



Escola Politécnica - EPBC



31200053601

BT/PEF-8703

CONSIDERAÇÃO DA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA EM
ESTRUTURAS LAMINARES PLANAS
PARTE II

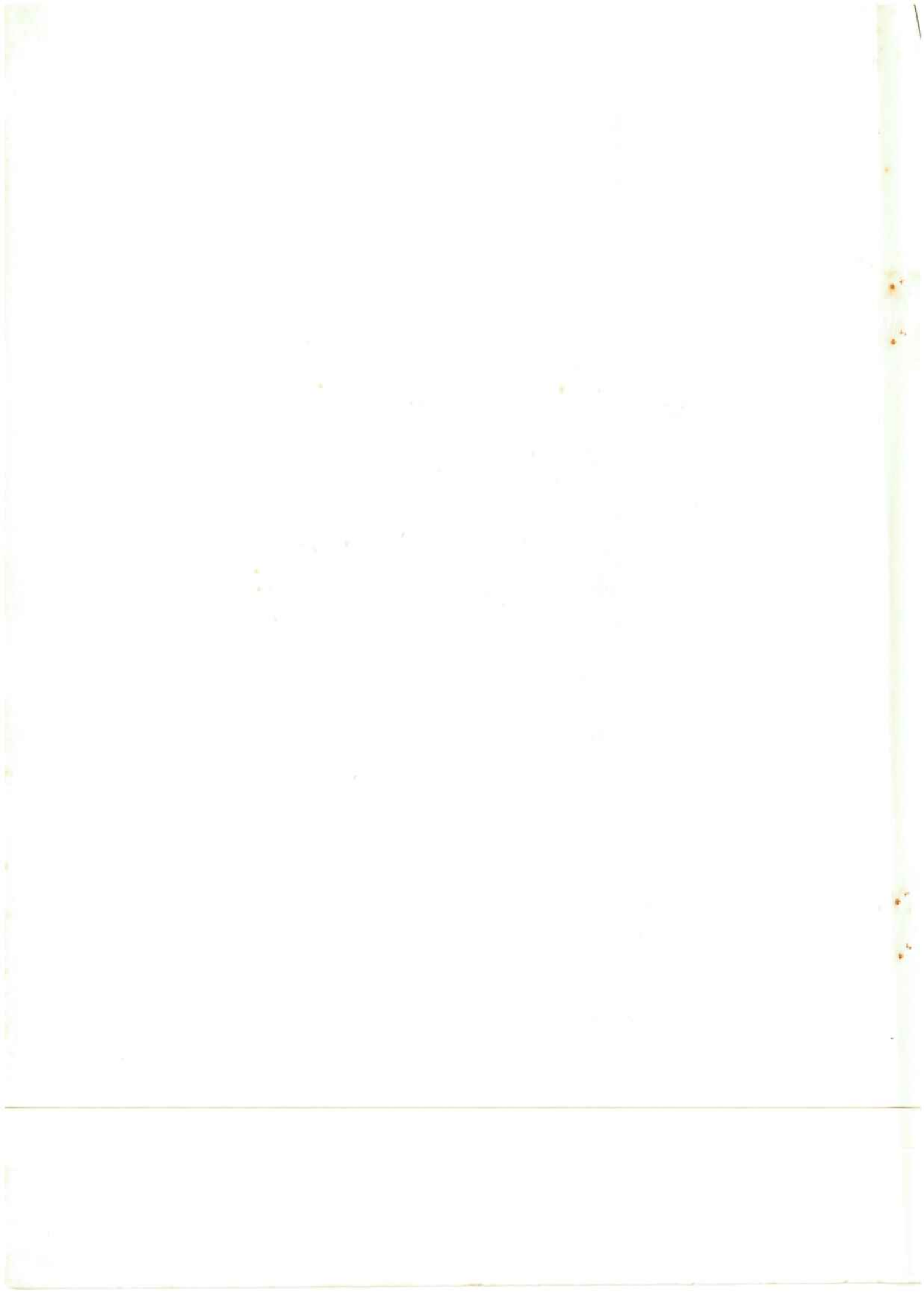
Luiz A. Cortese Diogo
Professor Assistente Doutor
(recebido em 2/3/87)

EDITOR CHEFE

C.E.N.Mazzilli

COMISSÃO EDITORIAL

- Engenharia de Solos	W.Hachich
- Estruturas de Concreto	P.B.Fusco
- Estruturas Metálicas e de Madeira	P.B.Fusco
- Interação Solo-Estrutura	C.E.M.Maffei
- Mecânica Aplicada	D.Zagottis
- Métodos Numéricos	I.Q.Barros
- Pontes e Grandes Estruturas	J.C.Figueiredo Ferraz
- Teoria das Estruturas	V.M.Souza Lima



INTRODUÇÃO

Apresenta-se, neste trabalho, a sequência de operações que permitem a análise de estruturas laminadas planas pelo método dos elementos finitos, quando se consideram relações de deformação - deslocamentos não lineares.

