Problema Restrito dos três Corpos: Um Teorema de Poincaré-Birkhoff sobre Existência de Órbitas Periódicas

W. M. OLIVA

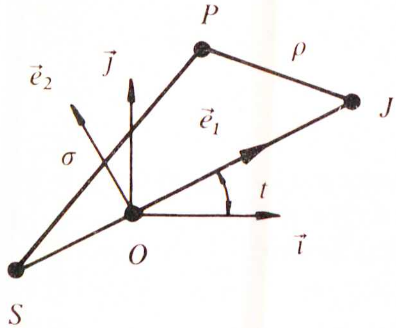
Apresentaremos, nesta exposição, uma demonstração de Moser ([4], p. 67) de uma questão proposta por Poincaré ([1]) e resolvida por Birkhoff ([3]), sobre a existência de determinadas órbitas periódicas no problema restrito dos três corpos.

É bem conhecido que existem órbitas periódicas no movimento de uma partícula P, sem massa, em volta de um corpo S, com massa; são órbitas elíticas. Perturbando-se o movimento de P com a introdução de um segundo corpo J, com massa positiva, no plano do movimento, de modo que J e S descrevam movimentos circulares uniformes ao redor de seu centro de massa, pergunta-se: persistem movimentos periódicos da partícula P? A resposta é afirmativa; uma infinidade de tais movimentos periódicos continua a existir após a perturbação.

O método proposto por Poincaré foi o de olhar para o espaço de fase dos movimentos (no caso em questão é um aberto do $\mathbb{R}^4$), escolher um conveniente valor regular de uma integral primeira do movimento (integral de Jacobi), determinar a natureza da variedade tridimensional correspondente a tal valor regular (no caso é o espaço projetivo tri-dimensional P^3), escolher uma superfície Σ, transversal às trajetórias em P^3, que admita uma *transformação de Poincaré* ([5], p. 159) (Σ é, no caso, uma coroa circular), e finalmente, mostrar que tal transformação admite um ponto fixo. Poincaré chegou mesmo a enunciar uma conjetura geométrica que, se verdadeira, permitiria determinar pontos fixos para a referida transformação da coroa; essa conjetura foi mais tarde provada por Birkhoff ([2]).

Para escrever as equações do movimento de P escolhe-se um referencial fixo $(0, \vec{i}, \vec{j})$ em que 0 é o centro de massa dos pontos materiais S e J; para simplificar, admite-se que sejam iguais a 1: a distância SJ, a soma das massas de S e J e a velocidade angular de S e de J em torno de 0. Indicando-se por μ a massa de J, por (u_1, u_2) as coordenadas de P no referencial $(0, \vec{i}, \vec{j})$, por σ

a distância PS e por ρ a distância PJ, a partícula P será acelerada por $\ddot{u}_1 \vec{i} + \ddot{u}_2 \vec{j}$ e as leis de Newton fornecem



$$\ddot{u}_i = \frac{\partial V}{\partial u_i} = V_{u_i}, \quad i = 1,2,$$

$$V = \frac{1-\mu}{\sigma} + \frac{\mu}{\rho}.$$

A transformação desse sistema de 2.ª ordem em um de 1.ª ordem é obtida introduzindo-se novas variáveis $v_1 = \dot{u}_1$ e $v_2 = \dot{u}_2$. Chamando de $\tilde{H}$ a hamiltoniana dependente do tempo:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) - V$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \tilde{H}_{v_i} \\ & \qquad\qquad i = 1,2. \\ \dot{v}_i &= -\tilde{H}_{u_i} \end{aligned}$$

A fim de se obter um sistema hamiltoniano autônomo (independente do tempo) introduz-se um referencial móvel $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de mesma orientação que o fixo e tal que $\vec{e}_1$ seja o versor de OJ. Sendo (x_1, x_2) as coordenadas de P no referencial móvel tem-se

