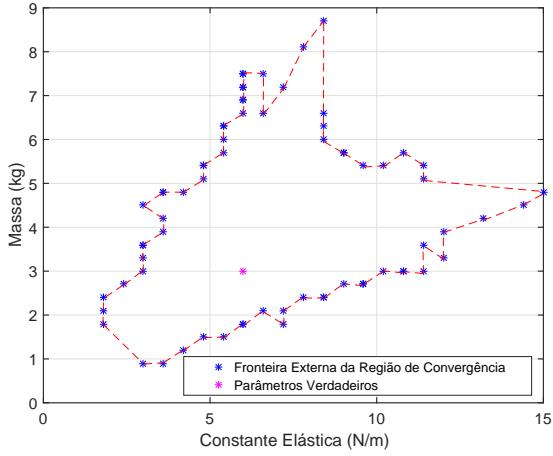


Figura 6: Região de convergência dos parâmetros da metodologia de sensibilidade de trajetória tradicional.

6.2 Estimação de parâmetros com os métodos de sensibilidade tradicional e de barreira logarítmica

A função barreira logarítmica do problema associado ao sistema massa-mola é dada por:

$$P(p, \mu) = J(p) - \mu \sum_{i=\min, \max} \log(k - k_i) + \log(m - m_i) \quad (13)$$

sendo $\langle k_{\min}, m_{\min} \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ e $\langle k_{\max}, m_{\max} \rangle = \langle 16, 10 \rangle$ restrições ligeiramente abaixo/acima dos valores mínimos/máximos dos parâmetros encontrados na região de convergência da Figura 6.

A convergência dos parâmetros é apresentada na Tabela 2. Na Figura 7, mostra-se o erro quadrático médio $J(p)$ entre as saídas do sistema real e do sistema modelo ao longo do processo iterativo. Com base nestes resultados, constata-se que o método de sensibilidade de trajetória com barreira logarítmica apresenta melhor desempenho de convergência em relação ao método de sensibilidade de trajetória tradicional, uma vez que o erro quadrático médio passa a ter um comportamento estritamente descendente. Como consequência, o número de iterações foi reduzido de 8 para 6.

Tabela 2: Resultados com a metodologia de sensibilidade de trajetória tradicional e barreira logarítmica.

Iteração	k	m	$J_p (\%)$
0	9	2,5	12,5560
1	9,3746	2,5516	4,2823
2	5,9660	2,5983	0,3508
3	5,7798	2,7939	0,0284
4	6,0052	2,9915	0,0005
5	6,0008	3,0004	0,0001
6 (final)	3	0	0
real	6	3	—

Avaliou-se ainda a região de convergência dos

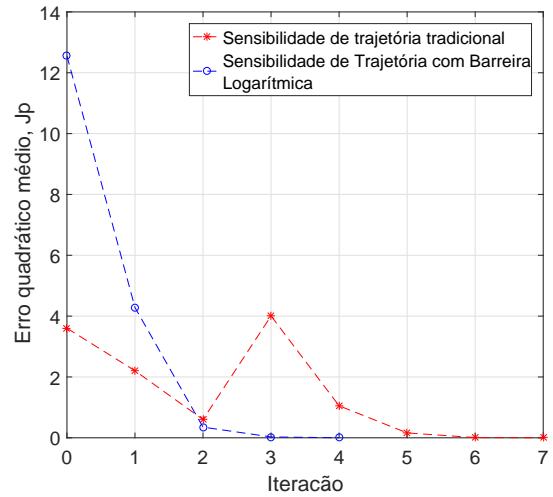


Figura 7: Erro de convergência com a metodologia de sensibilidade trajetória tradicional e barreira logarítmica.

parâmetros para este caso, de forma que obteve-se essencialmente a mesma região de convergência com o método de sensibilidade de trajetória tradicional. Assim, com método de barreira logarítmica nenhum efeito foi conseguido no aumento da região de convergência.

6.3 Estimação de parâmetros com o método de sensibilidade tradicional e a sincronização mestre-escravo

Agregou-se ao método de sensibilidade de trajetória tradicional, o acoplamento da variável de estado y_1 medida no sistema real, que passa a ser utilizada como entrada do sistema modelo. O procedimento de estimação dos parâmetros está apresentado no diagrama na Figura 8.

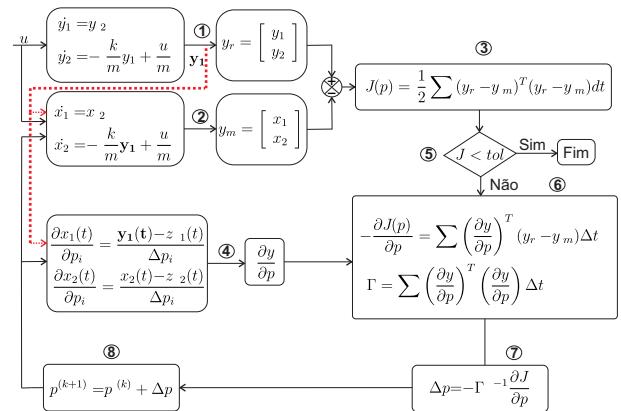


Figura 8: Diagrama de blocos do procedimento de estimação de parâmetros baseado na técnica de sensibilidade de trajetória tradicional com sincronização mestre-escravo.

A estimação de parâmetros com o método de sensibilidade tradicional e a sincronização mestre-escravo revelou um melhor desempenho de con-

vergência, isto é, de minimização do erro quadrático médio em relação ao métodos apresentados nas duas subseções anteriores, como mostra a Tabela 3 e a Figura 9.

