

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA**

**Relatório Técnico**

**RT-MAP-0501**

**A DINÂMICA DE DIFEOMORFISMOS DE SUPERFÍCIES**

**André Selles do Corvelho**

**ABRIL, 2005**

# A DINÂMICA DE DIFEOMORFISMOS DE SUPERFÍCIES

ANDRÉ SALLES DE CARVALHO

## 1. INTRODUÇÃO

O meu trabalho trata da dinâmica de homeomorfismos e difeomorfismos de superfícies. A ênfase está no estudo de famílias de tais transformações — tais como aquelas introduzidas por Hénon [Hén76] e Lozi [Loz79] — e um dos principais objetivos é dar uma descrição completa das possibilidades topológicas para uma tal família que passa de dinâmica trivial a caótica. Famílias de difeomorfismos de superfícies têm sido estudadas extensivamente nos últimos anos. Em [BC91, MV93], foi mostrado que, sob hipóteses razoáveis, tais famílias possuem atratores ‘estranhos’ e que, além disso, estes são abundantes, no sentido de que há um conjunto de medida positiva de parâmetros para os quais tais atratores existem. As propriedades estocásticas de atratores de Hénon foram estudadas em [BY93b, BY00], por exemplo. Outros autores (por exemplo, [BS99, HOV95, BF96, FS01]) estudam a família de Hénon complexa. Entre outras coisas, foram exibidas semelhanças e diferenças interessantes entre a família de Hénon complexa e a sua análoga em dimensão 1, a família quadrática. Em [Pal00], várias conjecturas e resultados recentes sobre o comportamento genérico de sistemas dinâmicos em dimensão 2 são enunciados. Este é, certamente, um sumário bastante incompleto dos resultados na área: uma pesquisa bibliográfica para artigos contendo a palavra ‘Hénon’ produz centenas títulos.

Muitas questões centrais sobre famílias de transformações de superfícies estão em aberto, fazendo com que esta seja uma área ativa de pesquisa. Meu trabalho lida com aspectos topológicos e geométricos da dinâmica de tais famílias e um dos principais objetivos é dar uma descrição completa da sua dinâmica topológica. Além disso, é também importante descrever geometricamente estas transformações. Um modelo teórico a ser emulado é o da *teoria de kneading* desenvolvida por Milnor e Thurston. Grosso modo, o lado topológico desta teoria consiste de duas partes, uma que constrói sinteticamente modelos de endomorfismos do intervalo, e a outra que mostra que estes modelos de fato descrevem os sistemas dinâmicos em consideração. A teoria também mostra que é possível *geometriz*ar os modelos, para o que é necessário introduzir técnicas de análise complexa.

Cvitanović introduziu *poda* (*pruning*) como um análogo bidimensional para a teoria de kneading e mostrou numericamente como os modelos de poda são capazes de descrever acuradamente as transformações de Hénon. Em [dC99], poda foi estabelecida de maneira matematicamente rigorosa e, por meio de exemplos, foi observado que a *família de poda* pode mesmo ser grande o suficiente para conter modelos topológicos para todas as transformações de Hénon. Esta afirmação é tornada rigorosa na *Conjectura da Frente de Poda (CFP)*: a *família de poda contém a família de Hénon a menos de semi-conjugação*. A teoria de poda foi desenvolvida em [dCH01], onde foi apresentada uma relação explícita entre poda e uma teoria de kneading generalizada para endomorfismos de árvores e grafos e, usando esta relação, foi apresentada uma demonstração algorítmica do teorema de classificação de Thurston para homeomorfismos de superfícies.

Poda pode ser vista como uma tentativa de descrever famílias de homeomorfismos de superfícies *de fora*, isto é, de maneira construtiva, apresentando modelos topológicos para todas as transformações da família. Vindo no sentido oposto, é possível também tentar entender *restrições* na maneira em que dinâmica é criada em famílias que passam de comportamento dinamicamente trivial a caótico. Aqui, o estudo de *implicação entre órbitas*, isto é, de quando e como a presença de certa órbita periódica implica a existência de outras órbitas, faz um papel central. O problema de

implicação em dimensão 1 foi bastante estudado e hoje existe uma teoria bem desenvolvida para este caso. Em dimensão 2 o problema é mais complicado, já que mesmo a especificação topológica de órbitas periódicas é mais elaborada. Os artigos [dCH02a, dCH04, dCH03a] tratam do problema de implicação entre órbitas periódicas da ferradura de Smale. A motivação destes resultados vem frequentemente da teoria de poda. Por outro lado, a teoria de implicação sugere técnicas para atacar o problema central da teoria de poda, a CFP.

Os artigos [dC02, dCH03b] tratam de modelos geométricos em dimensão 2. *Transformações pseudo-Anosov generalizadas* que, como diz o nome, generalizam a classe de transformações pseudo-Anosov de Thurston, são introduzidas e a família de transformações pseudo-Anosov generalizadas *unimodais* é descrita. Esta família fornece uma 'complexificação' da família unimodal de endomorfismos do intervalo diferente da usual, isto é, como a parte real de endomorfismos holomorfos da esfera de Riemann. Aqui as transformações são *automorfismos* quase-conformes da esfera complexa.

Juntas, as idéias acima e outras descritas abaixo formam o contorno de uma teoria topológico-geométrica para homeomorfismos em dimensão 2, do ponto de vista de dinâmica topológica.

O texto está organizado do seguinte modo. Na Seção 2 são introduzidos conceitos preliminares que serão utilizados no decorrer do artigo: a ferradura, a família de Hénon, a ordem unimodal, tipos de trança e implicações entre tranças e o teorema de classificação de Thurston de homeomorfismos de superfícies a menos de isotopia. A Seção 3 descreve poda: são definidos discos de poda, é enunciado o Teorema de Poda, é definida a família de poda, uma versão preliminar da CFP é apresentada e evidências para esta conjectura são discutidas. A Seção 4 contém uma descrição da relação de equivalência de *entropia nula*, que é um ingrediente técnico importante nas idéias apresentadas. Ela permite dar um enunciado preciso da CFP e faz também um papel central na 'geometrização' dos modelos de poda. A Seção 5 apresenta a relação entre poda e uma generalização da teoria de kneading para endomorfismos de árvores. Isto é utilizado para estabelecer uma correspondência entre certas subfamílias da família de poda e famílias unimodais de endomorfismos de árvores e para indicar as consequências mais relevantes para o que é discutido aqui da demonstração algorítmica do teorema de Thurston usando poda. A Seção 6 descreve uma conjectura sobre como a ordem parcial de implicação organiza os tipos de trança da ferradura. A conjectura particiona as órbitas periódicas da ferradura em famílias linearmente ordenadas por implicação e fatora a ordem parcial em uma parte totalmente ordenada dentro de cada família e a ordem parcial entre órbitas homoclínicas. O cálculo de implicação entre tranças é, em geral, bastante longo e trabalhoso. No caso de tipos de trança da ferradura, essa conjectura trivializa este cálculo dentro das famílias linearmente ordenadas: basta comparar as representações simbólicas das órbitas usando a ordem unimodal. A Seção 7 contém uma descrição da construção de transformações pseudo-Anosov generalizadas, que são exemplos de modelos geométricos para homeomorfismos em dimensão 2. A Seção 8 apresenta um apanhado do que foi apresentado e discute tópicos de pesquisa em andamento e problemas para pesquisa futura.

## 2. CONCEITOS PRELIMINARES

Aqui são introduzidos os conceitos e a notação utilizados ao longo da monografia. Esta seção pode servir como uma seção de referência se surgirem dúvidas durante a leitura das seções seguintes.

*Observação 1.* Todas as superfícies consideradas aqui serão orientadas e todos os homeomorfismos e difeomorfismos preservarão esta orientação.

**2.1. A ferradura.** A *ferradura* é um difeomorfismo da esfera introduzido por Smale [Sma67] como exemplo paradigmático de um difeomorfismo estruturalmente estável que, no entanto, possui dinâmica caótica. A ferradura será usada repetidas vezes aqui e a descrevemos brevemente para estabelecer a notação.

A ferradura é um difeomorfismo da esfera, denotado por  $F_0: S^2 \rightarrow S^2$ , cuja dinâmica interessante está contida na região em forma de estádio denotada por  $I$  na Figura 1.  $F_0$  leva  $I$  dentro de si mesmo

em forma de uma ferradura. Denotando por  $S$  o quadrado dentro de  $I$  (folheado por segmentos verticais na figura), segmentos horizontais e verticais de  $S \cap F_0^{-1}(S)$  são levados, respectivamente, em segmentos horizontais e verticais em  $S$ . Em cada uma das duas componentes de  $S \cap F_0^{-1}(S)$  (que são retângulos se estendendo de cima a baixo de  $S$ ),  $F_0$  é linear, expandindo segmentos horizontais por um fator  $\mu > 2$  e contraindo segmentos verticais pelo fator  $1/\mu$ . Há um poço fixo (indicado por  $\blacksquare$ ) no semi-disco da esquerda e duas selas fixas (indicadas por  $\bullet$  e  $\circ$ ) em  $S$ . O ponto no infinito é fixo e repulsor e sua bacia contém todos os pontos no complemento de  $I$ . O conjunto  $\Lambda$  de pontos que permanecem em  $S$  sob todas as iteradas futuras e passadas de  $F_0$  é um conjunto de Cantor com uma estrutura produto onde a dinâmica é conjugada à transformação de shift  $\sigma: \Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Sigma$ . A conjugação é dada, como de costume, pelo homeomorfismo de *itinerário*  $h: \Lambda \rightarrow \Sigma$  definido associando o símbolo 0 (respectivamente, 1) a pontos na metade esquerda (respectivamente, direita) de  $S$ , como indicado na Figura 1. É um fato conhecido sobre a ferradura que  $\Lambda = \overline{W^s(p)} \cap \overline{W^u(p)}$ , para qualquer ponto periódico  $p \in \Lambda$ , onde  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  denotam, respectivamente, as variedades estável e instável de  $p$ .

Note que, contraindo cada segmento vertical em  $S$  e os dois semi-discos a direita e esquerda a pontos,  $I$  se torna um intervalo  $I$  e  $F_0$  se projeta à uma transformação unimodal  $f_0: I \rightarrow I$  cuja imagem cobre o intervalo por completo duas vezes, como indicado na figura.

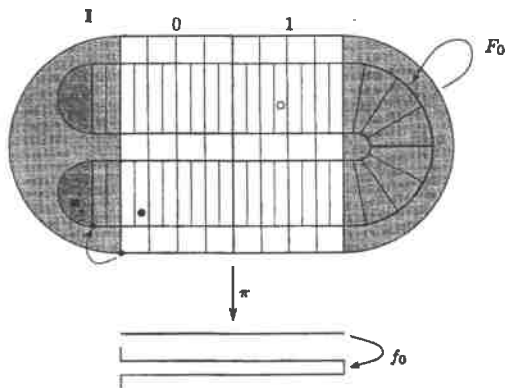


FIGURE 1. A ferradura e seu quociente unidimensional.

O homeomorfismo  $h$  é usado para identificar cada ponto  $x \in \Lambda$  com sua representação simbólica  $h(x) = \dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2 \dots \in \Sigma$ . Pontos periódicos correspondem 1-1 a seqüências periódicas com o mesmo período. Utiliza-se uma barra para indicar repetição infinita de uma palavra (finita) em 0s e 1s. Assim, a representação simbólica de um ponto periódico de período  $n$  é  $\bar{w} = \dots www \cdot www \dots$  para algum  $w \in \{0, 1\}^n$ .

Uma órbita periódica  $P$  de período  $n$  é representada por seu código  $c_P \in \{0, 1\}^n$ , que consiste dos primeiros  $n$  símbolos do itinerário do ponto  $p$  da órbita que se encontra mais à direita: portanto  $h(p) = \bar{c}_P$ . Por exemplo, a órbita que contém o ponto cujo itinerário é  $00101110$  tem código  $10001011$  (veja a Seção 2.3).

Órbitas homoclínicas  $H$  ao ponto fixo de código 0 também serão consideradas. Tais órbitas serão identificadas pelo seu *cerne*  $c_H$ , que é o segmento não identicamente zero do itinerário de seus pontos: por exemplo, o cerne da órbita do ponto de itinerário  $0\bar{1}1 \cdot 101\bar{0}$  é  $11101$ .

**2.2. A família de Hénon.** A família de Hénon, que será mencionada repetidas vezes no que se segue, é a família de difeomorfismos polinômiais de  $\mathbb{R}^2$  dada pela fórmula

$$H_{a,b} = (a - x^2 - by, x)$$

onde  $a, b$  são parâmetros reais. Uma família similar é a família de Lozi:

$$L_{a,b} = (1 - a|x| - by, x).$$

Será assumido que  $b > 0$ , fazendo com que as duas famílias preservem a orientação do plano.