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ix_2 = ue^{it} \\ y &= ve^{it}, \end{aligned}$$

em que $u = u_1 + iu_2$ e $v = v_1 + iv_2$, que constitui uma transformação canônica em que a nova hamiltoniana é independente do tempo e toma a forma

$$H = \frac{1}{2}|y|^2 - V - D$$

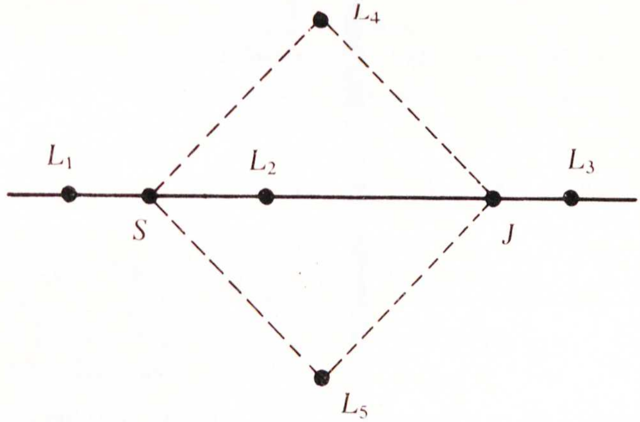
(integral de Jacobi) em que $D = Im\, x\bar{y}$ (parte imaginária de $x\bar{y}$). Nas coordenadas móveis os pontos J e S têm, respectivamente, coordenadas $(1-\mu, 0)$ e $(-\mu, 0)$; o espaço de configurações é $\mathbb{R}^2 - \{J, S\}$ e o espaço de fase é $(\mathbb{R}^2 - \{J, S\}) \times \mathbb{R}^2$.

Como $\dot{x} = \dot{u}e^{it} + iue^{it} = ve^{it} + iue^{it} = y + ix$, chega-se facilmente a

$$H = \frac{1}{2}\{|\dot{x}|^2 - F(x)\}$$

em que $F(x) = |x|^2 + 2V$.

Os pontos críticos do problema são os pontos da forma $(x_1, x_2, 0, 0)$ tais que $dF(x_1, x_2) = 0$. Suas projeções no espaço das configurações são os cinco pontos L_i $(i = 1, \ldots, 5)$ dispostos como na figura

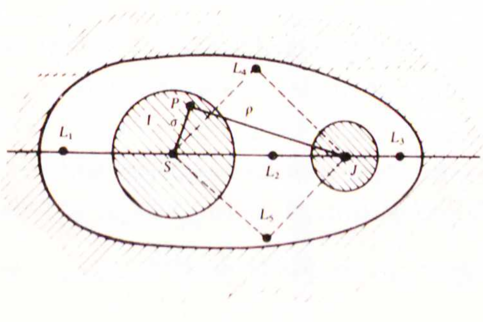


As posições de L_1, L_2 e L_3 dependem de μ enquanto que os triângulos L_4SJ e L_5SJ são equiláteros.

Para C suficientemente grande o conjunto dos movimentos possíveis que correspondem à relação

$$H(x,\dot{x}) = -\frac{C}{2} = \frac{1}{2}(|\dot{x}|^2 - F(x)),$$

isto é, $F(x) = C + |\dot{x}|^2$, estão dispostos no espaço das configurações no interior de duas ovais menores e no exterior de uma oval maior que envolve os cinco pontos críticos; as regiões hachuradas correspondem à relação



$F(x) \geq C$. C é um valor regular de $F(x)$ e a igualdade $F(x) = C$ corresponde às três ovais. Quando C diminui as ovais menores aumentam enquanto que a maior diminui e a região I para um dado C chama-se *região de Hill;* é esta a região aonde verificaremos a existência de movimentos periódicos.