Tabela 3: Resultados com a metodologia de sensibilidade de trajetória tradicional e acoplamento mestre-escravo.

Iteração	k	m	$J_p (\%)$
0 (inicial)	9,0000	2,5000	167,2617
1	6,4896	2,9116	3,3408
2	6,0084	2,9904	0,0024
3	5,9950	2,9925	0,0001
4(final)	5,9950	2,9926	0,0000
real	6	3	—

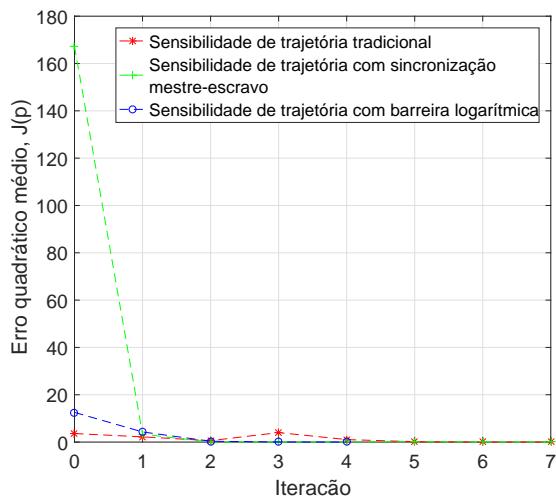


Figura 9: Comparação entre os erros de convergência para os métodos propostos.

Por fim, avaliou-se ainda o efeito do acoplamento mestre-escravo na metodologia de sensibilidade de trajetória tradicional no que se refere à máxima incerteza em relação às condições iniciais. Para a região de convergência obtida, ilustrada na Figura 10, observou-se um limitante de convergência apenas em relação aos valores máximos e mínimos do parâmetro m com incertezas de $+90\%$ e -90% , respectivamente. Em relação ao parâmetro k , a convergência para o valor verdadeiro ocorre independentemente do seu valor inicial. Desta forma, o acoplamento mestre-escravo contribuiu para uma diminuição da sensibilidade em relação às condições iniciais dos parâmetros.

7 Conclusões

Neste trabalho, a metodologia de sensibilidade de trajetória foi aplicada para estimativa dos parâmetros de um sistema de segunda-ordem. Para este objetivo, foram ainda propostas novas metodologias que combinam a técnica de sensibilidade tradicional com o método de barreira logarítmica e

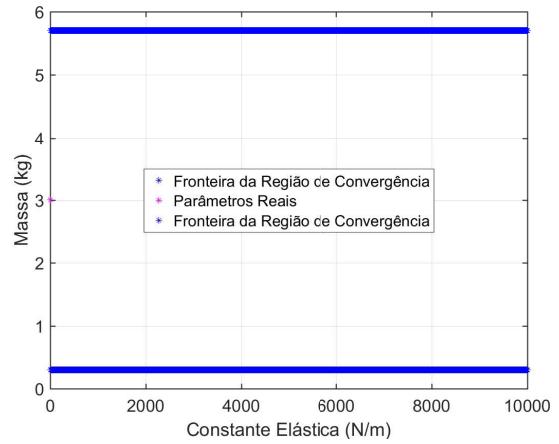


Figura 10: Região de convergência dos parâmetros da metodologia de sensibilidade de trajetória tradicional com sincronização mestre-escravo.

a sincronização mestre-escravo. O efeito da inclusão do método de barreira logarítmica é a otimização do erro quadrático médio entre as saídas do modelo matemático e do sistema real, acelerando o processo de convergência dos parâmetros e a garantia de 100% de convergência dentro da região de factibilidade, o que o método tradicional não consegue garantir. Com relação a sincronização mestre-escravo, além da otimização do erro, foi conseguido um aumento considerável na região de convergência, garantindo robustez em relação a valores iniciais dos parâmetros. Os parâmetros foram estimados a partir de medidas do sistema real obtidas via simulação considerando os valores verdadeiros dos parâmetros. Por fim, embora a técnica de sensibilidade de trajetória tenha sido aplicada neste trabalho para estimativa dos parâmetros do sistema massa-mola, sua utilização se estende para estimativa de parâmetros de sistemas dinâmicos não-lineares em geral.

Agradecimento

A FAPESP pelo o apoio financeiro a esta pesquisa. À minha família, minha razão de viver e de lutar e aos professores Elmer Pablo e Luís Fernando pelo o apoio e a orientação neste trabalho.

Referências

- [1] Cari, E. P T. (2009). *Metodologia de estimativa de parâmetros de sistemas dinâmicos não-lineares com aplicação em geradores síncronos*. Tese (Doutorado em Sistemas Elétricos de Potência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- [2] Cari, E. P. T., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2006). *A new methodology for parameter estimation of synchronous generator from disturbance measurements*, IEEE Power Energy Soci-

ety General Meeting, Pittsburgh, Pennsylvania, USA.

- [3] Theodoro, E. A. R. (2007). *Estimação dos parâmetros de modelos de carga em sistemas elétricos de potência utilizando a metodologia de sensibilidade de trajetória*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Elétrica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.
- [4] Da Silva, Ricardo G. (2012). *Estimação de modelos de carga utilizando medidas de perturbação do sistema elétrico de potência*. Programa de Graduação em Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2012.
- [5] Benchluch, S. M. e Chow, J H. (1994). *A trajectory sensitivity method for the identification of nonlinear excitation system models*, IEEE Transaction on Energy Conversion 8(2): 159.