É possível mostrar [DN79] que, se o parâmetro  $a$  é grande o suficiente, então a transformação de Hénon  $H_{a,b}$  é conjugada à ferradura. Por outro lado, para valores pequenos de  $a$ , é fácil ver que  $H_{a,b}$  tem dinâmica trivial. A questão que há muitos anos interessa tanto matemáticos quanto físicos é: *o que exatamente acontece entre um extremo e outro?*

A Figura 2 mostra as variedades estável e instável do ponto fixo 'de fora' (isto é, aquele cujos autovalores são sempre positivos) da família de Hénon, para três escolhas de valores dos parâmetros. Em a) (onde  $a = -0.3, b = 0.5$ ), não há interseção homoclínica e a dinâmica recorrente consiste apenas de dois pontos fixos. Em c) (onde  $a = 5.5, b = 0.8$ ) vemos variedades invariantes que, a menos de uma troca de coordenadas, são como aquelas do ponto fixo de código 0 da ferradura. Em b) (onde  $a = 1.26, b = 0.8$ ) a situação é claramente bastante mais complicada. Em particular, a figura parece conter tangências homoclínicas e a dinâmica complicada que normalmente as acompanha.

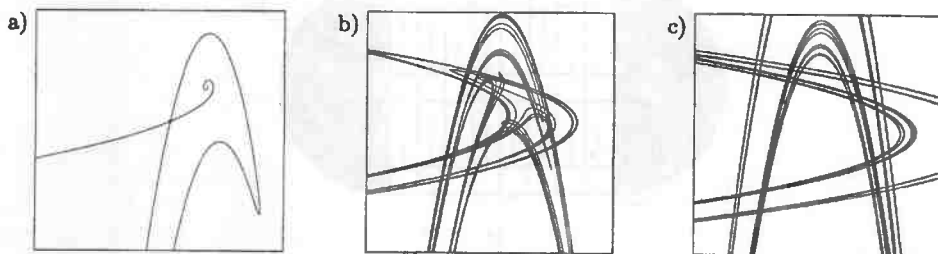


FIGURE 2. Variedades estáveis e instáveis na família de Hénon.

Note que a fórmula que define a família de Hénon também pode ser considerada em  $\mathbb{C}^2$ . Este é o ponto de vista adotado por vários autores, o que levou à descoberta de estruturas ricas na família de Hénon complexa.

**2.3. A ordem unimodal.** A ordem unimodal é uma ordem linear no conjunto  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  definida da seguinte forma. Uma palavra finita  $w \in \{0, 1\}^n$  é *par* (*ímpar*) se a soma de seus símbolos é par (ímpar). Sejam  $s = s_0 s_1 s_2 \dots, t = t_0 t_1 t_2 \dots \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  e assumamos que  $s_i = t_i$  para  $0 \leq i < n$  e  $s_n \neq t_n$ . Então  $s < t$  se e somente se  $s_0 \dots s_n$  é par (e, portanto,  $t_0 \dots t_n$  é ímpar).

Para o modelo da ferradura apresentado acima, não é difícil ver que a ordem unimodal reflete a posição relativa de pontos do conjunto invariante  $\Lambda$  do seguinte modo: se  $x, y \in \Lambda$  e  $h(x) = \dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 \dots, h(y) = \dots t_{-2} t_{-1} t_0 t_1 \dots$ , então  $x$  está à esquerda de  $y$  se e só se  $s_0 s_1 \dots < t_0 t_1 \dots$  e  $x$  está abaixo de  $y$  se e só se  $s_{-1} s_{-2} \dots < t_{-1} t_{-2} \dots$ . Assim, uma palavra  $c_P \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é o código de uma órbita periódica de período  $n$  da ferradura se e somente se a sequência semi-infinita  $c_P^{\infty}$  é extritamente maior, na ordem unimodal, do que as sequências  $\sigma^i(c_P^{\infty})$  para todo  $1 \leq i < n$  (onde  $\sigma$  é a transformação de shift).

**2.4. Isotopias, tipos de trança e implicação entre tranças.** Uma isotopia é uma transformação continua  $\psi: X \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que, para cada  $t \in [0, 1]$  fixo, a transformação  $\psi_t: X \rightarrow X$  é um homeomorfismo. Uma isotopia é *relativa* a um conjunto  $A$  se  $\psi(t, x) = \psi(0, x)$ , para todo  $t \in [0, 1], x \in A$ . Seja  $F: S \rightarrow S$  um homeomorfismo e  $A$  um conjunto  $F$ -invariante, isto é,  $A = F(A) = F^{-1}(A)$ . O tipo de trança  $tt(F, A)$  é a classe de isotopia de  $F$  relativa a  $A$  a menos de mudanças de coordenadas topológicas. Assim, se  $F$  e  $G$  são homeomorfismos da mesma superfície,  $A$  é  $F$ -invariante e  $B$  é  $G$ -invariante, então  $tt(F, A) = tt(G, B)$  se e somente se existe um homeomorfismo  $h$  tal que  $h(A) = B$  e  $h^{-1} \circ G \circ h$  é isotópico a  $F$  relativo a  $A$ .

Aqui consideraremos somente tipos de trança de homeomorfismos que preservam orientação do disco ou do plano. O nome 'tipo de trança' vem daí: o grupo de classes de isotopia de homeomorfismos que preservam orientação do disco com  $n$ -furos é isomorfo ao grupo de tranças de Artin  $B_n$  módulo o seu centro.

Se  $F$  é um homeomorfismo de superfície, denota-se  $tt(F) = \{tt(F, P); P \text{ é uma órbita periódica de } F\}$ . Quando o homeomorfismo  $F$  for claro pelo contexto, o que será o caso quando estivermos falando de tipos de trança da ferradura, usaremos a notação  $tt(A)$  para  $tt(F, A)$ .

Diz-se que um tipo de trança  $\alpha$  *força* ou *implica* um tipo de trança  $\beta$ , denotado por  $\alpha \geq \beta$ , se e somente se, para todo homeomorfismo  $F$  tal que  $\alpha \in tt(F)$ , segue-se que  $\beta \in tt(F)$ .

Boyland [Boy94] mostrou que, se restringirmos atenção a tipos de trança de órbitas periódicas, então implicação é uma ordem parcial. Entender como esta ordem parcial organiza o conjunto de tipos de trança é um dos problemas centrais desta área de pesquisa. As técnicas principais que permitem estudar este problema são aquelas introduzidas por Thurston em sua classificação de classes de isotopia de homeomorfismos de superfícies, que são descritas a seguir.

**2.5. O teorema de Thurston.** O teorema de Thurston classifica as classes de isotopia de homeomorfismos de superfícies de tipo topológico finito, isto é, superfícies compactas com um número finito de furos e com bordo com um número finito de componentes. Um homeomorfismo de superfície  $\Phi$  é de *ordem finita* se existe  $n > 0$  tal que  $\Phi^n$  é a identidade. Um homeomorfismo  $\Phi$  é *redutível* se existe um conjunto  $C$  de curvas fechadas simples *essenciais* (isto é, disjuntas, não-homotópicas entre si, não-triviais em homotopia e não-homotópicas a um furo ou a uma componente do bordo) que é  $\Phi$ -invariante (enquanto conjunto). O homeomorfismo  $\Phi$  é *pseudo-Anosov* se existe um número real  $\lambda$  e um par de folheações transversas com singularidades (dos tipos que mostra a Figura 3) e com medidas transversais (equivalentes à medida de Lebesgue em segmentos transversais)  $(\mathcal{F}^u, \mu^u), (\mathcal{F}^s, \mu^s)$ , tais que:

$$\Phi(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \mu^u)$$

$$\Phi(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda} \mu^s)$$

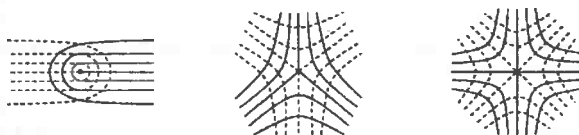


FIGURE 3. Singularidades das folheações invariantes de uma transformações pseudo-Anosov.

O exemplo mais simples de uma transformações satisfazendo a definição acima é um Anosov do toro, como aquele induzido pela matriz  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Teorema 1 (Teorema de classificação de Thurston).** *Todo homeomorfismo de uma superfície de tipo topológico finito é isotópico a uma transformação de ordem finita ou redutível ou pseudo-Anosov.*

As classes de isotopia se dão então os mesmos nomes: uma classe de isotopia é de tipo finito se contém um representante de tipo finito e assim por diante. Se a classe de isotopia é redutível, corta-se a superfície ao longo do conjunto de curvas invariante e aplica-se o teorema às transformações de primeiro retorno a cada componente. Após repetir este processo um número finito de vezes, chega-se a transformações que são de ordem finita ou pseudo-Anosov. Colando-se os pedaços, obtém-se então um representante na classe de isotopia em consideração.

*Observação 2.* Outra maneira de falar de classes de isotopia em uma superfície com furos  $\{p_1, \dots, p_k\}$  é considerar os furos como pontos da superfície e só permitir isotopias não os movam, isto é, isotopias relativas a  $\{p_1, \dots, p_k\}$ . Este é o ponto de vista adotado aqui, onde iremos considerar classes de isotopia da ferradura relativas a órbitas periódicas e órbitas homoclínicas. Como a classificação de Thurston é invariante por conjugações, pode-se, portanto, utilizar o teorema acima para classificar tipos de trança do disco em ordem finita, redutível e pseudo-Anosov.

Em [Hal94b], Hall mostrou que transformações pseudo-Anosov realizam implicação entre tranças no seguinte sentido: se  $\alpha$  é um tipo de trança pseudo-Anosov e  $\Phi_\alpha$  é uma transformação pseudo-Anosov na classe de  $\alpha$ , então  $\{\beta; \beta \leq \alpha\} = \text{tt}(\Phi_\alpha)$ . Transformações pseudo-Anosov, na realidade, minimizam a 'quantidade' de dinâmica em suas classes de isotopia em vários outros sentidos. Por exemplo, elas minimizam a entropia topológica e são também *justas*, como será visto na Seção 4.

O resultado de Hall, associado com uma demonstração algorítmica do teorema de Thurston [BH95, Los93, FM93, dCH01], permite, em princípio, decidir, dados dois tipos de trança, se um força o outro. Na prática, no entanto, isto leva muito tempo, já que a comparação envolve a solução do problema de conjugação no grupo de tranças. Além disso, sermos capazes de decidir se e como implicação relaciona dois tipos de trança não fornece quase nenhuma informação global sobre como implicação organiza o conjunto de todos os tipos de trança. Esta discussão será aprofundada na Seção 6.

### 3. PODA

Nesta seção são definidos discos de poda e frentes de poda e é enunciado o teorema de poda que permite destruir de maneira controlada, por uma isotopia, parte da dinâmica de um homeomorfismo de superfície. O conceito de poda foi introduzido por Cvitanović [Cvi91] como um análogo bidimensional da teoria de kneading de Milnor e Thurston para endomorfismos do intervalo. Poda tenta explicar transformações de Hénon ou de Lozi como ferraduras das quais se destruiu — *podou* — parte da dinâmica.

A idéia de poda é a seguinte. Do ponto de vista de entropia topológica, por exemplo, segue-se de resultados de Katok [Kat80] que a dinâmica de um difeomorfismo de superfície está no fecho das intersecções entre variedades estáveis e instáveis de selas não-errantes. Se se deseja entender a dinâmica de uma família como a de Hénon, que passa de dinâmica trivial a caótica quando se variam os parâmetros, precisa-se portanto entender como estas intersecções se criam (ou se destróem) quando os parâmetros variam. Poda parte de uma transformação conhecida, e.g. a ferradura de Smale, e produz isotopias que destróem intersecções entre variedades invariantes. A família de todas as podas possíveis da ferradura forma então uma família de modelos topológicos com os quais as transformações de Hénon ou Lozi podem ser comparadas. A *Conjectura da Frente de Poda* (CFP) diz que, a menos de semi-conjugação, as famílias de Hénon e Lozi estão contidas na família de podas da ferradura.

**Definição 1** (Discos de poda). Seja  $F: S^2 \rightarrow S^2$  um homeomorfismo de uma superfície. Um disco de poda para  $F$  é um disco topológico  $D$ , cujo bordo pode ser representado como uma união de dois arcos que só se intersectam nos extremos,  $\partial D = C \cup E$ , satisfazendo as seguintes condições de poda:

i)

$$\begin{aligned} \text{diam}(F^n(C)) &\rightarrow 0 && \text{quando } n \rightarrow \infty \\ \text{diam}(F^{-n}(E)) &\rightarrow 0 && \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} F^n(C) \cap \text{Int}(D) &= \emptyset && \text{para todo } n > 0 \\ F^{-n}(E) \cap \text{Int}(D) &= \emptyset && \text{para todo } n > 0. \end{aligned}$$

Os arcos  $C, E$  são chamados, respectivamente, *lados*  $C$  e  $E$  do disco de poda  $D$ .