Introduzindo a transformação canônica

$$x + \mu = \frac{1}{2}\xi^2$$

$$y = \frac{\eta}{2}$$

a nova hamiltoniana $K = H + \dfrac{C}{2}$ toma a forma

$$K = \frac{1}{2|\xi|^2}\left[|\eta|^2 + \left(C_0 - \frac{2\mu}{\rho}\right)|\xi|^2 - 4(1-\mu)\right]$$

onde $C_0 = C - 2D$.

A única singularidade na expressão de K é a origem $\xi = 0$ (na região de Hill a distância ρ é $\neq 0$). O campo de vetores no aberto 4-dimensional (ξ, η) correspondente ao sistema diferencial obtido poderá ser reparametrizado pela mudança $dt = |\xi|^2 d\tau$ e chega-se ao sistema hamiltoniano

$$\frac{d\xi_i}{d\tau} = K_{\eta_i}$$

$$i = 1,2$$

$$\frac{d\eta_i}{d\tau} = K_{\xi_i}$$

$$K = \frac{1}{2}\left\{|\eta|^2 + \left(C_0 - \frac{2\mu}{\rho}\right)|\xi|^2 - 4(1-\mu)\right\}$$

e $K = 0$ corresponde à variedade tridimensional $H = -\dfrac{C}{2}$.

Teorema. *Para* $C > 0$ *suficientemente grande, e para* $\mu < \mu_0(C)$, *o sistema hamiltoniano descrito acima tem um número infinito de soluções periódicas de nível de energia* $H = -\dfrac{C}{2}$, *na região de Hill.*

Observação. Estas soluções são perturbações de órbitas encontradas no caso $\mu = 0$ e são caminhos fechados em volta de S, mesmo em coordenadas moveis.

No caso de se ter $\mu = 0$ obtem-se

$$K = \frac{1}{2}\{|\eta|^2 + C_0|\xi|^2 - 4\}$$

em que $C_0 > 0$ para C suficientemente grande. A variedade $K = 0$ é um elipsóide e poderá transformar-se em uma esfera S^3 com a mudança de coordenadas

$$w = \eta + i\sqrt{C_0}\ \xi$$
$$z = \eta - i\sqrt{C_0}\ \xi.$$

De fato $K = \frac{1}{4}\{|w|^2 + |z|^2 - 8\}$ e $K = 0$ corresponde a $|w|^2 + |z|^2 = 8$. O sistema será dado por

$$w' = \frac{dw}{dt} = iAw$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = iBz$$

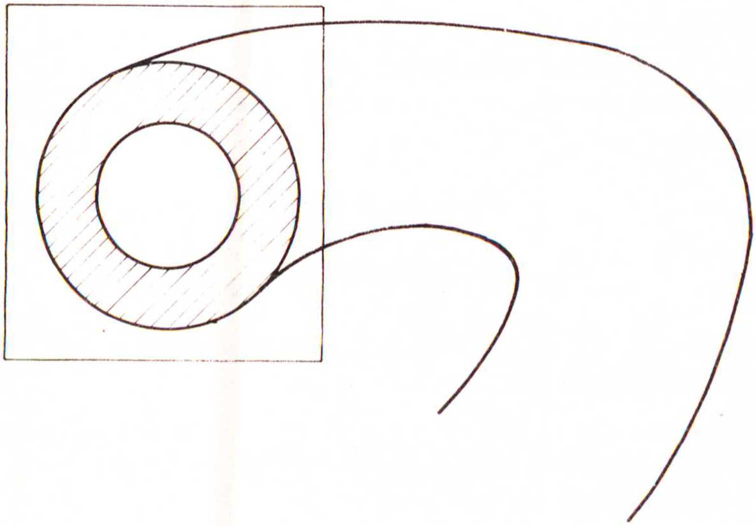
onde A e B são funções reais

$$A = \frac{|w - z|^2}{8C_0} + \sqrt{C_0}$$
$$B = \frac{|w - z|^2}{8C_0} - \sqrt{C_0}\,.$$

