

# A CONTRIBUIÇÃO DO TABOLEIRO NA RESISTÊNCIA DAS PONTES EM ARCO

pelo engenheiro  
Telemaco van Langendonck

Tese apresentada à Escola Politécnica  
da Universidade de São Paulo para o  
concurso da cadeira de Resistência dos  
Materiais e Estabilidade das Construções

São Paulo, Brasil  
1941

OK //

SYSNO: 711856

HP  
FT-384  
e.2)

DEDALUS - Acervo - EPEC EPBC



31400026255

OK

## SUMÁRIO

Introdução .....	3
Estabelecimento e resolução das equações .....	5
Modificações necessárias das hipóteses feitas .....	9
1) Influência do afastamento dos montantes .....	10
2) Influência do não engastamento do taboleiro ..	12
3) Influência da ligação central rígida entre tabo- leiro e arco .....	14
Estudos das correções, Exemplos de aplicação .....	15
1) Afastamento dos montantes e não engastamento do taboleiro .....	15
a) Arco de três articulações .....	15
b) Arco de duas articulações .....	21
c) Arco engastado .....	25
d) Nota geral .....	29
2) Ligação central rígida entre taboleiro e arco ..	31
a) Taboleiro isolado .....	32
b) Arco isolado .....	32
c) Arco e taboleiro solidários .....	34
Conclusão .....	38

PEF

Escola Politécnica da USP  
Divisão de Biblioteca

FT-384



# A CONTRIBUIÇÃO DO TABOLEIRO NA RESISTÊNCIA DAS PONTES EM ARCO

## INTRODUÇÃO

Em diversos ensaios de pontes em arco, feitos pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo, quando ocupávamos o cargo de chefe de sua Seção de Verificação de Estruturas, sempre nos despertou a atenção a sensível redução dos esforços observados nos arcos, causada pelo acréscimo de rigidez que o taboleiro lhes comunicava. Parecia-nos, pois, um desperdício, o cálculo dos arcos e abóbadas com o abandono das vantagens trazidas pela existência do taboleiro. Além disso, não podendo este ser articulado junto a cada montante ou a cada pendural, costuma-se calculá-lo como viga contínua, sem consideração dos deslocamentos verticais dos apoios que repousam sobre os arcos; tal fato pode levar a resultados completamente errôneos, quanto à intensidade e, mesmo, quanto ao sentido dos esforços que agem no taboleiro. Daí não só a conveniência, mas também a necessidade de se considerar no cálculo a influência mútua entre taboleiro e arcos; asserção essa, aliás, já reconhecida por técnicos de todo o mundo, inclusive pela comissão especial designada pela American Society of Civil Engineers para o estudo dos arcos de concreto, nas conclusões de seu relatório final, apresentado em 22 de novembro de 1934.

Parece estranho, pois, que a maioria dos arcos e abóbadas de pontes seja ainda hoje calculada sem que se tenham em vista tais considerações. Há, entretanto, um motivo para isso: a grande complexidade que apresenta a solução do problema, para a qual, embora múltiplos tenham sido os métodos apresentados, nenhum ainda oferece a simplicidade relativa que seria de desejar para torná-lo de uso corrente. A própria comissão norte-americana acima citada reconheceu isso, recomendando aos calculistas o emprego de modelos na resolução de seus problemas. O modelo, no caso, embora possa ser de grande utilidade, ainda não satisfaz plenamente, pois é mais útil nos casos de verificação do que nos de dimensionamento.

Tendo em vista esse fato é que procuramos achar um meio fácil de se calcularem os esforços que atuam no arco e no taboleiro, quando ambos agem em conjunto. Não se trata aqui do caso de taboleiros construídos, propositadamente, com rigidez muito grande, para absorver os esforços de flexão da abóbada, como acontece nas estruturas do tipo Maillart; mas visa-se somente o aproveitamento do taboleiro cuja construção é indispensável para a utilização da ponte. Em rigor, melhor seria construir-se um taboleiro sem rigidez, pois em geral, quando duas peças trabalham conjuntamente resistindo a esforços de flexão, maior é o aproveitamento do ma-



terial quando se concentram todos esses esforços em uma delas, eliminando a rigidez da outra: no caso em questão isso se daria, ou quando a abóbada não tivesse rigidez, suportando somente os esforços de compressão (caso Maillart, que não está em consideração), ou quando o taboleiro não fosse rígido. Esta última condição, porém, não se pode dar, pois que o taboleiro é feito para transmitir as cargas aos montantes ou pendurais (salvo o caso em que ele se apoie diretamente sobre o arco, quando funcionam como uma só peça), estando pois sujeito a solicitações de flexão.

Aproxima-se a solução da do caso ideal, evitando dar ao taboleiro dimensões excessivas; assim sendo, obtém-se, entre os momentos de inércia dos arcos e os do taboleiro uma relação superior a um e que pode atingir valores elevados, especialmente nos arcos de grande vão. Quando essa relação ultrapassa certo limite, a influência recíproca entre o taboleiro e os arcos torna-se desprezível, não sendo então necessário tomá-la em consideração. Essa influência não existe quando se consideram as cargas que são aplicadas aos arcos antes de haver solidariedade com o taboleiro, como por exemplo a do peso daqueles quando descimbrados antes da construção deste.

O método proposto parte do princípio, usualmente adotado no cálculo de estruturas, de que são desprezíveis todas as deformações oriundas de forças normais e cortantes, ressalvado apenas o caso dos tirantes, nos arcos de empuxo eliminado. Supõe-se ainda que os montantes ou pendurais sejam articulados nas suas extremidades ou que tenham rigidez

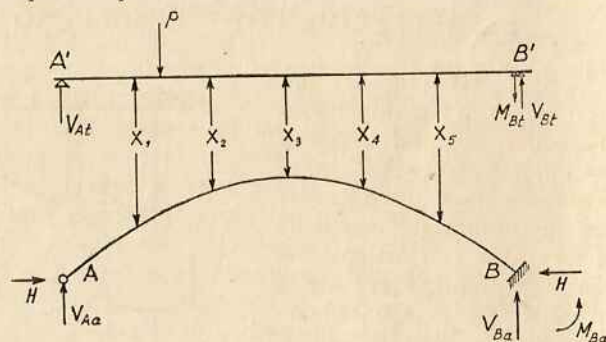


Fig. 1

tal que, mesmo sem essa precaução, praticamente não transmitam momentos.