*Observações* 3. a) Esta definição se aplica se  $F$  é um difeomorfismo, enquanto que a definição para homeomorfismos em geral é mais técnica. Veja [dC99] para maiores detalhes.

b) O disco  $D$  é um disco de poda para  $F$  se e somente se também o são todas as suas iteradas  $F^n(D), n \in \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 1.** A Figura 4 mostra dois discos de poda para a ferradura. Em a), o bordo do disco de poda consiste de segmentos das variedades estável e instável do ponto fixo de código 0 (indicado por  $\bullet$  na Figura 1), enquanto que em b) a outra sela fixa, de código 1 (indicado por  $\circ$  na mesma figura) é utilizada. Em ambos os casos a condição de poda i) é satisfeita trivialmente. A condição ii)

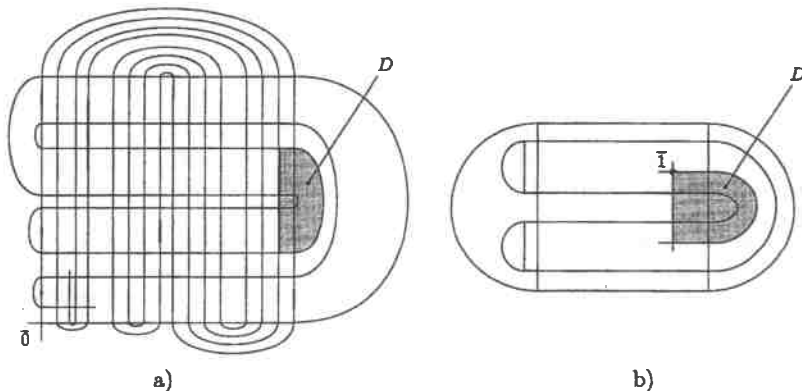


FIGURE 4. Discos de poda para a ferradura.

se verifica em a) pois as iteradas positivas de  $C$ , indicadas na Figura 4 por segmentos verticais em negrito, são disjuntas de  $D$ ; um argumento similar se aplica às iteradas negativas de  $E$ . Em b), as iteradas positivas pares de  $C$  estão contidas em  $C$ , enquanto que as ímpares estão contidas em  $F_0(C)$  que é disjunto de  $\text{Int}(D)$ ; algo análogo acontece com as iteradas negativas de  $E$ .

É possível agora enunciar o teorema de poda, demonstrado originalmente em [dC99]:

**Teorema 2 (Teorema de poda).** *Seja  $F: S \rightarrow S$  um homeomorfismo uniformemente contínuo que preserva orientação da superfície orientada  $S$  e seja  $D$  um disco de poda para  $F$ . Então existe uma isotopia, suportada em  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F^n(\text{Int}(D))$ , começando em  $F$  e terminando em um homeomorfismo  $F_D$  tal que o conjunto não-errante de  $F_D$  é disjunto de  $U$ .*

Porque a isotopia tem suporte em  $U$ ,  $F$  e  $F_D$  têm a mesma dinâmica em  $S \setminus U$ . Por outro lado, toda a dinâmica de  $F$  em  $U$  é destruída ao fim da isotopia.

É possível generalizar este teorema para uniões finitas de discos de poda satisfazendo algumas condições adicionais [dC99]. Estas uniões são chamadas *frentes de poda* e as transformações obtidas ao fim da isotopia são chamadas *podas de  $F$*  ou, mais geralmente, *transformações podadas* ou *modelos podados*.

**Observação 4.** Como foi observado acima, imagens e preimagens de discos de poda são também discos de poda. O teorema de poda aplicado a qualquer iterada do disco  $D$  produz o mesmo resultado. Isto será utilizado a seguir para retringir atenção a discos de poda da ferradura que se estendem até o lado direito do quadrado e são simétricos com relação à sua linha central horizontal.

**Definição 2** (Família de poda). Seja  $F: S \rightarrow S$  um homeomorfismo de superfície e seja  $\mathcal{D}$  o conjunto de sequência finitas  $(D_1, \dots, D_n)$  de discos tais que  $D_1$  é um disco de poda para  $F$  e  $D_{j+1}$  é um disco de poda para  $F_{D_1, \dots, D_j}$ , para cada  $1 \leq j \leq n-1$ . A família de poda associada a  $F$  é

$$\mathcal{P}(F) = \overline{\{F_{D_1, \dots, D_n}; (D_1, \dots, D_n) \in \mathcal{D}\}}$$

onde o fecho é tomado na topologia uniforme.

Apresentamos agora um enunciado preliminar da CFP. Abaixo, após ser definida a relação de equivalência de entropia nula, possibilitando assim explicitar a semi-conjugação mencionada, um enunciado mais preciso será dado.

**Conjectura da Frente de Poda (Imprecisa).** *Seja  $F_0$  a ferradura de Smale e  $\{H_{a,b}\}$  a família de Hénon. Para cada escolha dos parâmetros  $a, b$  existe uma transformação  $F_{a,b} \in \mathcal{P}(F_0)$  tal que, a menos de semi-conjugação,  $H_{a,b}$  e  $F_{a,b}$  são topologicamente conjugados. Em outras palavras, a família de poda contém a família de Hénon, a menos de semi-conjugação.*

Note que este é um enunciado possível, entre outros. Um enunciado mais forte, provavelmente falso em geral, é obtido omitindo menção à semi-conjugação. Esta versão forte, no entanto, pode ser verdadeira — e, de fato, o é, como será mencionado a seguir — em vários casos especiais.

É natural perguntar que tipo de evidência há para a validade da conjectura. Outra questão relacionada é quão grande é a família de poda: qual a sua cardinalidade? que tipo de sub-famílias ‘interessantes’ ela contém?

Para pequenos valores do parâmetro  $b$ , a família de Hénon é uma perturbação da família unimodal  $f_a(x) = a - x^2$ . Para valores de  $a$  para os quais  $f_a$  é hiperbólica e para  $b$  pequeno o suficiente, não é difícil dar uma demonstração da conjectura acima, sem sequer ser necessário considerar semi-conjugações.

Há também considerável evidência computacional para a CFP. Em [CGP88], Cvitanović, Guckenheimer e Procaccia usaram modelos de poda e foram capazes de calcular com grande precisão quantidades como o número de órbitas periódicas de baixo período ( $< 16$ ) e a entropia topológica de transformações nas famílias de Hénon e Lozi. Em trabalho não publicado, James Dillon usou um programa que desenha variedades invariantes para transformações de Hénon para calcular frentes de poda correspondentes a vários valores dos parâmetros, todos eles aparentemente apresentando tangências homoclínicas e, portanto, não-hiperbólicos. Ele foi capaz de prever com precisão quase completa o número de órbitas periódicas de período  $\leq 8$  destas transformações. Em [dCH02b], há um modelo de poda para a transformação de Hénon com  $a = 5.4, b = 1$ . Em [DMS91], foi sugerido que esta transformação é hiperbólica e uma partição de Markov para o seu conjunto não-errante foi encontrada. Embora esta partição e a partição obtida para o modelo podado sejam diferentes, os subshifts de tipo finito associados são equivalentes. Note que, para  $b = 1$ , as transformações de Hénon preservam área e não recaem nos casos hiperbólicos perturbativos mencionados acima.

Em trabalho conjunto com M. Lyubich e M. Martens em preparação, damos uma demonstração da versão forte da CFP — isto é, sem tomar semi-conjugações — para transformações de Hénon que são infinitamente renormalizáveis. Embora estas transformações formem um conjunto unidimensional no espaço de parâmetros, esta é a primeira demonstração da CFP para transformações não-hiperbólicas.

As questões sobre o tamanho e as subfamílias interessantes da família de poda serão tratadas na Seção 5, após a introdução da relação de equivalência de entropia nula na próxima seção. Esta última nos permitirá, entre outras coisas, dar um enunciado preciso da CFP.

## 4. A EQUIVALÊNCIA DE ENTROPIA NULA

A relação de equivalência de entropia nula foi introduzida em [dC02] e explorada em [dCP04]. O seu objetivo é colapsar a parte da dinâmica que é irrelevante do ponto de vista da entropia topológica, sem descaracterizar demais o sistema dinâmico. Aplicada a transformações de superfícies, esta equivalência produz uma classe interessante de homeomorfismos em dimensão 2 onde é natural comparar os modelos podados com os sistemas dinâmicos que estamos tentando modelar. Como veremos, estes modelos fazem um papel análogo ao dos modelos lineares por partes com inclinação constante da teoria de endomorfismos do intervalo.

Começamos com a definição de Bowen de entropia topológica [Bow71]. Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $F: X \rightarrow X$  um homeomorfismo. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , define-se a métrica

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i < n} d(F^i(x), F^i(y))$$

e, dado  $\epsilon > 0$ , diz-se que o conjunto  $E$  é  $(n, \epsilon)$ -separado se  $E$  é  $\epsilon$ -discreto na métrica  $d_n$ , isto é, para todo par de pontos distintos  $x, y \in E$ ,  $d_n(x, y) > \epsilon$ . Dado um compacto  $K \subset X$  (não necessariamente  $F$ -invariante), seja  $s(n, \epsilon, K)$  a cardinalidade máxima de um subconjunto  $(n, \epsilon)$ -separado de  $K$ , e

$$h(F, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln s(n, \epsilon, K).$$

Se  $K$  é  $F$ -invariante, então  $h(F, K) = h(F^{-1}, K)$ , embora estes números sejam diferentes em geral. Definimos a *entropia (topológica) de  $F$  em  $K$*  como  $h_{\pm}(K) = \max\{h(F, K), h(F^{-1}, K)\}$ .

Um conjunto é *não-degenerado* se não se reduz a um ponto. Um *contínuo* é um subconjunto conexo e compacto de um espaço métrico.

**Definição 3** (Relação de equivalência de entropia nula). Seja  $F: X \rightarrow X$  um homeomorfismo de um espaço métrico. Dois pontos  $x, y \in X$  são *entropia-0 equivalentes* se existe um contínuo  $C \ni x, y$  tal que  $h_{\pm}(C) = 0$ .

Não é difícil ver que isto de fato define uma relação de equivalência, equivalência esta que parece ser mais interessante em dimensões 1 e 2. A Figura 5 mostra o quociente da ferradura de Smale pela relação de entropia nula. O espaço quociente é uma esfera, que é obtida identificando pontos unidos pelas linhas pontilhadas na figura. As variedades invariantes do conjunto hiperbólico tipo sela da ferradura se projetam a duas folheações com singularidades da esfera. A transformação quociente preserva ambas as folheações, contraindo a folheação estável (indicada por linhas interrompidas) e expandindo a folheação instável (indicada por linhas contínuas), de forma similar ao que faz a ferradura. Esta transformação é um exemplo de uma *transformação pseudo-Anosov generalizada*, como será descrito na Seção 7.

Podemos agora apresentar uma versão precisa da CFP:

**Conjectura da Frente de Poda (Precisa).** Seja  $F_0$  a ferradura de Smale e  $\{H_{a,b}\}$  a família de Hénon. Para cada escolha dos parâmetros  $a, b$  existe uma transformação  $F_{a,b} \in \mathcal{P}(F_0)$  tal que os quocientes  $H_{a,b}/\sim$  e  $F_{a,b}/\sim$  pela equivalência de entropia nula são topologicamente conjugados. Em palavras, a menos da relação de equivalência de entropia nula, a família de poda contém a família de Hénon.

Antes de voltarmos a discutir as questões relacionadas com evidência para a CFP, continuamos um pouco explorando as consequências da definição acima, enunciando o resultado principal de [dCP04].

**Definição 4** (Homeomorfismo justo). Um homeomorfismo  $F: X \rightarrow X$  é *justo* se  $h_{\pm}(C) > 0$  para todo contínuo não-degenerado  $C \subset X$ .

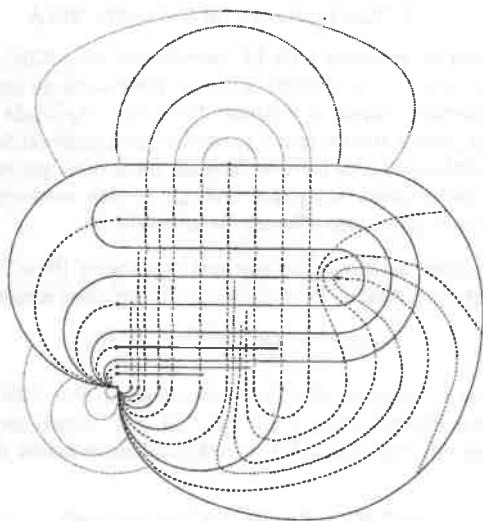


FIGURE 5. O quociente da ferradura pela relação de equivalência de entropia nula. A esfera quociente é obtida indentificando-se os extremos dos arcos pontilhados na figura.

Exemplos de homeomorfismos justos são: o Anosov do toro, as transformações pseudo-Anosov introduzidas por Thurston e as transformações pseudo-Anosov generalizadas que serão discutidas abaixo. Segue-se do próximo teorema [dCP04] que transformações justas são relativamente abundantes.

**Teorema 3** (Quociente justo de um difeomorfismo). *O quociente pela equivalência de entropia nula de um difeomorfismo  $C^{1+\alpha}$  de uma superfície fechada é um homeomorfismo justo de um cactóide generalizado. Além disso, as fibras da projeção têm entropia igual a zero.*

Sem entrar em detalhes técnicos, um *cactóide generalizado* é uma superfície com singularidades como mostra a Figura 6, cujas componentes são superfícies fechadas e, com um número finito de excessões, todas são esferas.

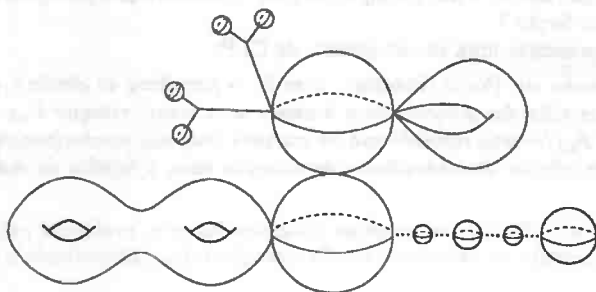


FIGURE 6. Um cactóide generalizado.