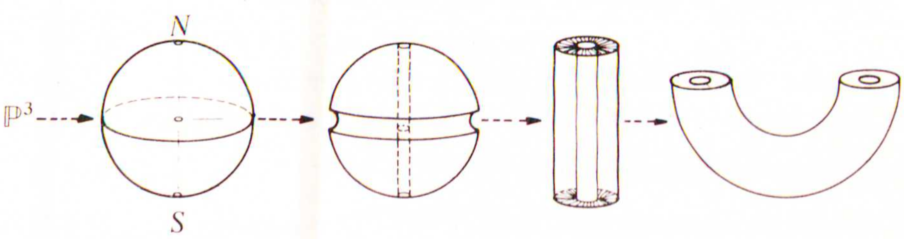
E facil constatar-se que w e z são integrais primeiras.

Observações. Pode-se notar que existe a correspondência $\pm(w, z) \longrightarrow (x, y)$, isto é, os pontos de uma 3-esfera, identificando-se pontos diametralmente opostos, está em correspondência (1, 1) com $H = -\frac{C}{2}$, isto é, a variedade dos estados de movimento de nível $H = -C/2$ é homeomorfa ao $\mathbb{P}^3$.

Se, de algum modo, um toro sólido invariante puder estar contido em $\mathbb{P}^3$, a secção desse toro por um plano definirá uma coroa como campo de definição de uma transformação de Poincaré.



E bem conhecido que o $\mathbb{P}^3$ pode ser realizado no $\mathbb{R}^3$ como uma bola fechada em que se identificam pontos da fronteira, diametralmente opostos.



Se retirarmos desse modelo o equador e o eixo $N-S$ o remanescente pode ser deformado, inicialmente em um cilindro com parede espessa e este, por identificação, num toro sólido.

No modelo inicial, isso corresponde a serem extraídos dois círculos contidos, por exemplo, nos planos $z = 0$ e $w = 0$. O remanescente cilindro espesso é o seguinte subconjunto do $\mathbb{R}^4$:

$$\{(w, z) \mid 0 < |w|^2 < 8, \quad w^2 + z^2 = 8\}.$$

Convem observar que esses dois círculos são órbitas de movimentos periódicos triviais no espaço de fase:

$$\begin{array}{ccc} w = 0 & & z = 0 \\ & \text{e} & \\ z = \sqrt{8}\, e^{ik\tau} & & w = \sqrt{8}\, e^{ih}\tau \end{array}$$

Assim $w = 0$ satisfaz $w' = iAw$ e $z = \sqrt{8}\, e^{ik\tau}$ levada na equação $z' = iBz$ fornece $ik\sqrt{8}\, e^{ik\tau} = iB\sqrt{8}\, e^{ik\tau}$ ou $k = B$ que para $w = 0$ fornece