Com essas hipóteses, embora o problema já fique bem simplificado, ainda se tem um grau de hiperestaticidade elevado. Um processo para resolvê-lo consiste em se imaginar o arco isolado sob a ação de cargas concentradas, verticais, transmitidas pelos montantes ou pendurais. As mesmas cargas atuam em sentido inverso, sobre o taboleiro, que seria considerado como uma viga apoiada nas extremidades e solicitada também pela carga que lhe é aplicada externamente. A determinação daquelas incógnitas, em número igual ao de montantes (não considerados os que repousam sobre as impostas do arco, fig. 1), far-se-ia igualando os deslocamentos verticais provocados no arco e no taboleiro nos pontos de aplicação dos montantes <sup>(1)</sup>.

(1) Para facilidade de exposição, referimo-nos apenas a arco e montantes (taboleiro superior), embora as noções expandidas se estendam a pendurais (taboleiro inferior) e abóbadas (ou arcos paralelos).



Tal processo, já usado por Schubert <sup>(2)</sup> nas pontes de tipo Maillart, ainda conduz a um sistema de equações de muitas incógnitas e de incômoda resolução; excetuado, talvez, o caso de tímpanos divididos em apenas quatro ou, no máximo, seis painéis. Quando há uma parte do taboleiro diretamente apoiada no arco, caso muito comum nas pontes de taboleiro superior, o processo exposto só se aplica depois de modificado; este caso será tratado posteriormente, quando se desenvolver o novo método proposto.

Se difícil é a resolução do problema quando o número de montantes é grande, mas finito, fica ela muito mais simples quando aquele número cresce indefinidamente, tornando-se os montantes infinitamente próximos um do outro <sup>(3)</sup>. A questão pode então ser rapidamente resolvida, desde que se observem certas condições; fazendo-se posteriormente, se necessário, as correções dos erros que a hipótese acarreta, correções essas que, como veremos são também fáceis de se obter.

Feitas essas considerações, passemos ao desenvolvimento do método proposto.

### ESTABELECIMENTO E RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

Seja AB (fig. 2) um arco de forma e dimensões quaisquer, no qual se apoia um taboleiro reto A'B', praticamente horizontal, através de montantes verticais sem rigidez (ou articulados nas extremidades), mas inextensíveis e infinitamente próximos um do outro.

Tomando dois eixos coordenados Ax, horizontal, e Ay, vertical, sejam:  $y = f(x)$  a equação do eixo do arco,  $J_a$  o momento de inércia do arco e  $J_t$  o do taboleiro, ambos variáveis com x, e  $p_t$  a carga aplicada sobre o taboleiro, também variável com x. Esta carga será transmitida ao arco, através dos montantes, mas com outra distribuição, ainda desconhecida, e que indicaremos por p. Poremos ainda

$j_a = \frac{1}{E_a J_a \cos \alpha}$  e  $j_t = \frac{1}{E_t J_t}$ , onde  $\alpha$  é o ângulo que faz a tangente ao

arco, no ponto considerado, com a horizontal, e  $E_a$  e  $E_t$  são os módulos de elasticidade dos materiais do arco e do taboleiro, respetivamente.

Sobre A'B' agirão pois a carga  $p_t$  e, em direção oposta, a reação dos

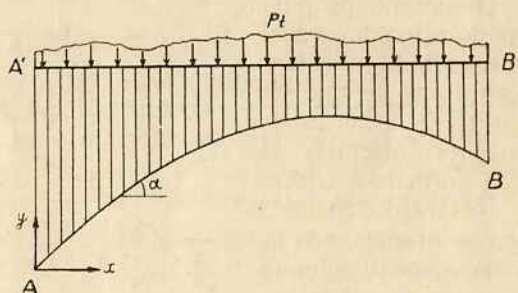


Fig. 2

(2) O. Schubert — "Beitrag zur Berechnung des Stabbogens", Schw. Bauz., 28-11-1936, pág. 235.

(3) Recurso usado no cálculo das pontes penseis e já citado, em 1905, por Considère, e ao qual, aliás, corresponde o processo usual de cálculo dos arcos sem taboleiro, quando, no traçado das linhas de influência, se faz a carga passar diretamente sobre o arco e não através de montantes ou pendurais afastados um do outro.

montantes  $p$ . Os momentos fletores  $M_t$  no taboleiro serão dados pela equação diferencial <sup>(4)</sup>:

$$-\frac{d^2 M_t}{dx^2} = p_t - p \quad (1)$$

e os seus deslocamentos verticais  $\tau_t$  por

$$\frac{d^2 \tau_t}{dx^2} = -j_t M_t. \quad (2)$$

Sobre AB age a carga  $p$ , que dá lugar a um empuxo horizontal  $H$ , invariável com  $x$ , e a momentos fletores  $M_a$  dados por

$$-\frac{d^2 M_a}{dx^2} = p + H \frac{d^2 y}{dx^2}; \quad (3)$$

os deslocamentos verticais  $\tau_a$ , iguais aos do taboleiro, são dados por

$$\frac{d^2 \tau_a}{dx^2} = -j_a M_a. \quad (4)$$

As equações (1) a (4) formam um sistema, cuja resolução dará os valores, em função de  $x$  e  $H$ , das quatro incógnitas:  $p$ ,  $M_t$ ,  $M_a$  e  $\tau_t$ . A quantidade  $H$ , independente de  $x$ , mas que varia com  $p$ , é obtida posteriormente, empregando-se a equação usual dos arcos isolados.