Obtem-se a matriz de rigidez tangente da estrutura, utilizada nos métodos iterativos e incremental, exemplificados no item 5.

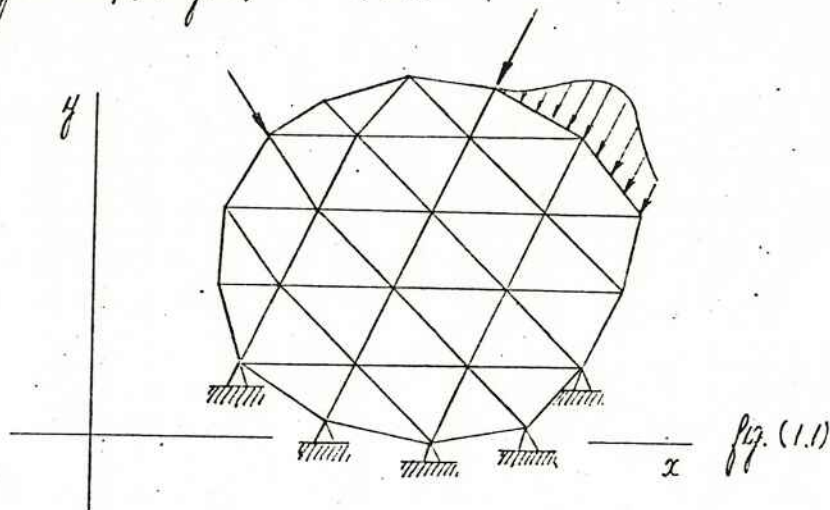
A interpretação das matrizes que compõem a matriz de rigidez tangente é dada no item 4.

As estruturas tridimensionais podem ser analisadas com uma formulação análoga à que aqui se desenvolve.

1. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Considere-se a estrutura laminar plana da fig (1.1) discretizada em um número finito de elementos, nos quais o campo de deslocamentos, caracterizado pelas componentes u, v , é dado em função dos deslocamentos nodais por meio de funções de interpolação, ou seja

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum \phi_i(x,y) u_i \\ v(x,y) &= \sum \phi_i(x,y) v_i \end{aligned} \quad (1.1)$$



Com notação matricial, as expressões acima são dadas por

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \sum N_i \underline{a}_i^e = \underline{N} \underline{a}^e \quad (1.2)$$

onde

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} \quad e \quad \underline{a}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

O campo de deformações $\underline{\epsilon}$ e o de tensões $\underline{\sigma}$, obtidos a partir do campo de deslocamentos $\underline{u}$, permitem determinar a energia de deformação

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{S_e} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) t ds = \frac{1}{2} \int_{S_e} \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} t ds \quad (1.4)$$

onde

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\varepsilon}_L \quad (1.5)$$

com

$$\underline{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\varepsilon}_L = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

e

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

O passo seguinte consiste em obter os vetores $\underline{\varepsilon}_0$ e $\underline{\varepsilon}_L$ a partir dos deslocamentos modais $\underline{a}^e$. O vetor $\underline{\varepsilon}_0$ é dado por

$$\underline{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L}_0 \underline{N} \underline{a}^e = \underline{B}_0 \underline{a}^e \quad (1.8)$$

onde

$$\underline{B}_0 = \underline{L}_0 \underline{N} \quad \text{e} \quad \underline{B}_{0i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

O vetor $\underline{\varepsilon}_L$ é dado por

$$\underline{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{A} \underline{\theta} \quad (1.10)$$

O vetor $\underline{\theta}$ pode ser obtido a partir dos deslocamentos modais $\underline{a}^e$ da seguinte maneira

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{L}^* \underline{N} \underline{a}^e = \underline{G} \underline{a}^e \quad (1.11)$$

onde

$$\underline{G} = \underline{L}^* \underline{N} \text{ e } \underline{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Tomando variações de $\underline{E}_L$, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \underline{E}_L &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} = \underline{A} \delta \underline{\theta} = \underline{A} \underline{G} \delta \underline{a}^e = \underline{B}_L \delta \underline{a}^e \quad (1.13) \end{aligned}$$