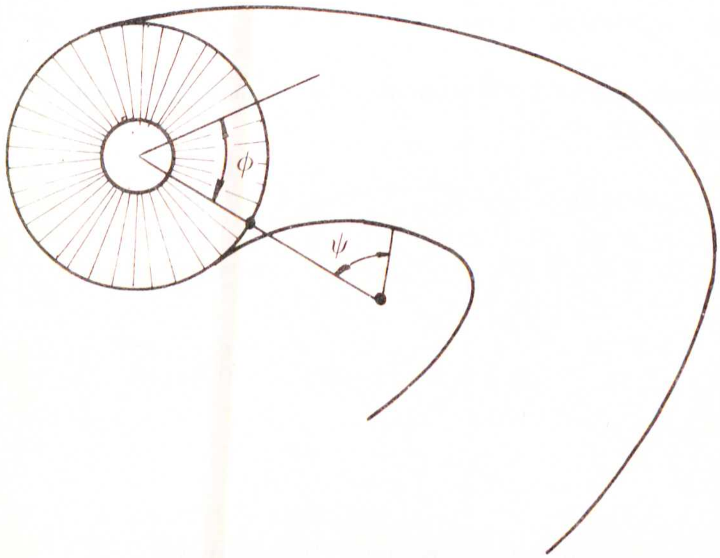
$$k = \frac{1}{C_0} - \sqrt{C_0}\ ;$$

por outro lado o valor de C_0 para $\mu = 0$ é dado por

$$C_0 = C + \frac{1}{4\sqrt{C_0}} (|w|^2 - |z|^2)$$

que ao longo de tal curva resulta: $C_0 = C + \dfrac{2}{\sqrt{C_0}}$, que permite determinar a constante real k. De modo análogo determina-se a constante real h.

Como de $\mathbb{P}^3$ foram retiradas duas órbitas, o remanescente ainda é invariante pelo fluxo dos movimentos. É claro que $(|w|^2, \arg w, \arg z)$ podem constituir uma terna de coordenadas para o $\mathbb{P}^3$ menos os dois círculos. Para levar em conta as necessárias identificações de pontos diametralmente opostos introduzem-se as coordenadas: $|w|^2$, $\frac{\varphi}{2} = \arg w$, $\psi = \arg w - \arg z$. Deste modo a identificação de (w, z) com $(-w, -z)$ ou, equivalentemente, de $arg(w+k\pi)$, $arg(z+k\pi)$, k inteiro, pode ser substituída pela exigência de que ϕ e ψ sejam variáveis angulares módulo 2π. Consequentemente a variedade $H = -\frac{C}{2}$, após a retirada de um par de soluções triviais, é dada por $0 < |w|^2 < 8$, ϕ e ψ módulo 2π. Este é o espaço produto, um toro sólido $I \times S^1 \times S^1$.



Como $|w|$ é integral primeira do movimento, a transformação de Poincaré da coroa está definida, com as seguintes propriedades:

1.ª) *Os crescimentos de ϕ nos contornos interno e externo da coroa são distintos.*

2.ª) *A transformação de Poincaré preserva a área.*

Prova da 1.ª propriedade. Como

$$\frac{d\phi}{d\psi} = \frac{\phi'}{\psi'} = \frac{2A}{A-B} \quad ,$$

temos:

$$\phi_{2\pi} = \phi_0 + \int_0^{2\pi} \frac{2A}{A-B}\, d\psi ;$$

porém

$$\frac{2A}{A-B}=\frac{A}{\sqrt{C_0}}=1+\frac{|w-z|^2}{8C_0^{3/2}}$$

e como

$$w-z=|w|e^{i\frac{\varphi}{2}}-|z|e^{i(\frac{\varphi}{2}-\psi)}=e^{i\frac{\varphi}{2}}(|w|-|z|e^{-i\psi})$$

temos

$$|w-z|^2=\Big|\,|w|-|z|e^{-i\psi}\Big|^2=\Big|\,|w|-|z|\,(cos\ \psi-isen\ \psi)\Big|^2$$
$$=(|w|-|z|cos\,\psi)^2+|z|^2sen^2\psi=|w|^2+|z|^2-2|z|\,|w|\,cos\,\psi$$

logo

$$\int_0^{2\pi}\frac{2A}{A-B}\,d\psi=\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{8}{8C_0^{3/2}}-\frac{2|w|\,|z|}{8C_0^{3/2}}\,cos\ \psi\right)d\psi$$

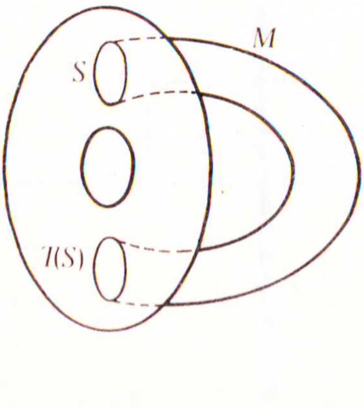
onde o valor de $C_0^{3/2}$ só depende da integral $|w|^2$. Portanto,

$$\phi_{2\pi}-\phi_0=2\pi\left(1+\frac{1}{C_0^{3/2}}\right),$$

ou seja, a variação do ângulo ϕ é função de $|w|^2$.