Resolvamos, como exemplo, o sistema de equações para um taboleiro de secção constante ( $j_t = \text{constante}$ ), que é o caso comum, e um arco com momento de inércia variando segundo a lei  $j_a = ax + b$  (que é a recomendada por Strassner).

De (2) e (4), vem:

$$j_t M_t = j_a M_a = (ax + b) M_a$$

ou, derivando duas vezes:

$$j_t \frac{d^2 M_t}{dx^2} = (ax + b) \frac{d^2 M_a}{dx^2} + 2a \frac{dM_a}{dx};$$

mas, eliminando  $p$  entre (1) e (3) tem-se:

$$\frac{d^2 M_t}{dx^2} = -\frac{d^2 M_a}{dx^2} - H \frac{d^2 y}{dx^2} - p_t$$

donde

$$-j_t \frac{d^2 M_a}{dx^2} - j_t H \frac{d^2 y}{dx^2} - j_t p_t = (ax + b) \frac{d^2 M_a}{dx^2} + 2a \frac{dM_a}{dx}$$

e

$$(ax + b + j_t) \frac{d^2 M_a}{dx^2} + 2a \frac{dM_a}{dx} = -j_t (p_t + H \frac{d^2 y}{dx^2}) = F(x)$$

onde o 2.º membro varia com  $x$  mas não com  $M_a$ . Integrando, vem:

$$M_a = \frac{j_t}{j_a} M_t = \int \frac{j_t (j_a + j_t) F(x) dx}{(j_a + j_t)^2} dx,$$

(4) São considerados positivos os momentos fletores que causam tração na parte inferior do taboleiro ou no intradorso do arco e os deslocamentos verticais que se dão para baixo.



donde, com auxílio de (1) e (2) ou de (3) e (4) e da equação do empuxo dos arcos comuns, tiram-se os valores das outras incógnitas  $p$ ,  $\eta$  e  $H$ .

Não nos deteremos neste exemplo, prosseguindo os cálculos indicados, porquê, se examinarmos mais detidamente a hipótese feita sobre a variação dos momentos de inércia do taboleiro e do arco, veremos que ela não é a mais recomendável. Com efeito, se as dimensões do arco foram determinadas previamente, sem consideração da influência do taboleiro, a mudança dos momentos que esta acarreta, não se processando uniformemente ao longo do arco, trará, para que se aproveitem as vantagens daí decorrentes, uma modificação da lei escolhida para variação do momento de inércia, causando a alteração de todo o cálculo anterior e dificultando o seu prosseguimento. Tal não acontecerá, porém, se, *qualquer que seja a lei de variação dos momentos de inércia do arco*, se adotar para o taboleiro uma secção variável de modo que seu momento de inércia seja proporcional ao da secção do arco situada na mesma vertical multiplicada pelo cosseno do ângulo  $\alpha$ , isto é, se  $j_t$  for proporcional a  $j_a$ . Com essa hipótese, como se verá, os momentos fletores no arco serão proporcionais aos que nele se manifestam sem a existência do taboleiro, facilitando enormemente o cálculo de ajustamento das secções às novas condições de solicitação (é verdade que as forças normais não variarão na mesma proporção, mas a parte que lhes cabe no momento nuclear, que se utiliza no dimensionamento da secção, não é a preponderante). A hipótese tem ainda a vantagem de admitir qualquer lei de variação dos momentos de inércia do arco, que é o elemento principal da estrutura; por outro lado, a correção a se fazer no taboleiro é simples, pois já parte de uma lei conhecida e faz-se reduzindo em alguns pontos e aumentando em outros a sua secção transversal.

Partindo dessas considerações, ponhamos

$$\frac{j_a}{j_t} = k' = \frac{1 - k}{k} = \text{constante}$$

donde

$$k = \frac{1}{1 + k'} = \frac{j_t}{j_a + j_t} \quad 1 - k = k k' = \frac{j_a}{j_a + j_t}.$$

De (2) e (4), vem

$$\begin{aligned} M_t &= k' M_a \\ \frac{d^2 M_t}{dx^2} &= k' \frac{d^2 M_a}{dx^2} \end{aligned}$$

ou, tendo em vista (1) e (3):

$$p_t - p = k' p + k' H \frac{d^2 y}{dx^2}$$

donde

$$p(1 + k') = p_t - k' H \frac{d^2 y}{dx^2}$$

ou

$$p = k p_t - (1 - k) H \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Sendo  $p$  a carga que, agindo sobre o arco, substitue o efeito da carga  $p_t$  e da rigidez do taboleiro, verifica-se que o cálculo do arco pode ser feito pelos métodos comuns, supondo, porém, que em vez da carga  $p_t$ , sobre ele atue uma carga proporcional a ela,  $kp_t$ , e mais uma outra proporcional a  $\frac{d^2y}{dx^2}$  e definida por  $q = -(1-k)H \frac{d^2y}{dx^2}$ . Ora, como é sabido, toda carga vertical proporcional a  $\frac{d^2y}{dx^2}$  não origina momentos fletores no arco; logo, se  $\bar{M}_a$  forem os momentos fletores calculados para o arco sem taboleiro, os novos momentos serão

$$M_a = k \bar{M}_a,$$

o que é simplicíssimo. No taboleiro eles serão, portanto:

$$M_t = k' M_a = k' k \bar{M}_a = (1-k) \bar{M}_a.$$

Vejamos agora qual será o empuxo. Se  $\bar{H}$  for o calculado para o arco sem taboleiro, portanto devido à carga  $p_t$  <sup>(5)</sup> agindo diretamente sobre o arco, tem-se para a carga  $p$ :

$$H = k\bar{H} + (1-k)H,$$

visto que, em qualquer arco simples, uma carga vertical distribuída proporcionalmente a  $\frac{d^2y}{dx^2}$  origina um empuxo igual ao fator de proporcionalidade.