Com vista das equações (1.8) e (1.13), conclui-se que a variações nos deslocamentos modais $\delta \underline{a}^e$, correspondem variações no campo de deformações, dada por

$$\delta \underline{E} = \delta \underline{E}_0 + \delta \underline{E}_L = (\underline{B}_0 + \underline{B}_L) \delta \underline{a}^e = \underline{B} \delta \underline{a}^e \quad (1.14)$$

onde a matriz $\underline{B}_0$, correspondente à análise linear, não depende dos deslocamentos modais, e a matriz $\underline{B}_1$ varia linearmente com os deslocamentos modais, dado que $\underline{A}$ varia linearmente com esses deslocamentos e $\underline{G}$ é constante.

Supondo que os valores das deformações sejam suficientemente pequenos, de maneira que seja válida a lei de Hooke, pode-se escrever

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad (1.15)$$

onde

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Pode-se, em seguida, escrever a expressão da energia potencial total π como a soma da contribuição de cada elemento. Com notação matricial, tem-se

$$\pi = \sum_{Se} \frac{1}{2} \int \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} t ds - \left[\sum_{Se} \int \underline{\mu}^T \underline{f} t ds + \sum_{Ase} \int \underline{\mu}^T \underline{A} t da \right] \quad (1.17)$$

onde

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{a}^e \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} A_x(x,y) \\ A_y(x,y) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

A uma variação no campo de deslocamentos $\delta \underline{\mu}$, corresponde uma variação na energia potencial total $\delta \pi$, dada por

$$\delta \pi = \sum_{Se} \int \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} t ds - \left[\sum_{Se} \int \delta \underline{\mu}^T \underline{f} t ds + \sum_{Ase} \int \delta \underline{\mu}^T \underline{A} t da \right] \quad (1.19)$$

Considerando, na expressão acima, as equações (1.2) e (1.14), obtém-se

$$\delta \pi = \sum_{Se} \int \delta \underline{a}^{eT} \underline{B}^T \underline{\sigma} t ds - \left[\sum_{Se} \int \delta \underline{a}^{eT} \underline{N}^T \underline{f} t ds + \sum_{Ase} \int \delta \underline{a}^{eT} \underline{N}^T \underline{A} t da \right] \quad (1.20)$$

Os deslocamentos modais $\underline{a}^e$ de um dado elemento relacionam-se ao conjunto dos deslocamentos modais $\underline{a}$ da estrutura da seguinte maneira:

$$\underline{a}^e = \underline{T}_e \underline{a} \quad (1.21)$$

Quando os deslocamentos modais $\underline{a}^e$ e $\underline{a}$ se referem ao mesmo sistema de eixos, $\underline{T}_e$ representa a matriz que fornece a posição do elemento na estrutura.

Voltando à expressão de $\delta\pi$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \delta \underline{a}^T \left[\sum_{Se} \underline{T}_e^T \int \underline{B}^T \underline{\sigma} \, t \, ds - \left[\sum_{Se} \underline{T}_e^T \int \underline{N}^T \underline{f} \, t \, ds + \sum_{Aoe} \underline{T}_e^T \int \underline{N}^T \underline{\Lambda} \, t \, ds \right] \right] \\ &= \delta \underline{a}^T \underline{\psi}(\underline{a}) \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(\underline{a}) &= \sum_{Se} \underline{T}_e^T \int \underline{B}^T \underline{\sigma} \, t \, ds - \left[\sum_{Se} \underline{T}_e^T \int \underline{N}^T \underline{f} \, t \, ds + \sum_{Aoe} \underline{T}_e^T \int \underline{N}^T \underline{\Lambda} \, t \, ds \right] = \\ &= \sum_{Se} \underline{T}_e^T \int \underline{B}^T \underline{\sigma} \, t \, ds - \underline{P} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Quando esforços internos $\underline{F}$ concentrados nos nós, deve-se adicioná-los aos termos entre colchetes da expressão acima.

Como no equilíbrio $\delta\pi = 0$, e dada a arbitrariedade de $\delta \underline{a}$, segue-se que

$$\underline{\psi}(\underline{a}) = 0 \quad (1.24)$$

A expressão acima nada mais é do que o sistema de equações de equilíbrio entre os esforços internos representados pelo primeiro termo da equação (1.23) e os esforços externos representados pelos termos entre colchetes.