A demonstração deste teorema usa resultados técnicos sobre a dinâmica no espaço de contínuos, parecidos com alguns resultados de teoria ergódica para transformações suaves. O espaço de contínuos pode ser pensado como uma versão fraca do fibrado tangente e a entropia de um contínuo como uma versão fraca do expoente de Lyapunov. A parte topológica da demonstração usa um teorema de Moore [Moo62] sobre decomposições semi-contínuas superiores da esfera, e sua generalização por Roberts e Steenrod [RS38] para superfícies.

## 5. QUÃO GRANDE É A FAMÍLIA DE PODA?

Nesta seção poda é relacionada com uma teoria de kneading generalizada para endomorfismos de árvores: os homeomorfismos (em dimensão 2) em questão se projetam a endomorfismos de árvores e poda se projeta à eliminação de segmentos cuja imagem é ‘dobrada’ pelo endomorfismo. A descrição que se segue é bastante resumida; descrições detalhadas podem ser encontradas em [dCH02b, dCH01].

A relação entre poda e endomorfismos de árvores é importante por várias razões. No nível mais geral, ela mostra de maneira específica como relacionar teorias em dimensões 1 e 2 que explicam como dinâmica é criada em famílias que passam de dinâmica trivial a caótica. Ela é também instrumental na demonstração algorítmica do teorema de Thurston de classificação de homeomorfismos de superfícies usando poda. Finalmente, é também esta relação que motivou a conjectura que será discutida na Seção 6 que organiza as órbitas periódicas da ferradura pela relação de implicação entre tipos de trança.

**5.1. Poda e a família unimodal.** Começamos descrevendo os discos de poda mais simples da ferradura e relacionando as transformações podadas com endomorfismos unimodais do intervalo. Como foi observado na Seção 2.1, a ferradura se projeta ao endomorfismo unimodal  $f_0: I \rightarrow I$ . Há uma família de discos de poda especiais cujas transformações podadas associadas têm como quociente uma família unimodal completa (full), isto é, que tem todos os invariantes de kneading possíveis. Estes discos são aqueles que vão de cima a baixo da ferradura como mostra a Figura 7, os quais chamamos discos de poda verticais. Para tais discos a condição de poda i) é satisfeita trivialmente. A condição ii), no entanto, não se verifica para qualquer disco que vá de cima a baixo na ferradura: não é difícil mostrar que esta condição se verifica exatamente quando o ponto  $v$  ao qual se projeta o lado  $C$  do disco satisfaz  $f_0^n(v) \leq v$  para todo  $n \geq 0$ . Na linguagem da teoria de transformações unimodais, isto é equivalente a dizer que a representação simbólica de  $v$  (em  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ) é um invariante de kneading, isto é, é maximal, na ordem unimodal, entre todos os seus shifts. Deste fato se segue a resposta a uma das questões do final da Seção 3: como há um uma quantidade não-enumerável de endomorfismos unimodais dinamicamente distintos, segue-se que a família de poda contém uma quantidade não-enumerável de homeomorfismos dinamicamente distintos. Veremos a seguir que, na verdade, a família de poda contém um número infinito de famílias análogas à que acabamos de descrever.

**5.2. Interlúdio notacional.** Diagramas envolvendo variedades invariantes e discos de poda como, por exemplo, os da Figura 4, se tornam rapidamente incompreensíveis. Para simplificar tais diagramas, o conjunto invariante  $\Lambda$  da ferradura será representado como um quadrado: um conjunto de Cantor com uma estrutura produto no qual os gaps complementares foram colapsados. Isto gera uma ambigüidade na representação de pontos das variedades invariantes do ponto fixo de código 0 (que é o vértice inferior esquerdo do quadrado), ambigüidade esta que não será relevante no que se segue. Nesta representação, os discos de poda da ferradura são retângulos que se estendem até o lado direito do quadrado, simétricos com relação a linha horizontal passando pelo seu centro. Por exemplo, os discos de poda da Figura 4 são representados como na Figura 8.

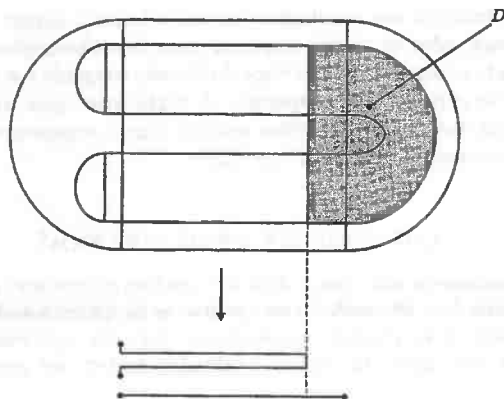


FIGURE 7. Disco de poda vertical.

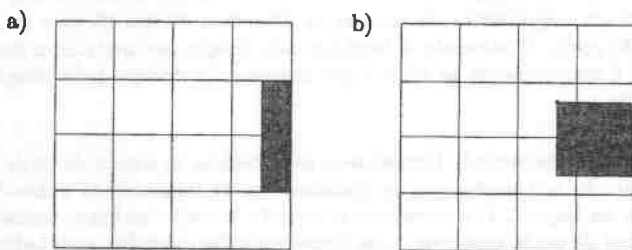


FIGURE 8. Representação esquemática dos discos de poda da Figura 4.

**5.3. Poda e famílias unimodais em árvores.** Após a discussão dos discos de poda verticais, não deve parecer surpreendente que transformações podadas associadas a discos de poda que *não* se estendem de cima a baixo da ferradura, *não* se projetam a endomorfismos unimodais do intervalo. O que acontece nestes casos é que o quociente unidimensional da transformação podada é um endomorfismo de uma (outra) árvore. A explicação de porquê e como isto se dá é demasiado longa para ser apresentada aqui: ela pode ser encontrada em [dCH02b, dCH01]. As Tabelas 1 e 2 mostram exemplos de discos de poda que não são verticais (com excessão do primeiro) e os endomorfismos de árvores correspondentes.

O primeiro disco de poda é o disco vazio: continuamos portanto com a ferradura e o endomorfismo correspondente é a transformação unimodal  $f_0$ . Esta transformação é um dos extremos da família unimodal, que é obtida variando, em direção ao extremo esquerdo do intervalo, a posição do valor crítico. Na família de poda, isto corresponde a podar discos verticais cujo lado  $C$  varia em direção ao lado esquerdo do quadrado.

Um endomorfismo de uma árvore é chamado *unimodal* se há exatamente um ponto onde o endomorfismo não é um homeomorfismo local. As outras transformações de árvores mostradas nas tabelas são unimodais e são também extremos de famílias unimodais nestas árvores. As famílias associadas são obtidas variando a posição dos valores críticos ao longo das árvores, em direção aos seus extremos esquerdos. Aqui também, na linguagem de poda, isto corresponde a podar (a transformação obtida após a primeira poda, correspondente aos discos da tabela) discos verticais com lado  $C$  variando em direção ao lado direito do quadrado. A Figura 9 mostra, para a segunda

| $w$         | $q_w$ | Frente de poda | Árvore | Imagem |
|-------------|-------|----------------|--------|--------|
| *           | $1/2$ |                |        |        |
| $\emptyset$ | $1/3$ |                |        |        |
| 0           | $1/4$ |                |        |        |
| 1           | $1/2$ |                |        |        |
| 00          | $1/5$ |                |        |        |
| 11          | $2/5$ |                |        |        |

TABLE 1. Frentes de poda e endomorfismos de árvores correspondentes.

linha da Tabela 1, a correspondência entre a transformação podada e o endomorfismo unimodal do  $T$ , isto é, a árvore com exatamente um vértice de valência três e três vértices de valência um.

Outros aspectos das tabelas serão discutidos nas próximas seções.

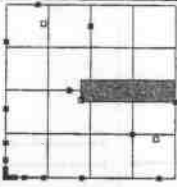
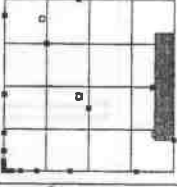
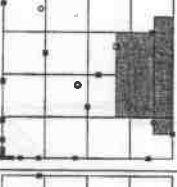
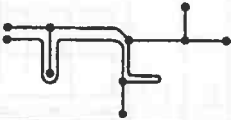
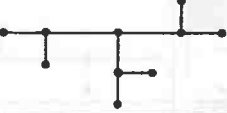
| $w$ | $q_w$ | Frente de poda                                                                      | Árvore                                                                              | Imagem                                                                              |
|-----|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 01  | 1/3   |    |    |    |
| 10  | 1/3   |    |    |    |
| 110 | 1/3   |    |    |    |
| 010 | 1/3   |    |    |    |
| 011 | 1/3   |  |  |  |

TABLE 2. Frentes de poda com endomorfismos de árvores equivalentes.

**5.4. Poda e o teorema de Thurston.** A referência [dCH01] contém uma demonstração do teorema de Thurston usando poda. Esta demonstração consiste em utilizar a relação entre poda e endomorfismos de árvores para traduzir e adaptar à linguagem de poda a demonstração algorítmica do teorema dada por Bestvina e Handel [BH95]. Enunciamos abaixo um teorema que se segue dos resultados de [dCH01] e que se adapta melhor ao presente contexto.

Suponha que aplicamos o teorema de Thurston a uma classe de isotopia, tendo chegado a uma transformação com um conjunto de curvas invariante, algumas componentes de ordem finita e outras pseudo-Anosov. Do ponto de vista dinâmico, transformações de ordem finita são triviais, já que todos os pontos são periódicos com o mesmo período. Colapsando a pontos o conjunto de curvas invariante e as componentes de ordem finita, chega-se a um homeomorfismo de um cactóide que pode ser visto como o ‘representante’ dinamicamente relevante na classe de isotopia, embora não seja

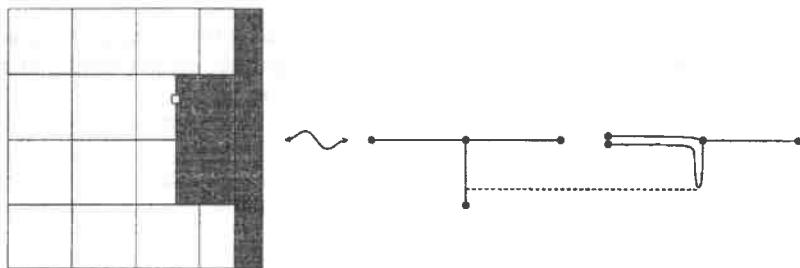


FIGURE 9. Uma transformação unimodal do T e os discos de poda correspondentes.

realmente um representante na classe, já que o espaço mudou. Chamaremos estes homeomorfismos de *representantes canônicos*. Se  $F: S \rightarrow S$  é um homeomorfismo de uma superfície, denotamos por  $T(F)$  a família de todos os representantes canônicos de  $F$  relativos a conjuntos  $F$ -invariantes finitos.

**Teorema 4** (A família de poda contém os representantes de Thurston). *Se  $F_0$  denota a ferradura de Smale, então  $T(F_0) \subset \mathcal{P}(F_0)/\sim$ , onde  $\mathcal{P}(F_0)/\sim$  denota a família de quocientes de transformações da família de poda pela relação de equivalência de entropia nula. Em palavras, a família de representantes canônicos associada a ferradura está contida na família de poda, a menos da equivalência de entropia nula.*

Como foi mencionado, o representante canônico de Thurston minimiza a quantidade de dinâmica em sua classe de isotopia. Se deseja-se provar o teorema algorítmicamente usando poda, esta propriedade do representante canônico indica o que fazer: como poda somente destrói dinâmica por isotopias, deve-se achar e podar discos de poda repetidas vezes, até que não haja mais tais discos. Em outras palavras, trata-se de encontrar uma poda maximal do homeomorfismo inicial. Com sorte, teremos então chegado, a menos de entropia nula, ao representante canônico. É esta a idéia do algoritmo contido em [dCH01]; para demonstrar que o algoritmo é fato finito é necessário usar a correspondência entre poda e endomorfismos de árvores.

Os diagramas de poda das tabelas também contém dois tipos de órbitas: uma órbita homoclínica (na realidade, mais que uma, dada a ambigüidade da representação de órbitas homoclínicas ao ponto de código 0), indicada por  $\blacksquare$  e uma ou duas órbitas periódicas, indicadas por  $\circ$  e  $\square$ . As órbitas periódicas correspondem aos vértices periódicos de valência  $\geq 3$  nos endomorfismos de árvores correspondentes. As órbitas homoclínicas são órbitas relativas às quais as podas nos diagramas são maximais, isto é, para cada diagrama, após podar da ferradura o disco indicado, não é possível podar nada mais a não ser que se pode também a órbita homoclínica. Os pontos  $\blacksquare$  no interior dos quadrados representam quatro órbitas homoclínicas ao vértice inferior esquerdo do quadrado, o ponto fixo de código 0. O cerne destas órbitas é do tipo  $1_1^0 w_1^0 1$ , onde  $w$  é uma palavra finita. No primeiro diagrama, que só possui pontos ao longo do bordo do quadrado, as órbitas representadas são duas, com cernes  $1_1^1 1$ . Esta ambigüidade pictórica tem, na realidade, um sentido dinâmico: em [dCH02a], é demonstrado que as quatro (ou duas, no segundo caso) órbitas têm o mesmo tipo de trança. Esta discussão deixa de lado as órbitas homoclínicas da ferradura de cernes com dois ou menos símbolos. Estas são exatamente as órbitas de tipo de trança de *translação*, que não implicam nenhuma outra órbita homoclínica ou periódica. A palavra  $w$  é chamada a *decoração* da órbita homoclínica, enquanto que a decoração da órbita de cerne  $1_1^1$  é definida como  $*$ . A primeira coluna das tabelas contém as decorações das órbitas homoclínicas mostradas nos diagramas de poda na mesma linha. Refletindo o fato de que as órbitas com a mesma decoração têm o mesmo tipo de trança, os seus cernes serão escritos  $1_1^0 w_1^0 1$ .