Dai

$$H = \bar{H},$$

isto é, o empuxo não se altera com a existência do taboleiro. As reações verticais externas, por uma questão de equilíbrio estático, são as mesmas; parte delas porém transmite-se ao taboleiro e parte ao arco. Sua determinação é fácil, pois a primeira parte citada é igual à reação do taboleiro considerado como viga solicitada por  $p_t - p$ .

No caso de uma variação de temperatura, tem-se  $p_t = 0$  e

$$H = \bar{H} + (1-k)H$$

donde

$$H = \frac{\bar{H}}{k}.$$

Os momentos fletores no arco não se alteram:

$$M_a = k \frac{\bar{M}_a}{k} = \bar{M}_a$$

e os do taboleiro são

$$M_t = k' M_a = k' \bar{M}_a.$$

(5)  $p_t$  é vertical, pois se tiver uma componente horizontal, esta não se transmitirá ao arco com o tipo de montantes adotado; uma reação para ela deve ser prevista na extremidade do taboleiro, salvo no caso de arcos com a parte central rigidamente solidária com o taboleiro, como se verá mais adiante.



No caso do arco atirantado, calcula-se como se as impostas fossem fixas e verifica-se depois a modificação trazida pela elasticidade do tirante, assimilando-a à influência de uma variação de temperatura <sup>(6)</sup>.

Como se vê, com as hipóteses feitas, a solução do problema é muito simples, permitindo, sem aumento de dificuldade, que se modifiquem as secções preestabelecidas do arco para ajustá-las às novas condições da rigidez do taboleiro.

Resumindo:

*Hipótese:* arco de forma e dimensões quaisquer ligado por montantes verticais, sem rigidez, mas inextensíveis e infinitamente próximos um do outro, a um taboleiro retilíneo, com momentos de inércia que obedeçam à lei  $j_t / j_a = \text{constante}$ .

*Consequências* da consideração da rigidez do taboleiro no cálculo do arco:

a) os momentos fletores nos centros de gravidade das secções do arco ficam reduzidos na proporção  $j_t / (j_a + j_t)$ , salvo no caso de influência de variação de temperatura em que eles permanecem invariáveis;

b) os momentos fletores no taboleiro obtem-se multiplicando os do arco por  $j_a / j_t$ ;

c) o empuxo do arco não fica alterado, salvo no caso da influência da variação de temperatura em que ele varia na proporção de  $1:k$ ;

d) as reacções verticais dos apoios, externamente, são as mesmas; mas parte delas se transmite ao taboleiro, parte essa que é igual às reacções deste, considerado como viga carregada com

$$\frac{j_a}{j_a + j_t} \left( p_t + H \frac{d^2 y}{dx^2} \right);$$

e) nos arcos atirantados, a influência da distensão do tirante equipara-se à de uma variação de temperatura.

## MODIFICAÇÕES NECESSARIAS DAS HIPÓTESES FEITAS

As hipóteses feitas nem sempre se podem realizar na prática; das divergências que se observam, são de importância as três seguintes:

1) a distância entre montantes não é infinitamente pequena;

(6) Assim, se  $\bar{H}$  for o empuxo com impostas fixas e  $\bar{H}'$  o empuxo com o tirante, do arco sem taboleiro, com a existência deste ter-se-á:

$$H = \bar{H}$$

$$H' - H = \frac{\bar{H}' - \bar{H}}{k} \frac{H'}{\bar{H}}$$

donde

$$H' = \frac{k \bar{H}' \bar{H}}{\bar{H} - \bar{H}'(1-k)}$$

Os momentos fletores serão

$$M'_a = k \bar{M}_a + (\bar{M}'_a - \bar{M}_a) \frac{H'}{\bar{H}},$$

$$M'_t = k' M'_a.$$

2) aos arcos engastados nas impostas, nem sempre correspondem taboleiros engastados nas extremidades (como seria necessário em face das conclusões a que se chegou);

3) na maioria dos casos de taboleiro superior, há uma zona central em que o taboleiro se apoia direta e rigidamente no arco.

Nesses casos há, às vezes, necessidade de correções, as quais vamos estudar. Consideraremos sempre, no caso de cargas verticais, a aplicação de uma carga concentrada, com a qual se podem traçar linhas de influência, que permitem a solução relativa a qualquer distribuição de cargas.

#### 1) INFLUÊNCIA DO AFASTAMENTO DOS MONTANTES

Com a hipótese feita, o efeito de uma carga concentrada  $P$ , aplicada em um ponto de abscissa  $z$  traduz-se do seguinte modo (fig. 3a): *No taboleiro*, considerado como viga apoiada nas extremidades <sup>(7)</sup>, pela ação da própria carga  $P$ , de cima para baixo; e, de baixo para cima, de uma carga concentrada  $kP$  no mesmo ponto de abscissa  $z$  e de uma carga distribuída

$q = -(1 - k) H \frac{d^2y}{dx^2}$  ; *no arco*, pela ação destas duas últimas cargas

citadas, aplicadas de cima para baixo. Os momentos produzidos no taboleiro são pois (fig. 3b) representáveis pela diferença entre as coordenadas das duas curvas de momentos correspondentes, respetivamente, à carga  $P$  (linha ACB) e às cargas que atuam de baixo para cima (linha ADB). Do mesmo modo, os momentos no arco acham-se pela diferença das curvas (fig. 3c) correspondentes às cargas verticais, considerado o arco como viga reta (linha ADB, igual à segunda do caso anterior), e ao efeito do empuxo (linha AEB).

Com o afastamento dos montantes, as cargas que estes transmitem ao taboleiro não podem mais ser distribuídas ou aplicadas no ponto de abscissa  $z$  (salvo se esta coincidir com a de um montante), mas devem concentrar-se na verticais dos montantes. O problema consiste, pois, em se saber como se faz essa concentração.