Tomando variações de $\underline{\psi}$, obtém-se

$$\delta \underline{\psi} = \sum_{Se} \underline{T}_e^T \int \delta \underline{B}^T \underline{\sigma} \, t \, ds + \sum_{Se} \underline{T}_e^T \int \underline{B}^T \delta \underline{\sigma} \, t \, ds - \delta \underline{P} \quad (1.25)$$

Considerando as equações (1.14) e (1.13), pode-se escrever

$$\int_{Se} \delta \underline{B}^T \underline{\sigma} \, t \, ds = \int_{Se} \delta \underline{B}_L^T \underline{\sigma} \, t \, ds = \int_{Se} \underline{G}^T \delta \underline{A}^T \underline{\sigma} \, t \, ds \quad (1.26)$$

M21

$$\delta \underline{A}^T \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \delta \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right) & 0 & \delta \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) & 0 & \delta \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) \\ 0 & \delta \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right) & \delta \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \\ 0 & \delta \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) & \delta \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{M} \delta \underline{\theta} = \underline{M} \underline{G} \delta \underline{a}^e \quad (1.27)$$

de modo que

$$\int_{S_e} \delta \underline{B}^T \underline{\sigma} t dS = \left[\int_{S_e} \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} t dS \right] \delta \underline{a}^e = \underline{k}_\sigma \delta \underline{a}^e \quad (1.28)$$

onde

$$\underline{k}_\sigma = \int_{S_e} \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} t dS \quad (1.29)$$

Considerando as equações (1.15) e (1.14), pode-se escrever

$$\int_{S_e} \underline{B}^T \delta \underline{\sigma} t dS = \int_{S_e} \underline{B}^T \underline{D} \delta \underline{\epsilon} t dS = \left[\int_{S_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} t dS \right] \delta \underline{a}^e = (\underline{k}_0 + \underline{k}_L) \delta \underline{a}^e \quad (1.30)$$

onde

$$\underline{k}_0 = \int_S \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_0 t dS \quad \text{e} \quad \underline{k}_L = \int_{S_e} \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L t dS + \int_{S_e} \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_0 t dS + \int_{S_e} \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_L t dS \quad (1.31)$$

Introduzindo as equações (1.28) e (1.30) na equação (1.25) e considerando a equação (1.21), obtém-se a matriz de rigidez tangente $\underline{K}_T$ da seguinte maneira

$$\delta \Psi = (\sum \underline{T}_e^T \underline{k}_0 \underline{T}_e + \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_L \underline{T}_e + \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_\sigma \underline{T}_e) \delta \underline{a} - \delta P = \underline{K}_T \delta \underline{a} - \delta P \quad (1.32)$$

onde

$$\underline{K}_T = \underline{K}_0 + \underline{K}_L + \underline{K}_\sigma \quad (1.33)$$

com

$$\underline{K}_0 = \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_0 \underline{T}_e \quad \underline{K}_L = \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_L \underline{T}_e \quad \underline{K}_\sigma = \sum \underline{T}_e^T \underline{k}_\sigma \underline{T}_e \quad (1.34)$$

Deve-se notar que os elementos da matriz de rigidez $\underline{K}_T$ são funções quadráticas dos deslocamentos modais. De fato, considerando

que os elementos de $\underline{B}_0$ não dependem dos deslocamentos modais,

que os elementos de $\underline{B}_L$ são funções lineares dos deslocamentos modais (dado que os elementos de $\underline{A}$ são funções lineares desses deslocamentos e que os elementos de $\underline{G}$ não dependem da geometria),

que os elementos de $\underline{E}_0$ são funções lineares dos deslocamentos modais,

que os elementos de $\underline{E}_L$ são funções quadráticas dos deslocamentos modais (dado que $\underline{A}$ e $\underline{\theta}$ são funções lineares desses deslocamentos) e

que os elementos de $\underline{E}$, $\underline{G}$ e $\underline{M}$ são funções quadráticas dos deslocamentos modais visto que se verificam as duas condições anteriores

conclui-se

que os elementos da matriz $\int_{S_e} \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_0 \, t \, ds$ não dependem dos deslocamentos modais,

que os elementos das matrizes $\int_{S_e} \underline{B}_0^T \underline{D} \underline{B}_L \, t \, ds$ e $\int_{S_e} \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_0 \, t \, ds$ são funções lineares dos deslocamentos modais e

que os elementos das matrizes $\int_{S_e} \underline{B}_L^T \underline{D} \underline{B}_L \, t \, ds$ e $\int_{S_e} \underline{G}^T \underline{M} \underline{G} \, t \, ds$ são funções quadráticas dos deslocamentos modais.