A Tabela 2 contém exemplos de podas distintas com quocientes equivalentes. As duas primeiras e as três últimas linhas da tabela mostram discos de poda que são evidentemente diferentes, enquanto que os endomorfismos quocientes são os mesmos. A razão é que as órbitas homoclínicas correspondentes têm o mesmo tipo de trança. Enquanto que a equivalência de órbitas com a mesma decoração é bastante simples e intuitiva, as equivalências da Tabela 2, isto é, equivalências entre órbitas homoclínicas com decorações diferentes, são bastante mais complicadas de se entender. Esta dificuldade é uma das razões principais pelas quais a conjectura que será discutida na Seção 6 não é um teorema.

**5.5. Conclusões.** Vimos que há razoável evidência computacional para a CFP e que, no caso infinitamente renormalizável, é possível demonstrá-la rigorosamente. Vimos ainda que a família de poda é grande o bastante para conter um número infinito de famílias distintas análogas à família unimodal do intervalo, e também para conter a família de todos os representantes canônicos de Thurston que é razoável esperar, isto é, aqueles em classes de isotopia da ferradura relativas a conjuntos invariantes finitos. A família de poda depende de um número infinito de parâmetros: podemos podar um número finito, mas arbitrário, de discos de poda e os lados  $C$  e  $E$  destes discos formam um conjunto de parâmetros, que, embora não seja independente, é ainda assim infinito. Se a CFP é verdadeira, a família de Hénon forma um subconjunto bidimensional da família de poda.

## 6. IMPLICAÇÃO ENTRE TIPOS DE TRANÇA DA FERRADURA

Nesta seção é descrita uma conjectura, introduzida originalmente em [dCH02a], sobre como implicação entre tranças organiza os tipos de trança de órbitas periódicas da ferradura. Para que seja possível descrever a conjectura, é necessário introduzir alguns conceitos.

O tipo de trança  $tt(P, F_0)$  de uma órbita periódica da ferradura será denotado simplesmente por  $tt(P)$  nesta seção. É um fato bem conhecido que duas órbitas periódicas da ferradura cujos códigos difiram apenas no último símbolo têm o mesmo tipo de trança. Assim, por exemplo, as duas órbitas com códigos 10010 e 10011 têm o mesmo tipo de trança (intuitivamente, isto se segue de que duas tais órbitas são criadas numa bifurcação sela-nó) e, refletindo este fato, o código para ambas é escrito 1001 $\frac{1}{2}$ .

A conjectura é baseada na divisão do código das órbitas periódicas da ferradura, cujos tipos de trança não são de ordem finita, em duas partes: o *prefixo* e a *decoração*. Para explicar como isto é feito, é necessário introduzir certas palavras  $c_q \in \{0, 1\}^{n+1}$ , uma para cada racional  $q = m/n \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$ , e então usá-las para definir a *altura*  $q(P) \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$  da órbita periódica  $P$ . A altura é um invariante de tipos de trança [Hal94a] que faz um papel central na conjectura.

Dado  $q = m/n \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$ , define-se a palavra  $c_q \in \{0, 1\}^{n+1}$  da seguinte forma. Seja  $L_q$  o segmento de reta em  $\mathbb{R}^2$  que liga os pontos  $(0, 0)$  e  $(n, m)$ . Para cada  $0 \leq i \leq n$ , define-se  $s_i = 1$  se  $L_q$  cruza uma linha horizontal  $y = \text{inteiro}$  no intervalo  $(i - 1, i + 1)$ ; caso contrário  $s_i = 0$ . Então  $c_q = s_0 \dots s_n$ .

Por exemplo,  $c_{3/10} = 1001101001$  como mostra a Figura 10.

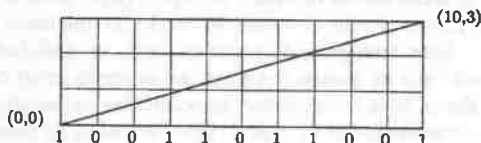


FIGURE 10.  $c_{3/10} = 1001101001$

Outros exemplos são  $c_{1/n} = 10^{n-1}1$  e  $c_{2/2n+1} = 10^{n-1}110^{n-1}1$ . Um algoritmo para calcular as palavras  $c_q$  pode ser encontrado em [Hal94a, dCH02a, dCH04]. São também fatos [Hal94a] que as

palavras  $c_q^0$  são ambas maximais na ordem unimodal (e, portanto, são códigos de órbitas periódicas da ferradura) e que se  $q < r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$  então  $(c_r^0)^\infty \prec (c_q^0)^\infty$ , isto é, a aplicação  $q \mapsto (c_q^0)^\infty$  reverte ordem.

**Definição 5 (Altura).** Seja  $c \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . A *altura*  $q(c) \in [0, \frac{1}{2}]$  de  $c$  é dada por

$$q(c) = \inf\{q \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}]; q = \frac{1}{2} \text{ ou } (c_q^0)^\infty \prec c\}$$

A altura de uma órbita periódica  $P$  da ferradura de código  $c_P$  é  $q(P) = q(c_P^\infty)$ .

Um algoritmo para calcular altura pode ser encontrado em [Hal94a, dCH02a, dCH04] e um programa implementando-o em [Hal].

Os seguintes fatos sobre a altura, cuja demonstração aparece em [Hal94a], são necessários:

- A altura de uma órbita periódica da ferradura é sempre racional e estritamente positiva.
- Seja  $P$  uma órbita periódica da ferradura com altura  $q(P) = m/n$ , onde  $m, n$  não têm fatores comuns. Se  $P$  tem período  $n$  então  $\text{tt}(P)$  é de ordem finita, isto é, a ferradura é isotópica, relativa a  $P$ , a uma rotação de ângulo  $2\pi m/n$ . Caso contrário, o período de  $P$  é no mínimo  $n+2$  e o código  $c_P$  começa com a palavra  $c_{m/n}$ .
- Se  $\text{tt}(P) \geq \text{tt}(R)$ , então  $q(P) \leq q(R)$ . Em particular, altura é um invariante de tipos de trança.

Portanto, exceto pelas órbitas periódicas de ordem finita (que formam um conjunto bem entendido, havendo exatamente um par delas para cada racional  $m/n$ ), o código de toda órbita periódica  $P$  da ferradura pode ser escrito  $c(P) = c_{q(P)}v$ , para uma palavra não-vazia  $v$ .

**Definição 6 (Prefixo e decoração).** Seja  $P$  uma órbita periódica da ferradura de período  $N$  e altura  $q = q(P) = m/n$  e assumamos que  $P$  não é de ordem finita. O *prefixo* de  $P$  é  $c_q$  e a *decoração* de  $P$  é  $\star$  se  $N = n+2$  ou é a palavra  $w \in \{0, 1\}^{N-n-3}$  tal que  $c_P = c_q^0 w_1^0$ .

As quatro órbitas de códigos  $c_q^0 w_1^0$  são agrupadas porque elas têm o mesmo tipo de trança. Como foi mencionado acima, o fato de que duas órbitas periódicas de mesmo período cujos códigos difiram somente no último símbolo têm o mesmo tipo de trança é uma trivialidade. O resultado principal de [dCH03a] consiste em provar que mudar o símbolo *antes* da decoração não muda o tipo de trança.

Por exemplo, a órbita periódica  $P$  de período 17 e código  $c_P = 10011011001011010$  tem altura  $q(P) = 3/10$  (pelo algoritmo contido em [dCH02a]). Então  $P$  tem prefixo  $10011011001$  e decoração  $1101$  e todas as quatro órbitas de códigos  $10011011001^0 1101^0$  têm o mesmo tipo de trança.

Seja  $w \in \{0, 1\}^n$  uma decoração. Nem todas as alturas  $q$  são compatíveis com  $w$  no sentido de que as palavras  $c_q^0 w_1^0$  podem não ser maximais. Está demonstrado em [dCH02a] que, dada  $w$ , existe  $q_w \in (0, 1/2]$  tal que cada  $c_q^0 w_1^0$  é maximal de altura  $q$  se  $0 < q < q_w$  e nenhuma o é se  $q_w < q \leq 1/2$ . Para  $q = q_w$  nenhuma, alguma ou todas as palavras  $c_q^0 w_1^0$  podem ser maximais de altura  $q$ . A segunda coluna nas Tabelas 1 e 2 contém os valores de  $q_w$  para as decorações correspondentes.

Denotemos por  $P_q^w$  as (quatro ou duas, caso  $w = \star$ ) órbitas da ferradura de altura  $q$  e decoração  $w$  e seja

$$\mathcal{D}^w = \{P_q^w; 0 < q \leq q_w\}$$

onde o símbolo  $\leq$  quer dizer que  $q = q_w$  é possível para algumas, mas não todas as decorações  $w$ . Podemos agora enunciar uma primeira conjectura sobre implicação entre tipos de trança da ferradura:

**Conjectura 5 (Famílias linearmente ordenadas).** Para cada decoração  $w$ , a família  $\mathcal{D}^w$  é linearmente ordenada por implicação inversamente à altura, isto é,  $\text{tt}(P_q^w) \geq \text{tt}(P_r^w)$  se e somente se  $q \leq r$ .

Note que, como a altura e a ordem unimodal são ordens reversas no conjunto de sequências simbólicas, esta conjectura trivializa o problema de implicação dentro das famílias  $\mathcal{D}^w$ : a ordem por implicação e a ordem unimodal coincidem dentro de cada família.

É fácil ver que  $c_{q_1^0 w_1^0} \rightarrow 01^1 w_1^0 10$  quando  $q \rightarrow 0$ , isto é, a representação simbólica das órbitas  $P_q^w$  converge àquela das órbitas homoclínicas de cernes  $1^1 w_1^1 1$  quando  $q$  tende a zero. É natural, portanto, denotar estas últimas por  $P_0^w$ . Dizemos que a decoração  $w$  força a decoração  $v$ , denotado por  $w \geq v$ , se  $P_0^w$  força  $P_0^v$ . Enunciamos agora uma conjectura mais geral a Conjectura 5:

**Conjectura 6** (Implicação entre órbitas da ferradura). *Sejam  $P, P'$  órbitas periódicas da ferradura que não são de ordem finita e sejam  $q, q'$  as alturas e  $w, w'$  as decorações de  $P, P'$  respectivamente. Se  $w \geq w'$  e  $q < q'$ , então  $\text{tt}(P) \geq \text{tt}(P')$ . Isto é, se  $P_0^w$  força  $P_0^{w'}$  e  $q < q'$ , então  $P_q^w$  força  $P_{q'}^{w'}$ .*

As conjecturas acima fatoram a ordem parcial de implicação entre tipos de trança da ferradura em uma parte linear dentro de cada família  $\mathcal{D}^w$  e a ordem parcial entre as órbitas homoclínicas  $P_0^w$  no topo de cada família. Embora esta última não seja nada mais simples de calcular, ainda assim a conjectura esclarece a estrutura da ordem parcial, como ilustrado na Figura 11. Cada órbita periódica da ferradura é parametrizada por sua altura e sua decoração. Cada família  $\mathcal{D}^w$  é representada por uma linha vertical: as órbitas em cada família são criadas monotonicamente de baixo para cima durante a criação de uma ferradura. A complexidade da ordem parcial de implicação foi transferida para a implicação entre órbitas homoclínicas, representada (inacuradamente) na figura como o eixo horizontal de decorações (a representação seria fiel se, por exemplo, nos restringíssemos a uma cadeia linearmente ordenada de decorações). Assumimos que  $w \geq w'$  se  $w$  está à esquerda de  $w'$  na figura. Portanto, se a altura  $q$  foi atingida em uma dada família  $\mathcal{D}^w$  durante a formação de uma ferradura, isto implica que chegou-se ao menos à mesma altura em todas as famílias à direita de  $\mathcal{D}^w$ . Assim, uma ferradura parcialmente formada pode ser representada por uma linha com inclinação positiva ao longo do gráfico da figura.

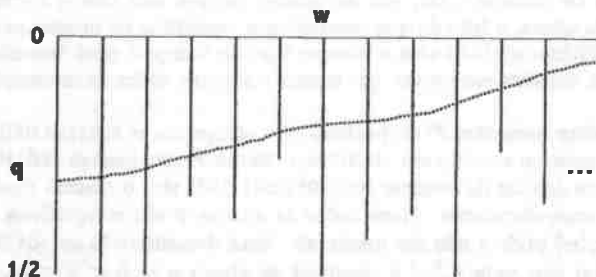


FIGURE 11. Uma ilustração esquemática das conjecturas. A linha pontilhada representa uma ferradura parcialmente formada.

É interessante notar que, do ponto de vista prático, se se demonstra que órbitas periódicas  $P_q^w, P_{q'}^{w'}$  de baixo período têm o mesmo tipo de trança, segue-se que  $P_r^w, P_r^{w'}$ , para todo  $0 < r \leq q_w = q_{w'}$ .