Se o arco não se movesse (pelo menos nos pontos de intersecção com os montantes) ao se passar da carga distribuída para as concentradas, os pontos do taboleiro situados sobre os montantes também ficariam fixos e a distribuição por estes far-se-ia, evidentemente, segundo as reações de uma viga contínua que fosse carregada com a carga a distribuir. Ora, demonstra-se que, no caso dos arcos triarticulados, a hipótese da imobilidade do arco na intersecção dos montantes é exata <sup>(8)</sup>; no caso dos arcos hiperestáticos, embora isso não se dê, verifica-se que a alteração é insignificante e inteiramente desprezível <sup>(9)</sup>.

(7) Embora na figura só se represente o caso de arco articulado nas impostas, as considerações feitas aplicam-se também a arco engastado desde que o taboleiro também o seja.

(8) Basta considerar que o empuxo não fica alterado com a modificação da carga e que, portanto, as deformações são proporcionais às do taboleiro. Supõe-se, é claro, que o taboleiro tenha articulações correspondentes às do arco.

(9) Supõem-se os montantes equidistantes, como é o caso usual. A prova de que a alteração é insignificante tem-se nos exemplos dados mais adiante, para os quais se escolheram as condições mais desfavoráveis.



Considerada, pois, como boa essa distribuição, vejamos como repercute ela nas três curvas de momentos anteriormente citadas.

A primeira, ACB, devida unicamente à carga externa, não se altera. A segunda, ADB, que é devida à reação dos montantes, deixa de ter uma forma contínua para tomar o aspecto de linha quebrada com os vértices correspondendo à posição dos montantes. Tais vértices, porém, não se acham situados sobre a curva primitiva, mas dela se afastam de uma quantidade igual ao momento sobre o apoio da viga contínua imaginada para determinar a concentração das cargas (fig. 3d, linha AD'B, de trechos retos). A terceira curva, AEB, cujas ordenadas são obtidas pelo produto de  $H$  e  $y$ , pode ser considerada como inalterada, pois que  $y$  é invariável e  $H$  pode ser tido como tal, em consequência da própria hipótese de imobilidade do arco (veja-se a confirmação nos exemplos adiante apresentados).

Para facilidade do traçado das curvas de momentos, note-se que a linha ADB é composta da soma de duas outras (fig. 3e): uma AGB devida a  $kP$  e outra AFB, de ordenadas  $(1-k)Hy$ , devida à carga distribuída, e que tem a forma do arco (pois suas ordenadas são proporcionais a  $y$ ). Assim sendo, os momentos no taboleiro, antes de corrigidos, podem ser representados pela diferença de duas linhas de fácil construção (fig. 3f, linhas AIB e AJB). Os momentos no arco são representados por curvas iguais, mas em ou-

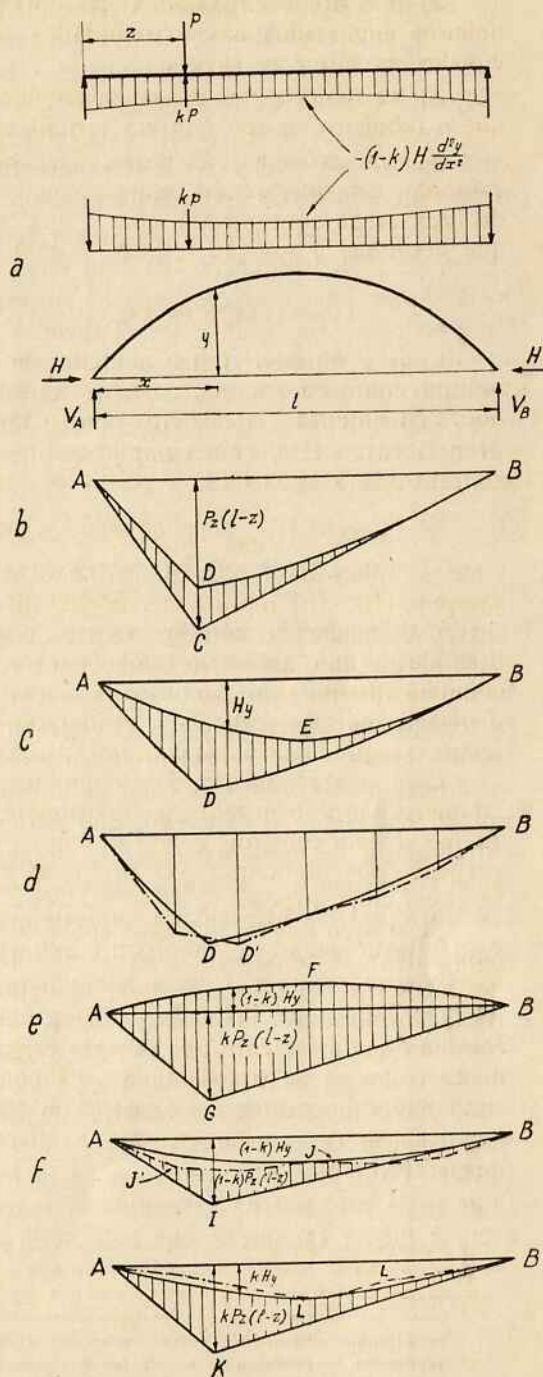


Fig. 3

tra escala (fig. 3g, linhas AKB e ALB). As correções feitas posteriormente, iguais em valor absoluto e de sentidos contrários, quebram a proporcionalidade dos respectivos momentos (figs. 3f, linha AJ'B, de trechos retos; e 3g, linha AL'B, de trechos curvos).

No caso de uma variação de temperatura, a questão simplifica-se, pois então as linhas AIB e AKB desaparecem, só restando as AJB e ALB que, depois de corrigidas como foi explicado, se transformam em AJ'B e AL'B.