Mas é facil mostrar que $\sqrt{C_0}$ é função monotônica crescente de $|w|^2$ donde se conclui que a variação angular é diferente nos contornos interno e externo da coroa.

Prova da 2.ª propriedade. Seja T a transformação de Poincaré na coroa, S uma variedade com bordo contida na coroa e $T(S)$ sua imagem.



A seguinte forma diferencial Ω é um invariante integral ([5], p. 136):

$$\Omega = dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2 - dH \wedge dt$$

que em $H = -\frac{C}{2}$ reduz-se a $\Omega = dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2$ e posteriormente a $\Omega = d\phi \wedge dD$. Usando o teorema de Stokes e a relação $d(d\omega) = 0$, temos

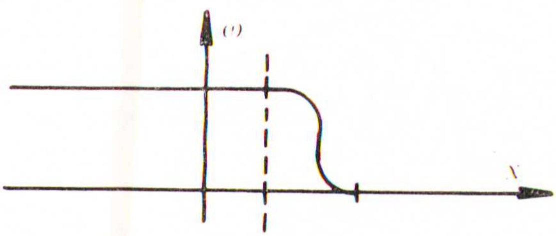
$$0 = \int_M d(d\omega) = \int_M d\Omega = \int_{\partial M} \Omega = \int_S \Omega - \int_{f(S)} \Omega + \int_{\bar{M}} \Omega.$$

Pela definição de sistema hamiltoniano ([5], p. 107) tem-se $\int_{\bar{M}} \Omega = 0$ pois $\Omega(X_H, v) = X_H \lrcorner\, \Omega(v) = -dH(v)$ e v é tangente à variedade $H = -\frac{C}{2}$ logo $dH(v) = 0$. Resulta então $\int_S \Omega = \int_{f(S)} \Omega.$

Na seqüência serão utilizados dois teoremas, um de ponto fixo para os homeomorfismo da coroa e um outro de preservação de órbitas periódicas por perturbação do parâmetro (ver [4]).

Teorema 1. *Seja* T *um homeomorfismo de uma coroa sobre si mesma que preserva uma forma de volume e que verifica, para todo* Φ, *a condição (que é chamada "twist condition"):*

$$f(\Phi, 0) - \Phi \leq 2\pi C_1 < 2_\pi C_2 \leq f(\Phi, 1) - \Phi.$$



Então, para todo racional $\frac{p}{q}$ no intervalo (C_1, C_2) existe um ponto fixo P_0 de algum iterado de T que tem $\frac{p}{q}$ como seu número de rotação, isto é,

$$\frac{p}{q} = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(P_0)}{2\pi n}$$

onde f_n *é a coordenada angular do* n-*ésimo iterado de* T, $f = f_1$.

Teorema 2. *Seja* $x_H(\mu)$ *um sistema hamiltoniano de hamiltoniana* $H(\mu)$ *tal que para* $\mu = 0$ *admite uma órbita periódica* $p(t)$ *de período* τ_0. *Seja* $T: \Sigma^{n-1} \to \Sigma^{n-1}$ *uma transformação de Poincaré de* $p(t)$ *no ponto* $p(0)$. *Se* 1 *que é sempre autovalor de* $dT(p(0))$ *for "simples", então* T *tem um ponto fixo (para cada* μ *próximo de zero) correspondente a uma solução periódica* $q(t, \mu)$ *tendo mesmo nível de energia que* $p(t)$ *e cujo período tende a* τ_0 *quando* $\mu \to 0$.

Conclusões finais. Aplicando-se o Teorema 1 chega-se a existência de órbitas periódicas para o caso $\mu = 0$.