Evidências para as Conjecturas 5 e 6 são abundantes. O caso mais simples da Conjectura 5, onde  $w = *$ , foi demonstrado por Hall em [Hal94a]. O artigo [dCH04] contém uma demonstração para a família (infinita) de decorações cujas árvores quocientes associadas são estrelas. Neste caso, faz sentido considerar implicações entre famílias, o que também é tratado no artigo. Com excessão da quarta linha, todas as decorações da Tabela 1 pertencem à esta família. É provável que as técnicas

utilizadas em [dCH04] se adaptem a muitas outras famílias de decorações. Isto, no entanto, além de ser extremamente trabalhoso, não nos parece uma maneira muito proveitosa de atacar o problema.

Há também evidência computacional para a conjectura: usando a implementação por Hall do algoritmo de Bestvina-Handel, ela foi confirmada para as 15.566 órbitas periódicas da ferradura com decorações de comprimento  $\leq 8$  e alturas com denominador  $\leq 10$ . Para uma descrição de como isto é feito, veja [dCH02a].

Há ainda uma heurística, baseada em poda, para justificar as conjecturas. Explicá-la aqui nos levaria longe demais e referimos o leitor a [dCH02a].

## 7. TRANSFORMAÇÕES PSEUDO-ANOSOV GENERALIZADAS

Explicamos nesta seção a construção de *transformações pseudo-Anosov generalizadas*, transformações que, como diz o nome, generalizam a classe de transformações pseudo-Anosov introduzida por Thurston. Usando-as, é possível construir uma espécie de complexificação da família unimodal, diferente da usual que a vê como a parte real de uma família de endomorfismos holomorfos da esfera de Riemann. Aqui, a complexificação é por *automorfismos quase-conformes* da esfera. Transformações pseudo-Anosov generalizadas e sua construção foram descritas em [dC02] e a família de transformações pseudo-Anosov generalizadas unimodais foi descrita em [dCH03b]. No espaço de homeomorfismos justos, transformações pseudo-Anosov generalizadas fazem papel análogo ao de difeomorfismos de superfícies satisfazendo Axioma A.

A definição é essencialmente a mesma que a de transformações pseudo-Anosov dada na Seção 5.4, com exceção de que se permite um número infinito de singularidades, mas apenas um número finito de pontos de acumulação destas.

**Definição 7** (Transformação pseudo-Anosov generalizada). Um homeomorfismo de superfície  $\Phi: S \rightarrow S$  é uma *transformação pseudo-Anosov generalizada* se existe:

- a) um número real  $\lambda$ ;
- b) um conjunto finito  $\Phi$ -invariante  $A \subset S$  e
- c) um par de folheações  $(\mathcal{F}^s, \mu^s), (\mathcal{F}^u, \mu^u)$  em  $S \setminus A$ , transversas com uma coleção enumerável de singularidades (dos tipos que mostra a Figura 3) que têm como pontos de acumulação todos os pontos de  $A$ , e com medidas transversais (equivalentes à medida de Lebesgue em segmentos transversais), tais que:

$$\Phi(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \mu^u)$$

$$\Phi(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda} \mu^s)$$

Note que esta definição se reduz àquela da Seção 5.4 quando  $A = \emptyset$ .

Em [dCH04], construímos uma transformação pseudo-Anosov generalizada associada a cada transformação unimodal que tenha uma partição de Markov e matriz de transição irredutível e aperiódica. Isto inclui todas as transformações unimodais do tipo tenda (com inclinação constante) cujo invariante de kneading (isto é, o itinerário do ponto crítico) seja periódico ou pré-periódico e seja maior que  $101^\infty$ .

**7.1. A construção.** Os detalhes da construção são muitos e aqui vamos passá-la como um filme, com poucas palavras e muitas imagens. O exemplo usado abaixo começa com uma transformação unimodal, mas a construção pode ser adaptada a qualquer endomorfismo de um grafo que possa ser realizado em uma superfície, isto é, que preserve a ordem cíclica nos vértices herdada da superfície, e que tenha uma partição de Markov cuja matriz de transição associada seja irredutível e aperiódica.

Começamos com uma transformação unimodal  $f: I \rightarrow I$  com as propriedades mencionadas e a consideramos restrita ao seu intervalo dinâmico, isto é, ao intervalo entre a imagem do valor crítico e o valor crítico  $I = [f^2(c), f(c)]$ . ‘Engordamos’ então o intervalo e transformamos  $f$  em um homeomorfismo  $F: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  de um ‘intervalo gordo,’ como mostra a Figura 13. Neste exemplo, o ponto

crítico é periódico e o invariante de kneading de  $f$  é  $(1001011)^\infty$ . Os retângulos em branco da figura, chamados *faixas*, são folheados por segmentos horizontais e verticais, folheações estas que são preservadas por  $F$ , a horizontal sendo expandida e a vertical contraída uniformemente. Os dois semi-discos nos extremos direito e esquerdo e os retângulos hachurados são chamados *junções* e contêm uma órbita periódica atratora cuja bacia contém todos os pontos das junções.

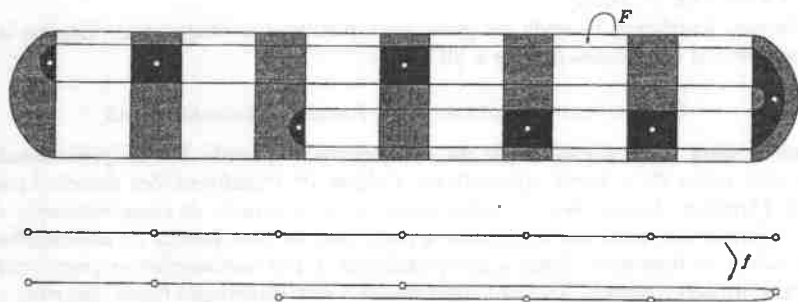


FIGURE 12. Uma transformação de um intervalo gordo associada à uma transformação unimodal. O ponto crítico é periódico de código 1001011, e sua órbita é indicada por  $\circ$ .

O próximo passo é voltar a uma transformação em dimensão 1. Ao invés de inverter o processo acima, que levaria de volta ao intervalo e à mesma transformação unimodal, o que se faz é um pouco mais sutil. Tomamos segmentos horizontais, um em cada faixa, chamados *arestas*, e construímos uma pseudo-isotopia que contrai cada segmento vertical das faixas ao seu ponto de interseção com a aresta dentro da faixa. Aplicamos o homeomorfismo às arestas, aplicamos as pseudo-isotopias que colapsam as faixas às arestas, mas tomamos o cuidado de deixar os detalhes dentro das junções intocados. Fazendo isto um número infinito de vezes produz a Figura 13: um grafo infinito  $\tau$ , chamado *trilho de trem generalizado*, com uma aresta dentro de cada faixa, chamadas *arestas reais* de  $\tau$ , e um número (possivelmente) infinito de arestas dentro das junções, chamadas *arestas infinitesimais* de  $\tau$ . Note que a transformação de intervalo gordo induz um endomorfismo  $\phi: \tau \rightarrow \tau$ .

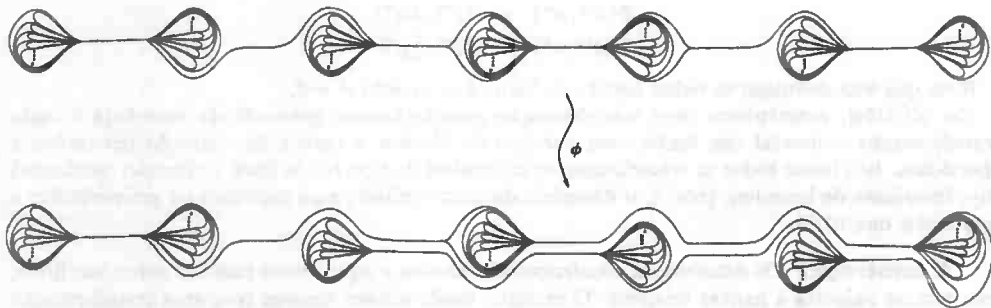
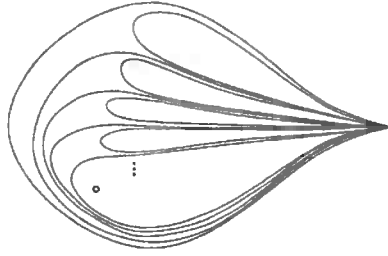


FIGURE 13. O trilho de trem generalizado associado à transformação da Figura 12.

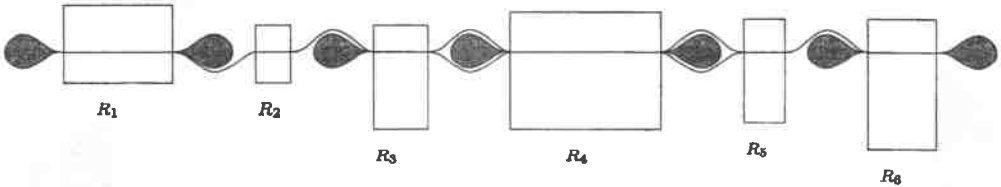
A Figura 14 mostra detalhes dentro de uma junção.

Consideramos agora a matriz de transição  $N$  associada à transformação unimodal ou, o que dá no mesmo, à transformação de intervalo gordo. Esta é uma matriz irredutível e aperiódica por hipótese e, pela teoria de Perron-Frobenius para tais matrizes,  $N$  tem um autovalor positivo

FIGURE 14. Vista detalhada das *bolhas* dentro das junções.

$\lambda$  de valor absoluto igual ao raio espectral de  $N$ . As coordenadas de autovetores de  $N$  e  $N^T$  correspondentes a  $\lambda$  fornecem as dimensões horizontais e verticais de retângulos  $R_i$  que pomos lado a lado no plano como mostra a Figura 15, ao longo das arestas reais de  $\tau$ .

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = 1.6859, X = \begin{bmatrix} 0.5427 \\ 0.1036 \\ 0.1909 \\ 0.7240 \\ 0.1747 \\ 0.3219 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.3676 \\ 0.2909 \\ 0.5089 \\ 0.5359 \\ 0.4904 \\ 0.6198 \end{bmatrix}.$$

FIGURE 15. Os retângulos colocados ao longo das arestas reais de  $\tau$ .

Utilizamos então as arestas infinitesimais para identificar segmentos de mesmo comprimento ao longo dos lados verticais dos retângulos  $R_i$ , como mostra a Figura 16. Os comprimentos destes segmentos vêm do autovetor associado a  $\lambda$  da matriz de transição aumentada (possivelmente infinita) para incluir as transições entre lados infinitesimais.

Obtemos assim, como quociente dos retângulos, o disco topológico  $\mathcal{R}$  mostrado na Figura 17. Considerando os retângulos folheados por segmentos horizontais e verticais, note que, após tomarmos o quociente, as folhas da folheação horizontal, chamada *instável*, com algumas poucas exceções (as que encontram singularidades), são todas imersões de  $\mathbb{R}$ .

Até este momento utilizamos apenas o trilha  $\tau$ . A transformação  $\phi: \tau \rightarrow$  induz uma transformação  $\tilde{\phi}: \mathcal{R} \rightarrow$ : folhas instáveis são expandidas pelo fator  $\lambda$ , folhas estáveis (vindas da folheação vertical dos retângulos) são contraídas pelo fator  $1/\lambda$ , os retângulos (sua projeção) são mapeados de acordo com a ação de  $\phi$  nas arestas reais de  $\tau$  e as identificações são mapeadas de acordo com a ação de  $\phi$  nas arestas infinitesimais de  $\tau$ . Isto é mostrado na Figura 19. A transformação  $\tilde{\phi}$  é um homeomorfismo em todo  $\mathcal{R}$ , exceto no arco indicado por  $\gamma$  na Figura 19, que é dobrado em dois no ponto indicado por  $c$ . Na figura, a imagem  $\tilde{\phi}(\gamma)$  é indicada ligeiramente separada para que seja possível ver o que acontece; na realidade, os pontos ligados pelos pequenos arcos verticais são

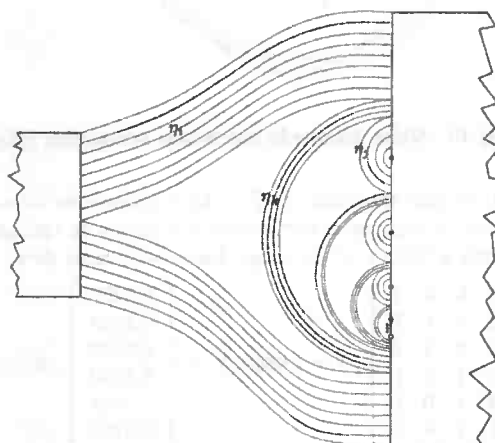
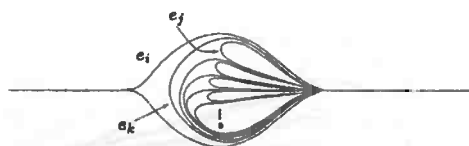


FIGURE 16. As identificações de segmentos de lados verticais dos retângulos  $R_3$  e  $R_4$  são indicadas por linhas pontilhadas.