O valor das correções a serem feitas e que pode parecer, em certos casos, de difícil obtenção, de fato não o é, se se tiver em vista que, em se tratando de uma correção, não há necessidade de ser ela obtida com grande precisão. Os dados da Tabela I satisfazem plenamente nos casos usuais. Note-se que, com o aumento do número de montantes, o valor de  $l_0$  diminui, tendendo, com isso, a tornar-se desprezível a correção; por outro lado, sua importância relativa, para o taboleiro, é tanto maior quanto menor for a rigidez deste, cujo comportamento tende a igualar-se ao de uma viga contínua sobre apoios fixos.

## 2) INFLUÊNCIA DO NÃO ENGASTAMENTO DO TABOLEIRO

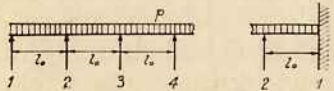
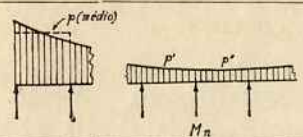
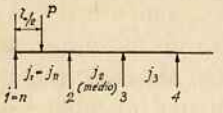
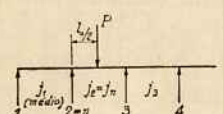

A aplicação do método exposto ao caso de um arco engastado não terá dificuldades se o taboleiro também o for, pois então o momento de engastamento se distribui por ambos os elementos da estrutura do mesmo modo que os demais momentos fletores. O engastamento pode não ser real, mas apenas teórico, como o que se obtém construindo, na extremidade do taboleiro, dois montantes muito próximos, como se indica em B' na figura 1<sup>(10)</sup>. Não sendo, porém, engastado o taboleiro, não poderá haver momentos fletores em sua extremidade, necessitando-se então corrigir os resultados obtidos. Essa correção corresponde à aplicação de um momento fletor, na extremidade do taboleiro, igual em intensidade, mas de sentido contrário, ao momento que aí se manifesta quando o taboleiro é engastado.

Esse momento vai atuar sobre o arco através das reações que ele origina nos montantes. Não se pode agir aqui, como quando se estudou a influência do afastamento dos montantes, calculando essa distribuição simplesmente como se se tivesse uma viga contínua sobre apoios fixos; pois que então haveria modificação sensível do empuxo e, conseqüentemente, dar-se-iam deslocamentos verticais do arco nos pés dos montantes, falseando a hipótese. Nota-se, no entanto, que a maior reação continua a ser a do montante mais próximo da extremidade, reação essa que, devido ao recalque do arco, é menor do que a que se obteria na viga contínua de apoios fixos e

(10) Um prolongamento do taboleiro sobre montantes equidistantes corresponde a um semi-engastamento, podendo-se imaginar (se a rigidez do taboleiro continuar a mesma) que metade do momento fletor seja por ele absorvida, devendo-se fazer a correção correspondente somente à outra metade (veja-se a Tabela VI).



TABELA I

Cargas		j constante		j variavel
		Apoio livre em 1	Engastamento em 1	
	$M_1 = -\frac{Pl_1^2}{1000} \times$ $M_2 = -\frac{Pl_1^2}{1000} \times$ $M_3 = -\frac{Pl_1^2}{1000} \times$ $M_{\geq 4} = -\frac{Pl_1^2}{1000} \times$	0 105 (*) 78 83	83 83 83 83	Adotam-se os mesmos coeficientes.  (*) Havendo só dois vãos, use-se 125.
	$M_n =$	$-\frac{p'+p''}{2000} l_1^2 \times$ coeficientes do caso anterior		
	$M_n = M_1 = -\frac{Pl_1}{1000} \times$ $M_{n+1} = M_2 = -\frac{Pl_1}{1000} \times$ $M_3 = -M_{n+1} \times$ $M_{\geq 4} = 0$	0 100 0,25 —	160 (") 58 0,25 —	Multipliquem-se os coeficientes para $M_n$ por $2 \frac{j_n}{j_n + j_{n-1}}$ e os para $M_{n+1}$ por
	$M_1 = -M_n \times$ $M_n = M_2 = -\frac{Pl_1}{1000} \times$ $M_{n+1} = M_3 = -\frac{Pl_1}{1000} \times$ $M_4 = -M_{n+1} \times$ $M_{\geq 5} = 0$	0 75 80 0,25 —	0,5 85 80 0,25 —	$2 \frac{j_n}{j_n + j_{n+1}}$
	$M_{\leq n-2} = 0$ $M_{n-1} = -M_n \times$ $M_n = -\frac{Pl_1}{1000} \times$ $M_{n+1} = -\frac{Pl_1}{1000} \times$ $M_{n+2} = -M_{n+1} \times$ $M_{\geq n+3} = 0$	— 0,25 80 80 0,25 —	— 0,25 80 80 0,25 —	(") No caso assinalado, para aplicação da fórmula supra, faça-se $j_{n-1} = j$ no engastamento.

que estaria em torno de  $1,5 \frac{M_e}{l_0}$  <sup>(11)</sup>. As reações dos outros montantes caem rapidamente, em valor absoluto, podendo ser desprezadas no cálculo de seu efeito sobre o arco, desde que se corrija a primeira, subtraindo-lhe uma quantidade que, nos casos usuais, se pode supor igual a  $0,4 k' \frac{M_e}{l_0}$ .

Sobre o taboleiro a correção pode ser feita mais simplesmente somando-se aos momentos calculados sobre os três primeiros montantes, respetivamente:

$$- M_e (-0,22 + \frac{3}{8} \cdot 0,4 k') = (+0,22 - 0,15 k') M_e$$

$$- M_e (+0,07 - \frac{1}{4} \cdot 0,4 k') = (-0,07 + 0,1 k') M_e$$

$$- M_e (-0,02) = 0,02 M_e .$$

Todas essas correções são plenamente satisfatórias, como se verá nos exemplos adiante apresentados dos casos mais desfavoráveis. Mesmo no caso da influência da temperatura, para o qual a inspeção da Tabela VI poderia dar uma idéia errônea da precisão obtida, os resultados satisfazem inteiramente, como se vê na figura 10, onde se faz a comparação das linhas exata e calculada dos momentos fletores causados pela variação de temperatura.