O caso geral $\mu \neq 0$. Voltando ao sistema já considerado:

$$\frac{d\xi_i}{d\tau} = K_{\xi_i}$$

$$\frac{d\eta_i}{d\tau} = -K_{\eta_i} \qquad i = 1{,}2$$

$$K = \frac{1}{2} \left\{ |\eta|^2 + \left(C_0 - \frac{2\mu}{\rho} \right) |\xi|^2 - 4(1-\mu) \right\}$$

e $K = 0$ representa a variedade $H = -\frac{C}{2}$.

Como antes faz-se

$$w = \eta + i\sqrt{C_0}\ \xi$$

$$z = \eta - i\sqrt{C_0}\ \xi$$

teremos:

$$\left.\begin{aligned} w' &= F(z, \bar{z}, w, \bar{w}, \mu) \to iAw \\ z' &= G(z, \bar{z}, w, \bar{w}, \mu) \to iBz \end{aligned}\right\} \text{quando } \mu \to 0$$

e $K = 0$ resulta $8 - (|w|^2 + |z|^2 + 0(\mu)) = 0$, que para μ pequeno mostra de modo análogo que $H = -\frac{C}{2}$ é $\mathbb{P}^3$ para C grande. Para escolher soluções periódicas a serem retiradas de $\mathbb{P}^3$ usa-se o Teorema 2 que se aplica às órbitas

$$\begin{cases} w = \sqrt{8}\, e^{ik\tau} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w = 0 \\ z = \sqrt{8}\, e^{ik'\tau} \end{cases}$$

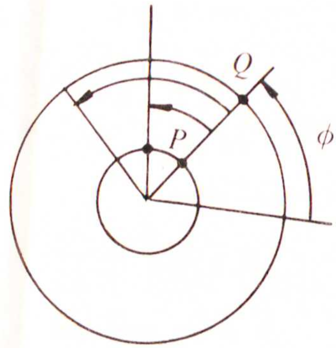
encontrando-se órbitas periódicas próximas, de mesmo nível de energia, que denotaremos:

$$\begin{cases} w_1 \to \sqrt{8}\, e^{ik\tau} \\ z_1 \to 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w_2 \to 0 \\ z_2 \to \sqrt{8}\, e^{ik'\tau}. \end{cases}$$

Uma nova construção do anel se faz definindo

$$\begin{aligned} w &= W + w_2\omega(|W|) \\ z &= Z + z_1\omega(|Z|) \end{aligned}$$

onde ω é C^∞ do tipo



Nas novas coordenadas $W = 0$ e $Z = 0$ fazem o papel de $w = 0$ e $z = 0$ no caso $\mu = 0$ e o toro sólido é definido com ϕ e ψ (mod. 2π) dados por

$$W = |W|\, e^{i\frac{\phi}{2}}$$

$$Z = |Z|\, e^{i(\frac{\phi}{2} - \psi)}$$

isto é, o toro sólido é dado por $0 < |W|^2 < 8 + 0(\mu)$. A forma de volume preservada é $(1 + 0(\mu))d\phi \wedge dD$ e outra vez pode ser utilizado o Teorema de Birkhoff. A "twist condition" é válida quando $\mu = 0$ logo permanece válida para $\mu \neq 0$ (pequeno). A existência de órbitas periódicas fica assim constatada.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Poincaré, *Sur un théorème de Géométrie*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t. XXXIII (1912), 375-407.

[2] G. D. Birkhoff, *Démonstration du dernier Théorème de Géométrie de Poincaré*, Bull. de la Soc. Math. de France, vol. XLII (1914).

[3] G. D. Birkhoff, *The Restricted Problem of Three Bodies*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t.XXXIX (1.° sem. 1915).

[4] J. Moser, Lectures on Hamiltonian Systems, N.Y.U. Lectures, 1964.

[5] R. Abraham and J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, W. A. Benjamin Inc., N. Y., 1967.

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de S. Paulo
S. Paulo — BRASIL