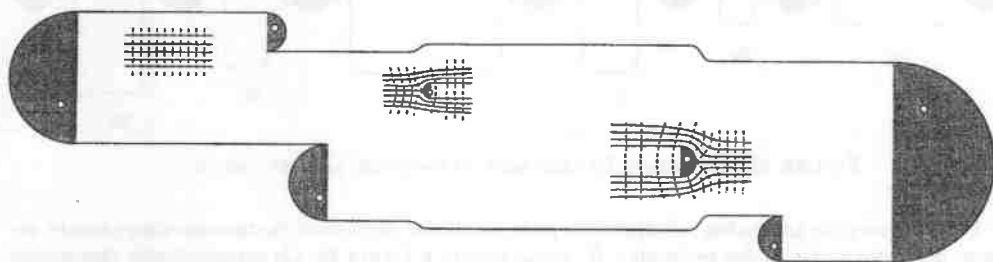


FIGURE 17. O quociente  $\mathcal{R}$  dos retângulos pela identificação ditada pelas arestas infinitesimais.

o mesmo ponto. Para fazer de  $\tilde{\Phi}$  um homeomorfismo, identificamos pontos de  $\gamma$  que são levados ao mesmo ponto por  $\tilde{\Phi}$ . Temos então que fazer o mesmo com todas as pre-imagens de  $\gamma$ , ou teríamos apenas transferido o problema para  $\tilde{\Phi}^{-1}(\gamma)$ . Na figura, os arcos fora de  $\mathcal{R}$  indicam as identificações em  $\gamma$  e suas pre-imagens  $\tilde{\Phi}^{-1}(\gamma)$ ,  $\tilde{\Phi}^{-2}(\gamma)$ . A Figura 20 mostra todas as identificações. O quociente de  $\mathcal{R}$  por estas identificações é uma esfera topológica  $S$  e  $\tilde{\Phi}$  se projeta a um homeomorfismo  $\Phi: S \rightarrow$ . As folheações horizontal e vertical dos retângulos se projetam às folheações instável e estável invariantes por  $\Phi$ . As medidas transversais são aquelas induzidas pela medida de Lebesgue. A descrição das acumulações de singularidades envolve a altura do invariante de kneading de  $f$  e referimos o leitor a [dCH03b] para detalhes. No exemplo que estamos tratando, as acumulações de singularidades consistem de uma órbita periódica correspondente à órbita periódica contida nas

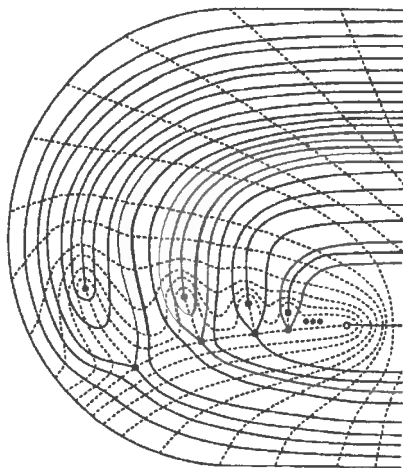
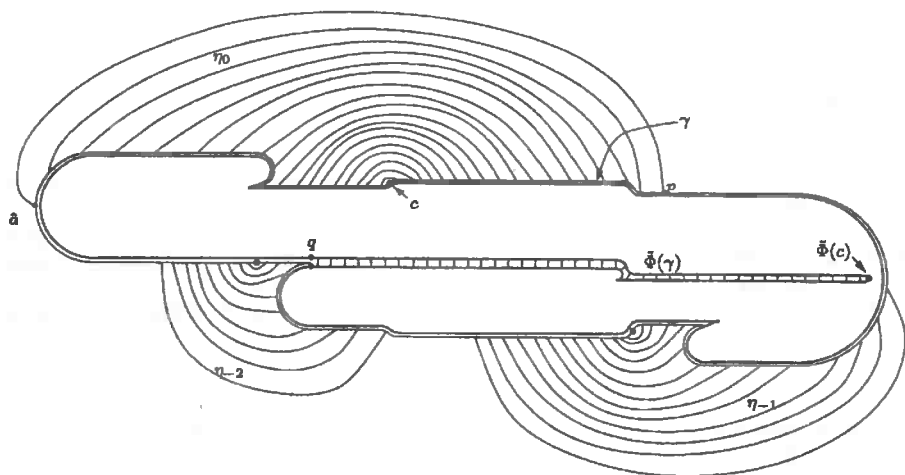


FIGURE 18. Vista detalhada das regiões hachuradas na Figure 17.

FIGURE 19.  $\mathcal{R}$  e sua imagem por  $\tilde{\Phi}$ . Os arcos fora de  $\mathcal{R}$  indicam as primeiras identificações necessárias para fazer de  $\tilde{\Phi}$  um homeomorfismo.

junções e o ponto no infinito, que vem de uma órbita periódica de  $\tilde{\Phi}$  de período três, como indicado na Figura 20. Este fato está intimamente relacionado com o fato de que a altura de 1001011 é  $1/3$ .

**7.2. A estrutura complexa.** A estrutura Euclideana dentro dos retângulos  $R_i$  induz uma estrutura complexa no complemento das singularidades de  $S$ . Utilizando as transformações  $z \mapsto z^{2/k}$  introduz-se estruturas complexas em vizinhanças das singularidades com  $k$  separatrizes (Figura 3). Para mostrar que  $S$  é uma esfera complexa, é necessário mostrar que esta estrutura complexa vê as acumulações de singularidades como furos e não como buracos, e portanto se estende sobre elas. É

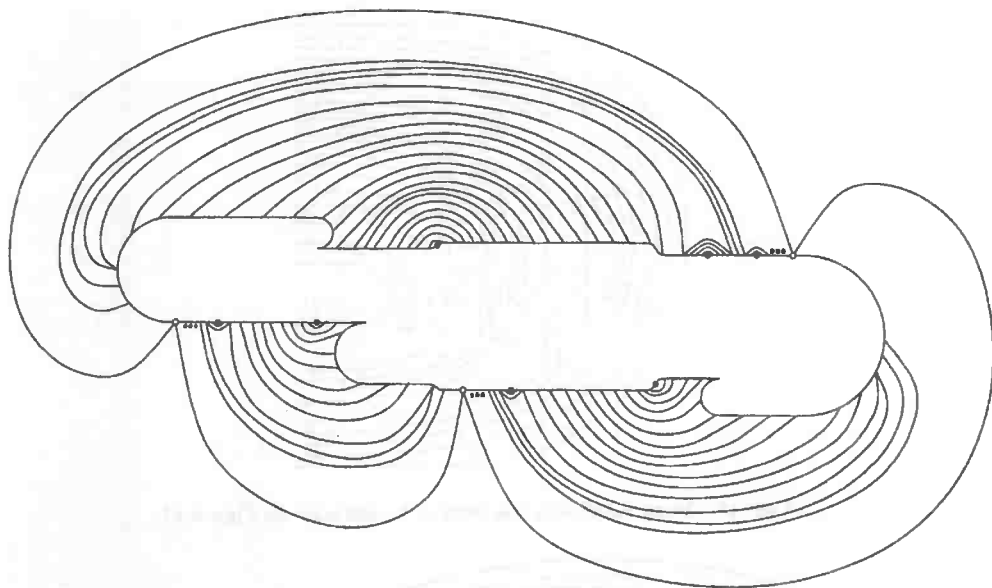


FIGURE 20. Todas as identificações necessárias para fazer de  $\mathcal{R}$  uma esfera  $S$  e de  $\tilde{\Phi}$  um homeomorfismo  $\Phi: S \rightarrow S$ .

possível fazê-lo utilizando a teoria de comprimento extremal (*extremal length*). Mostra-se assim que a superfície  $S$  produzida durante a construção acima é uma superfície de Riemann compacta e que a transformação pseudo-Anosov generalizada  $\Phi$  é uma transformação de Teichmüller que preserva a diferencial quadrática cujas trajetórias horizontais e verticais são, respectivamente, as folheações instável e estável. Esta é uma diferencial integrável que é meromorfa em  $S \setminus A$ , onde  $A$  é o conjunto de acumulações de singularidades. Novamente referimos o leitor a [dC02, dCH03b] para detalhes.

## 8. CONCLUSÕES E PROBLEMAS DE PESQUISA

Mostramos como fazer sentido de poda e como construir, usando o teorema de poda, a família de poda: uma família de modelos topológicos, conjecturalmente completa, passando de dinâmica trivial a caótica. Um enunciado preciso da CFP — a conjectura que diz que a família de poda contém modelos para todas as transformações da família de Hénon — foi apresentado. A família de poda depende de um número infinito de parâmetros e portanto, se a CFP é verdadeira, a família de Hénon é uma subfamília de dimensão 2 numa família de dimensão infinita.

A CFP é um objetivo unificante e serviu, direta ou indiretamente, para motivar a maior parte do trabalho descrito nesta monografia. Uma demonstração da conjectura em geral parece, no entanto, ainda distante. Ao contrário da teoria para endomorfismos do intervalo, onde os pontos críticos fornecem a partição natural do espaço necessária para se fazer dinâmica simbólica, a família de Hénon, sendo uma família de difeomorfismos  $C^\omega$ , não possui nenhuma característica óbvia que a distinga como uma família de automorfismos ‘unimodais’ de  $\mathbb{R}^2$ . Isto torna a abstração de características topológicas distintivas bastante difícil. A *Conjectura do Tipo de Trança* discutida abaixo é uma tentativa de superar esta dificuldade. Observe que a situação é diferente com a família de Lozi, cujo locus de não-diferenciabilidade faz o papel de ponto crítico. Ishii [Ish97], usando isto

e a sua natureza linear por partes, deu um enunciado preciso e uma demonstração da CFP para a família de Lozi.

Descrevemos também como relacionar poda a uma teoria de kneading generalizada para endomorfismos de árvores e grafos. Isto permitiu mostrar que a família de poda contém subfamílias que correspondem a famílias unimodais de endomorfismos de árvores, entre elas a família unimodal usual do intervalo. Foi ainda observado que é possível usar poda para dar uma demonstração algorítmica da classificação de Thurston e como disto se segue que a família de poda contém a família de representantes canônicos de Thurston nas classes de isotopia da ferradura relativas a seus conjuntos invariantes finitos. Além da evidência computacional apresentada por Cvitanović, Dillon e outros, estes fatos também suportam a conjectura, mostrando que a família de poda é 'grande o bastante.'

Um ingrediente técnico importante para vários dos itens discutidos é a relação de equivalência de entropia nula, que colapsa a pontos contínuos maximais que têm entropia igual a zero. Esta equivalência permitiu precisar a natureza da semi-conjugação no enunciado da CFP. Além disso, foi mencionado o teorema que afirma que o quociente de um difeomorfismo de superfície de classe  $C^{1+\alpha}$  por esta equivalência é um homeomorfismo justo (isto é, um homeomorfismo sob o qual todo contínuo não-degenerado possui entropia maior que zero) de um cactóide generalizado. Para difeomorfismos de superfícies satisfazendo Axioma A e tais que quaisquer dois de seus conjuntos básicos (que não se reduzem a órbitas periódicas) não são relacionados pela ordem de Smale, este quociente é um homeomorfismo de um cactóide generalizado com um número finito de componentes tal que as transformações de primeiro retorno a cada componente são transformações pseudo-Anosov generalizadas. O exemplo apresentado foi a 'ferradura justa,' isto é, o quociente da ferradura pela equivalência de entropia nula. O espaço quociente é uma esfera, o quociente das variedades invariantes do conjunto básico tipo sela são folheações transversas com singularidades e o quociente da medida de entropia maximal é uma medida que se decompõe em um produto de medidas transversais para as folheações.

Discutimos também restrições na maneira em que órbitas periódicas são criadas durante a formação de uma ferradura, estudando implicação entre tipos de trança. Foi apresentada uma conjectura sobre como a ordem parcial de implicação organiza o conjunto de tipos de trança da ferradura. Dada a enorme complexidade do cálculo de implicação entre tranças em geral, a conjectura torna este cálculo surpreendentemente simples: famílias de órbitas periódicas com a mesma decoração são totalmente ordenadas e a ordem é simplesmente a ordem unimodal. Entre famílias, o cálculo de implicação é também bastante simples: o elemento maximal da família com decoração  $w$  é a órbita homoclínica  $P_0^w$  e se uma tal órbita homoclínica  $P_0^w$  implica outra  $P_0^{w'}$ , então implicação entre as duas famílias associadas é novamente dada pela ordem unimodal. Esta conjectura é suportada por provas de casos particulares, a saber, aqueles nos quais os trilhos de trem associados são *estrelas*, isto é, árvores com exatamente um vértice de valência maior que dois. Há também evidência computacional e uma heurística usando frentes de poda.

Vale mencionar que em 2003, T. Hall ganhou o *Prêmio Whitehead*, um prêmio dado a matemáticos ingleses com menos de quarenta anos de idade, em parte pelo nosso trabalho em colaboração sobre implicações entre tranças (citação em anexo).