### 3) INFLUENCIA DA LIGAÇÃO CENTRAL RÍGIDA ENTRE TABOLEIRO E ARCO

Nas pontes de taboleiro superior é muito comum haver, na parte central, uma zona de ligação direta e rígida do taboleiro ao arco. Nesse trecho (CD na fig. 4), taboleiro e arco podem ser considerados como um todo, usando-se no cálculo o momento de inércia do conjunto e não só o do arco (desde, é claro, que se tomem as precauções necessárias para garantir a solidariedade de ambos).

Se nos trechos AC e DB, a relação entre as quantidades  $j_a$  e  $j_t$  for constante, como se propôs, as deformações de suas extremidades C e D, quando

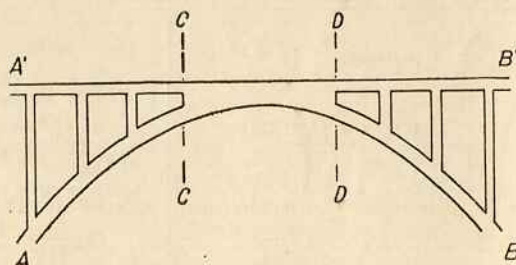


Fig. 4

(11) Mais exatamente, para o caso desfavorável de 4 painéis, entre  $1,36 \frac{M_e}{l_0}$ , no caso de  $j$

constante, a  $1,61 \frac{M_e}{l_0}$  para  $j$  variável parabolicamente, desde 0, nas extremidades, até um valor finito qualquer sobre o apoio central.  $M_e$  é o momento de engastamento do taboleiro e  $l_0$  é o intervalo entre montantes.



se supõem os dois trechos isolados e sob a ação de esforços externos, serão, como vimos, iguais às de um arco isolado, de mesma forma que AC e DB, mas com  $j = k j_a$ . Para efeito do cálculo das grandezas hiperestáticas, pode-se pois supor o arco sem o taboleiro, desde que se substitua o valor dos  $j_a$ , entre AC e DB, por  $k j_a$ . Os momentos fletores achados distribuem-se posteriormente entre o taboleiro e o arco como já foi visto.

Com este tipo de estrutura, os esforços horizontais de frenagem não são mais levados pelo taboleiro diretamente ao encontro, mas transmitem-se ao arco em C ou D. O cálculo de seus efeitos pode ser feito como no caso das cargas verticais.

O cálculo da influência da temperatura também se faz do mesmo modo.

Detalhes dos cálculos a serem feitos encontram-se no exemplo completo apresentado mais adiante.

## ESTUDO DAS CORREÇÕES. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 1) AFASTAMENTO DOS MONTANTES E NÃO ENGASTAMENTO DO TABOLEIRO

#### a) Arco de três articulações.

*EXEMPLO 1.º — Arco parabólico simétrico, articulado nas nascenças e no fecho, com taboleiro nele repousando através de três montantes. O taboleiro também é articulado no meio e tem suas dimensões tais que  $j_t = j_a = \text{constante}$ .*

Seja o arco da figura 5a. A ação de uma carga vertical  $P$  aplicada a uma distância horizontal  $z = \xi l$  da imposta mais próxima dá lugar, em um arco sem taboleiro, às seguintes reações de apoio:

$$\text{Empuxo: } \bar{H} = P \frac{1}{f} \frac{z}{2}$$

$$\text{Reações verticais: } \bar{V}_A = P(1 - \xi)$$

$$\bar{V}_B = P\xi.$$

O momento fletor em uma secção de abscissa  $x = \xi l$  é

$$\bar{M}_a = \bar{V}_A x - \bar{H} y \quad \text{quando } x \leq z$$

$$\bar{M}_a = \bar{V}_B (1 - x) - \bar{H} y \quad \text{quando } x \geq z.$$

Havendo um taboleiro nas condições do deste exemplo, apoiado sobre o arco por meio de montantes infinitamente próximos entre si, o empuxo no arco será:

$$H = \bar{H}$$

e os momentos fletores no arco e no taboleiro, visto que  $j_a = j_t$  (donde  $k = 1/2$ ):

$$M_a = M_t = -\frac{\overline{M}_a}{2} .$$

Para uma carga em  $z = 1/2$ , p. ex., esses momentos são ( $\zeta = 1/2$ ):

$$M_a = M_t = \frac{P}{4} x - \frac{H}{2} y = Pl \left( \frac{\xi}{4} - \frac{y}{8f} \right)$$

e representam-se pela diferença das ordenadas da linha reta  $Pl \frac{\xi}{4}$  e da parábola  $Pl \frac{y}{8f}$ , desenhadas em traço cheio na figura 5b.

Como os montantes são poucos e afastados de  $l_0 = 1/4$ , esses momentos devem ser corrigidos. Essa correção, como se disse, consiste, para o taboleiro, em transformar a parábola em um polígono, cujos vértices, situados nas verticais dos montantes, tem ordenadas que se afastam das da parábola de uma quantidade igual aos momentos sobre os apoios de uma viga contínua carregada, no caso, com uma carga uniformemente distribuída  $q$ , de-

finida pela condição de causar no arco um empuxo  $(1 - k) \overline{H} = \frac{\overline{H}}{2}$ , ou seja

$$\frac{ql^2}{8f} = \frac{\overline{H}}{2} \quad \text{donde} \quad q = \frac{4\overline{H}f}{l^2} = \frac{2P}{l} \zeta ;$$

para o arco, as correções tem os mesmos valores absolutos das do taboleiro, mas são de sentido oposto. Essas correções que, como o arco é triarticulado, levam a resultados exatos, estão representadas em traço interpontilhado na figura 5b.