Com vista nisso, um elemento K_{Tij} da matriz de rigidez $\underline{K}_T$ pode ser escrito da seguinte maneira

$$K_{Tij} = K_{ij} + \sum_{k=1}^m K_{ijk} a_k + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m K_{ijkl} a_k a_l \quad (1.35)$$

onde m é o número de deslocamentos modais.

2.0 MÉTODO ITERATIVO

O vetor $\underline{\psi}$ e a matriz $\underline{K}_T$, dados respectivamente pelas equações (1.23) e (1.33) permitem determinar os deslocamentos modais $\underline{a}$ pelo método iterativo de Newton-Raphson

Dado o carregamento externo, que se mantém constante ($\delta P = 0$), a equação (1.32) permite escrever

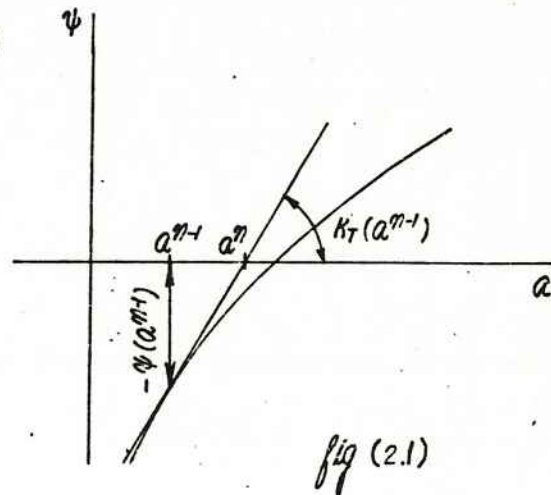
$$\delta \underline{\psi} = \underline{K}_T \delta \underline{a} \quad (2.1)$$

Assim, na n -ésima iteração, os deslocamentos modais $\underline{a}^n$ são dados, como mostra a fig (2.1), onde se tem um grau de liberdade, a partir dos deslocamentos modais $\underline{a}^{n-1}$ da iteração precedente, por

$$\underline{a}^n = \underline{a}^{n-1} + \Delta \underline{a}^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

onde

$$\Delta \underline{a}^n = -\underline{K}_T^{-1}(\underline{a}^{n-1}) \cdot \underline{\psi}(\underline{a}^{n-1}) \quad (2.3)$$



Na primeira iteração ($n=1$), $\underline{a}^0$ corresponde aos deslocamentos modais obtidos na análise linear com a matriz de rigidez $\underline{K}_T(0) = \underline{K}_0$.

A equação (2.1) é válida quando os esforços externos se mantêm constantes. Por outro lado, partindo de uma situação inicial de equilíbrio ($\psi_1 = 0$), a variação δP nos esforços externos corresponde a variações δa nos deslocamentos modais, e vice versa, a fim de que seja mantido o equilíbrio na situação final ($\psi_2 = 0$), isto é

$$\delta \psi = K_T \delta a - \delta P = 0 \quad (3.1)$$

ou seja

$$\delta P = K_T \delta a \quad (3.2)$$

Tão posto, pode-se dividir o carregamento externo em m incrementos ΔP_m , de modo que, após a aplicação do m -ésimo incremento, os deslocamentos modais $\underline{a}^m$ são dados, como mostra a fig (3.1), onde se tem um grau de liberdade, por

$$\underline{a}^m = \underline{a}^{m-1} + \Delta \underline{a}^m, \quad m=1,2,\dots \quad (3.2)$$

onde

$$\Delta \underline{a}^m = K_T^{-1}(\underline{a}^{m-1}) \cdot \Delta P^m \quad (3.3)$$

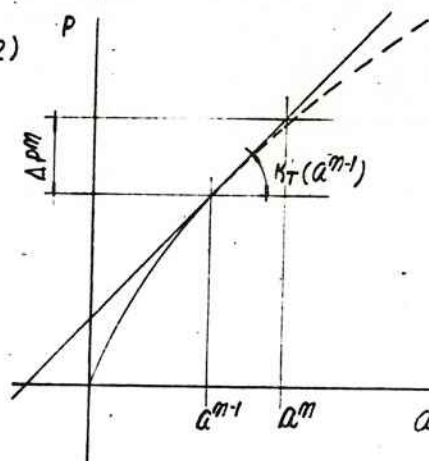


fig. (3.1)

no primeiro incremento ($m=1$), os deslocamentos modais $\underline{a}^0$ são nulos e $K_T(0) = K_0$ é a matriz de rigidez correspondente à análise linear.