O último assunto discutido foi a construção de transformações pseudo-Anosov generalizadas. Estas transformações generalizam as transformações pseudo-Anosov introduzidas por Thurston e fazem um papel análogo, no universo das transformações justas, àquele feito por difeomorfismos de superfícies satisfazendo Axioma A. Transformações pseudo-Anosov generalizadas são transformações de Teichmüller com respeito a uma diferencial quadrática cujas trajetórias horizontais e verticais são precisamente as folheações invariantes. Em particular, elas são homeomorfismos quase-conformes da esfera com dilatação constante. Conjecturalmete, todo difeomorfismo de superfície suficientemente suave ( $C^{1+\alpha}$ ) é semi-conjugado à uma transformação no fecho do espaço de transformações pseudo-Anosov generalizadas na topologia uniforme, por uma semi-conjugação que

não destói dinâmica 'demais,' por exemplo, que preserva entropia. Além disso, as transformações quociente são transformações de Teichmüller com respeito a diferenciais quadráticas em  $L^1$ , mas que têm, possivelmente, conjuntos 'densos' de zeros e pólos. Em particular, são transformações quase-conformes com dilatação constante.

Agora são descritos alguns problemas de pesquisa relacionados aos assuntos discutidos.

**8.1. A Conjectura da Frente de Poda e a Conjectura do Tipo de Trança.** Uma maneira de tentar caracterizar a família de Hénon topologicamente é a

**Conjectura do Tipo de Trança (CTT).** *Todo tipo de trança da família de Hénon é um tipo de trança da ferradura, isto é, para todos os valores dos parâmetros  $a, b$ , e para cada conjunto  $H_{a,b}$ -invariante finito  $P$  existe um conjunto  $F_0$ -invariante finito  $Q$  tal que  $\text{tt}(H_{a,b}, P) = \text{tt}(F_0, Q)$ , onde  $F_0$  é a ferradura e  $\{H_{a,b}\}$  é a família de Hénon.*

Por seu caráter combinatório-topológico, é provável que a CTT seja de mais fácil acesso. Explicaremos abaixo como uma demonstração da CTT pode levar a uma demonstração da CFP.

**8.2. Completamento do conjunto de tipos de trança.** Uma questão que surge naturalmente dos problemas discutidos aqui é o de como tomar limites de tipos de trança. Por exemplo, se exaurimos sistematicamente as órbitas periódicas de um homeomorfismo, é possível, de alguma forma, reconstruir o homeomorfismo no limite? Parece natural tentar responder esta pergunta usando os representantes canônicos de Thurston e considerando limites deles. Um problema relacionado é o de como completar a família de transformações pseudo-Anosov generalizadas unimodais para obter uma família 'contínua' (não-enumerável, portanto) passando de dinâmica trivial a caótica. Parece ser possível responder esta última questão, para o quê é necessário obter estimativas uniformes ao longo da família para o módulo de certas coleções infinitas de anéis. Além disso, também são necessários alguns resultados técnicos sobre o operador de transferência associado a transformações unimodais, que aparecem em [BY93a, Gal97].

Como os representantes de Thurston são homeomorfismos justos, é razoável esperar que o limite de uma sequência deles também o será. Não devemos, portanto, esperar reaver o homeomorfismo original através do processo de exaustão mencionado acima, mas, possivelmente, o seu quociente pela equivalência de entropia nula.

Seria interessante estabelecer condições sobre o homeomorfismo de superfície  $F: S \rightarrow S$  que garantam que, a menos de semi-conjugação,  $F$  pertence ao completamento dos seus próprios tipos de trança.

**8.3. A CFP e a CTT.** Uma demonstração da CTT levaria a uma possível demonstração da CFP como se segue. Sob as hipóteses corretas, tomando uma exaustão das órbitas periódicas e dos correspondentes representantes canônicos de Thurston de um difeomorfismo  $H$  deveria produzir o quociente  $H/\sim$  no limite. Se  $H$  é uma transformação de Hénon e todos os tipos de trança de Hénon são tipos de trança da ferradura, então os mesmos representantes canônicos podem ser obtidos como podas da ferradura, pelo Teorema 4. Portanto, a menos de entropia nula, o limite destes representantes está contido na família de poda.

**8.4. Implicação entre tipos de trança.** Durante a elaboração de [dCH03b] ficou claro que é essencial o entendimento da *dinâmica no infinito* ou a *dinâmica do lado de fora*: como transformações do intervalo gordo são homeomorfismos do plano cuja dinâmica está contida em um compacto, faz sentido considerar a dinâmica no círculo de fins primos (*prime ends*) do disco no infinito. Este entendimento faz um papel central na descrição da família de pseudo-Anosovs generalizados unimodais e parece também ser a chave de uma possível demonstração da Conjectura 6. Entrar em detalhes nos levaria longe demais, mas vale mencionar que a dinâmica no infinito da

imersão usual de transformações unimodais como a parte real de endomorfismos da esfera de Riemann é de grande importância naquela teoria e este parece ser o caso aqui também, embora os dois 'infinitos' e suas dinâmicas sejam bastante diferentes.

**8.5. Renormalização na família de Hénon.** Em trabalho conjunto com M. Lyubich e M. Martens, comecei a estudar renormalização na família de Hénon. Descobrimos algumas similaridades e várias diferenças surpreendentes entre transformações de Hénon infinitamente renormalizáveis e suas análogas unimodais: elas não são topologicamente rígidas — há uma quantidade não-enumerável de tais transformações que não são topologicamente conjugadas — nem tampouco geometricamente rígidas — o conjunto de Cantor obtido tomando o fecho do conjunto 'pós-crítico' não é rígido e pode ter geometria ilimitada (*unbounded geometry*). Observamos também que é possível provar a CFP para tais transformações. Há ainda muitas questões a serem estudadas neste contexto. Em particular, seria interessante investigar a possibilidade de usar estas técnicas para demonstrar a CFP para transformações infinitamente renormalizáveis de períodos diferentes de 2.

**8.6. A família de Hénon complexa.** Existe hoje uma teoria bastante rica da família de Hénon complexa, desenvolvida por vários autores: veja [HOV94, HOV95, BS99, FS01, BF96] e referências citadas. A CTT é um enunciado sobre uma 'constância' conjectural da família de Hénon: órbitas periódicas podem aparecer e desaparecer quando parâmetros são variados, mas sempre têm tipos de traça dentro de uma família fixa. Constância tende a ser uma característica do mundo complexo, o exemplo mais bem conhecido disto sendo o Teorema Fundamental da Álgebra. Seria interessante relacionar as técnicas e resultados da teoria de Hénon complexa com as questões discutidas aqui e explorar a possibilidade de, com eles, ter uma maneira efetiva de atacar a CTT.

**8.7. Dinâmica e geometria e topologia simpléticas.** Tanto sistemas dinâmicos quanto topologia e geometria simpléticas nasceram do mesmo problema considerado por Poincaré. Estas áreas cresceram e desenvolveram técnicas e teorias poderosas, mas, com isso, os pontos de contato parecem ter-se tornado gradativamente mais escassos. Seria interessante explorar a possibilidade de que sejam aplicadas técnicas, por exemplo, de dinâmica topológica descritas aqui para o estudo de problemas de topologia simplética e vice versa.

## REFERENCES

- [BC91] M. Benedicks and L. Carleson. The dynamics of the Hénon map. *Ann. of Math. (2)*, 133(1):73–169, 1991.
- [BF96] G. T. Buzzard and J. E. Fornæss. Compositional roots of Hénon maps. In *Geometric complex analysis (Hayama, 1995)*, pages 67–73. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.
- [BH95] M. Bestvina and M. Handel. Train-tracks for surface homeomorphisms. *Topology*, 34(1):109–140, 1995.
- [Bow71] R. Bowen. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153:401–414, 1971.
- [Boy94] P. Boyland. Topological methods in surface dynamics. *Topology Appl.*, 58(3):223–298, 1994.
- [BS99] E. Bedford and J. Smillie. External rays in the dynamics of polynomial automorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . In *Complex geometric analysis in Pohang (1997)*, pages 41–79. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [BY93a] V. Baladi and L.-S. Young. On the spectra of randomly perturbed expanding maps. *Comm. Math. Phys.*, 156(2):355–385, 1993.
- [BY93b] M. Benedicks and L.-S. Young. Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps. *Invent. Math.*, 112(3):541–576, 1993.
- [BY00] M. Benedicks and L.-S. Young. Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps. *Astérisque*, (261):xi, 13–56, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).
- [CGP88] P. Cvitanović, G. Gunaratne, and I. Procaccia. Topological and metric properties of Hénon-type strange attractors. *Phys. Rev. A (3)*, 38(3):1503–1520, 1988.
- [Cvi91] P. Cvitanović. Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos. *Phys. D*, 51(1-3):138–151, 1991. Nonlinear science: the next decade (Los Alamos, NM, 1990).
- [dC99] A. de Carvalho. Pruning fronts and the formation of horseshoes. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(4):851–894, 1999.
- [dC02] A. de Carvalho. Extensions, quotients and generalized pseudo-Anosov maps. arXiv:math.DS/0204119, April 2002. To appear.

- [dCH01] A. de Carvalho and T. Hall. Pruning theory and Thurston's classification of surface homeomorphisms. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 3(4):287–333, 2001.
- [dCH02a] A. de Carvalho and T. Hall. The forcing relation for horseshoe braid types. *Experiment. Math.*, 11(2):271–288, 2002.
- [dCH02b] A. de Carvalho and T. Hall. How to prune a horseshoe. *Nonlinearity*, 15(3):R19–R68, May 2002.
- [dCH03a] A. de Carvalho and T. Hall. Conjugacies between horseshoe braids. *Nonlinearity*, 16:1329–1338, 2003.
- [dCH03b] A. de Carvalho and T. Hall. Unimodal generalized pseudo-Anosov maps. arXiv:math.DS/0307211, July 2003. Submitted.
- [dCH04] A. de Carvalho and T. Hall. Braid forcing and star-shaped train tracks. *Topology*, 43:247–287, 2004.
- [dCP04] A. de Carvalho and M. Paternain. Monotone quotients of surface diffeomorphisms. *Math. Res. Lett.*, 10:603–619, 2004.
- [DMS91] M. J. Davis, R. S. MacKay, and A. Sannami. Markov shifts in the Hénon family. *Phys. D*, 52(2-3):171–178, 1991.
- [DN79] R. Devaney and Z. Nitecki. Shift automorphisms in the Hénon mapping. *Comm. Math. Phys.*, 67(2):137–146, 1979.
- [FM93] J. Franks and M. Misiurewicz. Cycles for disk homeomorphisms and thick trees. In *Nielsen theory and dynamical systems (South Hadley, MA, 1992)*, pages 69–139. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [FS01] J. E. Fornæss and N. Sibony. Dynamics of  $\mathbb{P}^2$  (examples). In *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, pages 47–85. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [Gal97] R. Galeeva. Stability of the densities of invariant measures for piecewise affine expanding non-renormalizable maps. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 66(1):137–144, 1997.
- [Hal] T. Hall. Prune: Software available from <http://www.liv.ac.uk/~tobyhall/prune/>.
- [Hal94a] T. Hall. The creation of horseshoes. *Nonlinearity*, 7(3):861–924, 1994.
- [Hal94b] T. Hall. Fat one-dimensional representatives of pseudo-Anosov isotopy classes with minimal periodic orbit structure. *Nonlinearity*, 7(2):367–384, 1994.
- [Hén76] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.*, 50(1):69–77, 1976.
- [HOV94] J. Hubbard and R. Oberste-Vorth. Hénon mappings in the complex domain. I. The global topology of dynamical space. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (79):5–46, 1994.
- [HOV95] J. Hubbard and R. Oberste-Vorth. Hénon mappings in the complex domain. II. Projective and inductive limits of polynomials. In *Real and complex dynamical systems (Hillerd, 1993)*, pages 89–132. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [Ish97] Y. Ishii. Towards a kneading theory for Lozi mappings. I. A solution of the pruning front conjecture and the first tangency problem. *Nonlinearity*, 10(3):731–747, 1997.
- [Kat80] A. Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (51):137–173, 1980.
- [Los93] J. Los. Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc: a finite algorithm. *Proc. London Math. Soc.* (3), 66(2):400–430, 1993.
- [Loz79] R. Lozi. Strange attractors: a class of mappings of  $\mathbb{R}^2$  which leaves some Cantor sets invariant. In *Intrinsic stochasticity in plasmas (Internat. Workshop, Inst. Études Sci. Cargèse, Cargèse, 1979)*, pages 373–381. École Polytech., Palaiseau, 1979.
- [Moo62] R. Moore. *Foundations of point set theory*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.
- [MV93] L. Mora and M. Viana. Abundance of strange attractors. *Acta Math.*, 171(1):1–71, 1993.
- [Pal00] J. Palis. A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. *Astérisque*, (261):xiii–xiv, 335–347, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).
- [RS38] J. Roberts and N. Steenrod. Monotone transformations of two-dimensional manifolds. *Ann. of Math.*, 39:851–862, 1938.
- [Sma67] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.

**RELATÓRIOS TÉCNICOS DO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA**

**2004**

**RT-MAP-0401 - João Amaro de Matos, Jorge C. Kapotas & Pedro Paulo Schirmer**

**"Pricing and Hedging Brazilian Currency Options"**

Série: Seminário de Finanças - 01/2004

Maio, 2004 - São Paulo - IME-USP - 41 pg.

**RT-MAP-0402 - Frank Michael Forger, Cornelius Paufler & Hartmann Römer**

**"Hamiltonian Multivector Fields and Poisson Forms in Multisymplectic Field Theory"**

Julho, 2004 - São Paulo - IME-USP - 50 pg.

**RT-MAP-0403 - Mauro de Oliveira César & Angelo Barone-Netto**

**"Some Central Force-Stability"**

Julho, 2004 - São Paulo - IME-USP - 13 pg.