Conhecidos os deslocamentos modais $\underline{a}^m$, determinam-se, em cada ponto, as componentes $\epsilon_x^m, \epsilon_y^m, \epsilon_{xy}^m$ do vetor $\underline{\epsilon}^m$, obtendo-se os acréscimos

$$\Delta \epsilon_x^m = \epsilon_x^m - \epsilon_x^{m-1}$$

$$\Delta \epsilon_y^m = \epsilon_y^m - \epsilon_y^{m-1}$$

$$\Delta \epsilon_{xy}^m = \epsilon_{xy}^m - \epsilon_{xy}^{m-1} \quad (3.4)$$

com os quais se obtêm, com as equações (1.15) e (1.16), os acréscimos $\Delta\sigma_x^n, \Delta\sigma_y^n, \Delta\tau_{xy}^n$ que permitem determinar, finalmente, as componentes

$$\begin{aligned}\sigma_x^n &= \sigma_x^{n-1} + \Delta\sigma_x^n \\ \sigma_y^n &= \sigma_y^{n-1} + \Delta\sigma_y^n \\ \tau_{xy}^n &= \tau_{xy}^{n-1} + \Delta\tau_{xy}^n\end{aligned}\quad (3.5)$$

do vetor $\underline{\sigma}^n$.

4. SIGNIFICADO FÍSICO DAS MATRIZES QUE COMPÕEM A MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

O significado físico das matrizes que compõem a matriz de rigidez tangente $\underline{K}_T$, pode ser obtido considerando o elemento triangular de vértices i, j, k , espessura unitária, módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson $\nu = 0$, para o qual as funções de interpolação são dadas por

$$\Phi_i(x, y) = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Delta} + \frac{y_j - y_k}{2\Delta} x + \frac{x_k - x_j}{2\Delta} y = A_i + B_i x + C_i y \quad (4.1)$$

onde Δ é a área do triângulo

Conhecidos os deslocamentos nodais $\underline{a}^e$, caracterizado pelo deslocamento u_i da fig. (4.1), pode-se determinar o campo de deformações, o campo de tensões e as matrizes $\underline{B}$, $\underline{K}_0$, $\underline{K}_L$ e $\underline{K}_\sigma$. Os esforços nodais são obtidos com a equação (1.24).

A uma variação $\Delta \underline{a}^e$ caracterizada pelo deslocamento Δu_i , correspondem os esforços nodais indicados na fig. (4.2) obtidos com a equação (3.2), ou seja

$$\Delta \underline{P} = \underline{K}_T \Delta \underline{a}^e = (\underline{K}_0 + \underline{K}_L) \Delta \underline{a}^e + \underline{K}_\sigma \Delta \underline{a}^e = \Delta \underline{P}_L + \Delta \underline{P}_\sigma \quad (4.2)$$

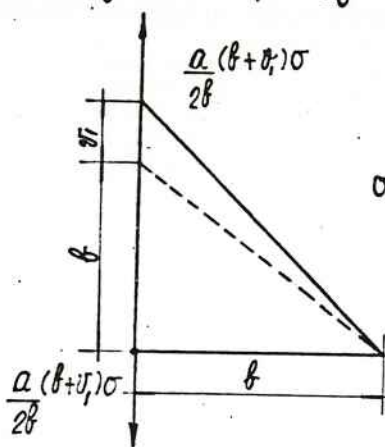
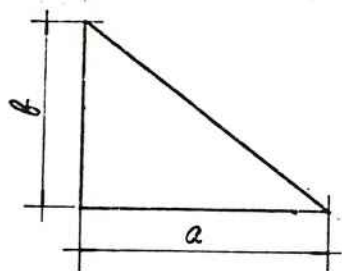


fig. (4.1)

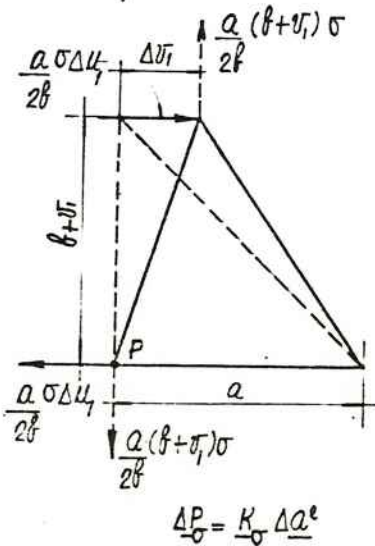
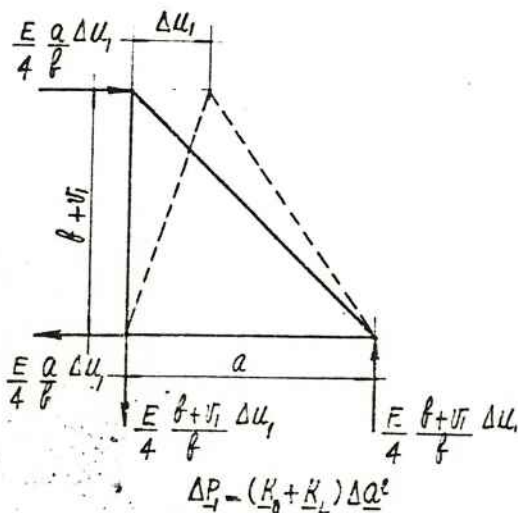


fig. (4.2)

Conclui-se, da análise da fig. (4.2), que a matriz de rigidez $K_1 = K_0 + K_L$, correspondente ao elemento deformado, permite determinar a variação dos esforços modais devida aos deslocamentos adicionais $\Delta \underline{a}^e$, enquanto a matriz K_0 permite caracterizar a variação dos esforços modais — devida à interação entre a mudança de geometria (devida a $\Delta \underline{a}^e$) e as tensões anteriormente instaladas (correspondentes a $\underline{a}^e$) — para que o equilíbrio seja mantido. Assim, a força horizontal no nó 1 permite restaurar o equilíbrio de momentos em relação ao ponto P, alterado pelo deslocamento Δu_1 .

5. EXEMPLO

Neste item, comparam-se os resultados obtidos com os dois métodos básicos de solução discutidos nos itens precedentes, considerando a estrutura da fig. (5.1) de material elástico linear de módulo de elasticidade $E = 1000 \text{ tf/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0$

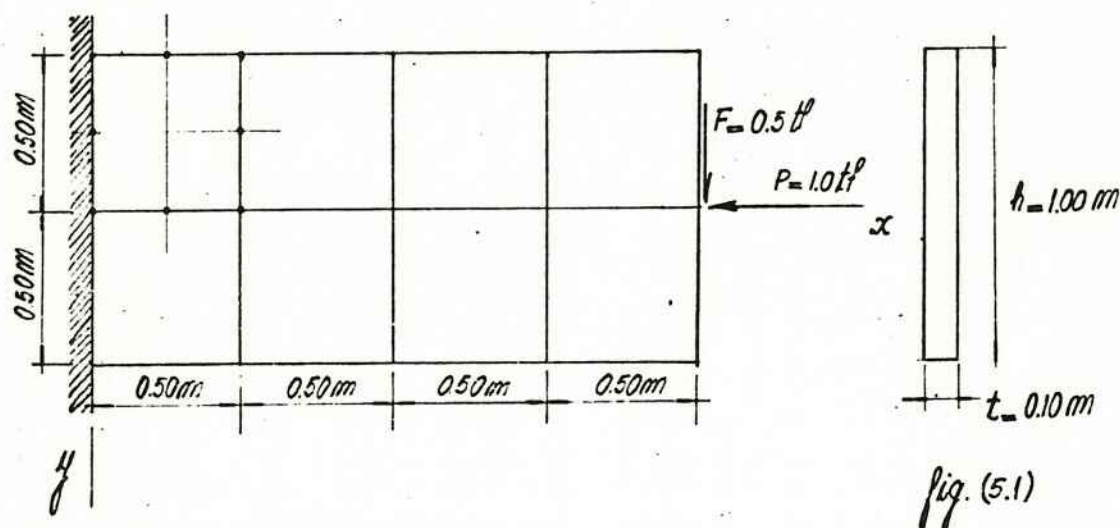


fig. (5.1)

Adotam-se como valores de referência os obtidos com os recursos da resistência dos materiais, considerando os efeitos de segunda ordem devidos à força normal P , assim como a distorção devida à força F . Assim, o deslocamento vertical dos pontos do eixo é dado por

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{F}{P}(l-x) + f + \alpha \frac{Fx}{GS}$$

onde

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad C_1 = \frac{F}{kP} \quad C_2 = -\left[\frac{F}{P} + f\right] \quad \text{e} \quad f = v(l) = \frac{Fl^3}{3EI} \cdot 3 \left[\frac{t^3 k l - k l}{l(kl)^3} \right]$$

enquanto o momento fletor é dado por

$$M(x) = -[F(l-x) + P[f - v(x)]]$$

Utilizou-se a discretização indicada na fig. (5.1), com elementos isoparamétricos de 8 nós, do tipo indicado na fig. (5.2), em que as funções de interpolação correspondentes aos nós situados nos vértices são dadas por

$$\phi_i(r, \lambda) = \frac{1}{4} (1 + r_0)(1 + \lambda_0)(r_0 + \lambda_0 - 1)$$

onde

$$r_0 = r \cdot r_i \quad \lambda_0 = \lambda \cdot \lambda_i$$

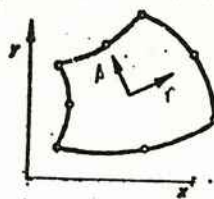


fig. (5.2)

enquanto que as correspondentes aos nós centrais são dadas por

$$\phi_i(r, \lambda) = \frac{1}{2} (1 - r^2)(1 + \lambda_0), \quad \text{para } r_i = 0$$

$$\phi_i(r, \lambda) = \frac{1}{2} (1 - \lambda^2)(1 + r_0), \quad \text{para } \lambda_i = 0$$

Na obtenção da matriz de rigidez de cada elemento, empregou-se o método de Gauss de integração numérica com 9 pontos de integração, nos quais se calcularam, também, as tensões.

DESLOCAMENTO VERTICAL DO PONTO DE APLICAÇÃO DE F

MÉTODO ITERATIVO

SOLUÇÃO LINEAR $f_0 = 0.186 \text{ m}$

1ª ITERAÇÃO $f_1 = 0.223 \text{ m}$

2ª ITERAÇÃO $f_2 = 0.236 \text{ m}$

3ª ITERAÇÃO $f_3 = 0.236 \text{ m}$

VALOR DE REF. $f_r = 0.222 \text{ m}$

MÉTODO INCREMENTAL

1º INCREMENTO (15%) $f_1 = 0.028 \text{ m}$

2º INCREMENTO (15%) $f_2 = 0.058 \text{ m}$

3º INCREMENTO (10%) $f_3 = 0.089 \text{ m}$

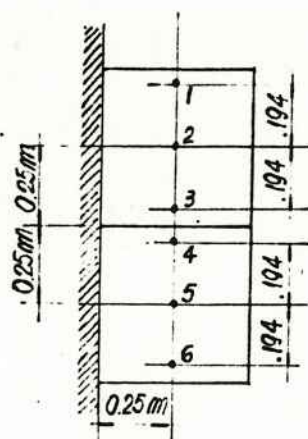
4º INCREMENTO (10%) $f_4 = 0.122 \text{ m}$

5º INCREMENTO (10%) $f_5 = 0.146 \text{ m}$

6º INCREMENTO (10%) $f_6 = 0.170 \text{ m}$

7º INCREMENTO (10%) $f_7 = 0.196 \text{ m}$

8º INCREMENTO (10%) $f_8 = 0.223 \text{ m}$

TENSÕES NORMAIS

	<u>MET. ITERATIVO</u>	<u>MET. INCREMENTAL</u>	<u>VALOR DE REF.</u>
PONTO 1	$\sigma_1 = 49.40 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_1 = 46.51 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_{1r} = 48.02 \text{ tf/m}^2$
PONTO 2	$\sigma_2 = 20.09 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_2 = 18.85 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_{2r} = 22.69 \text{ tf/m}^2$
PONTO 3	$\sigma_3 = -5.45 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_3 = -5.21 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_{3r} = -2.63 \text{ tf/m}^2$
PONTO 4	$\sigma_4 = -19.00 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_4 = -17.91 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_{4r} = -17.57 \text{ tf/m}^2$
PONTO 5	$\sigma_5 = -43.86 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_5 = -41.38 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_{5r} = -42.69 \text{ tf/m}^2$
PONTO 6	$\sigma_6 = -70.91 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_6 = -66.99 \text{ tf/m}^2$	$\sigma_{6r} = -68.02 \text{ tf/m}^2$

REFERÊNCIA

ZIENKIEWICZ, O. C.

"The finite element method in engineering science."

MCGRAW-HILL, 3rd ed., 1977