Vejamos mais detalhadamente como se agiu. Uma carga uniformemente distribuída  $q$ , aplicada em uma viga contínua sobre dois vãos iguais  $l_0$  (dois porquê a articulação no meio do taboleiro divide este em duas vigas contínuas de dois tramos cada uma), dá lugar a um momento fletor sobre o apoio central igual a

$$- 0,125 \, ql_0^2 = - 0,125 \, \frac{Pl \, \zeta}{8} = - 0,00781 \, Pl.$$

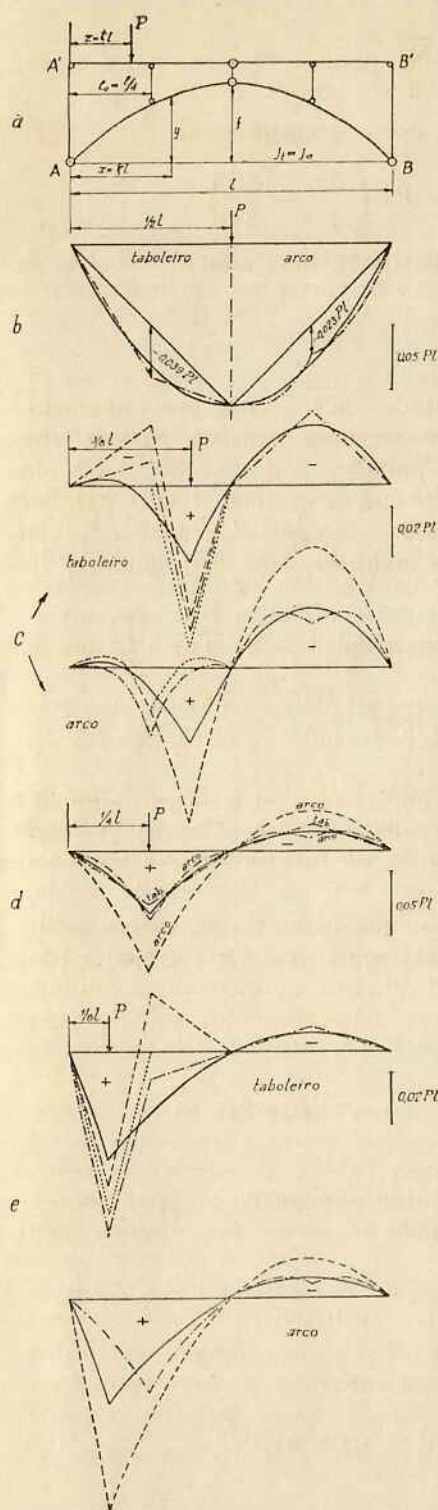
Usando esse valor como correção para a ordenada da parábola em  $\xi = 1/4$ , ( $0,09375 \, Pl$ ), vem, para ordenada do vértice do polígono da figura 5b, relativo ao taboleiro:

$$(0,09375 + 0,00781) \, Pl = 0,10156 \, Pl$$

e para o ponto anguloso da curva relativa ao arco:

$$(0,09375 - 0,00781) \, Pl = 0,08594 \, Pl.$$





# LINHAS DE INFLUÊNCIA

## LEGENDA:

- arco e taboleiro (viga contínua) isolados
- taboleiro articulado nos montantes
- arco e taboleiro solidários, sem correção
- arco e taboleiro solidários, com correção

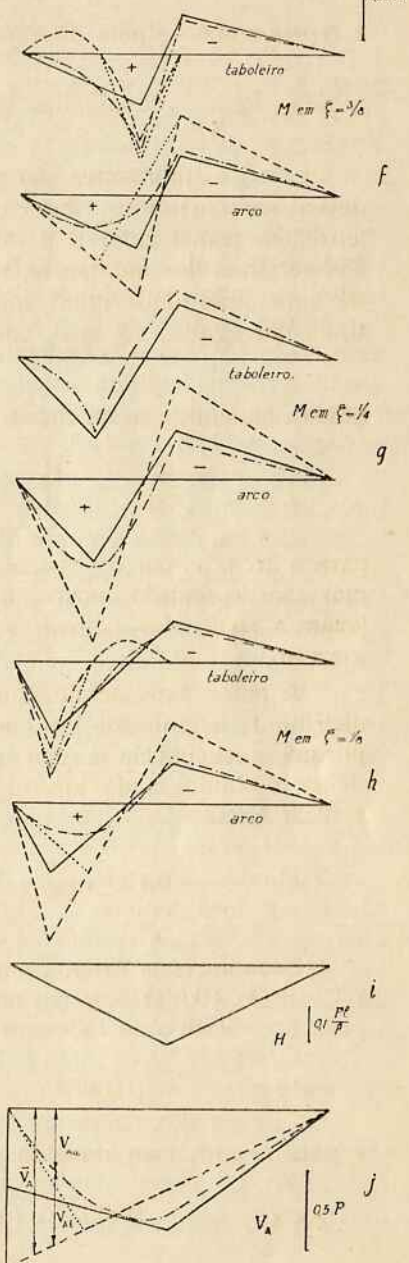


Fig. 5

Os momentos corrigidos, nesse ponto, são iguais à diferença entre essas ordenadas e a do triângulo da mesma figura 5b, isto é:

$$M_t = (0,10156 - 0,06250) Pl = 0,03906 Pl$$

$$M_a = (0,08594 - 0,06250) Pl = 0,02344 Pl.$$

Nas figuras 5c, 5d e 5e, são dadas as curvas destes momentos finais  $M_a$  e  $M_t$  para cargas em posições de  $\zeta$  igual respectivamente a  $3/8$ ,  $1/4$  e  $1/8$ . Nelas se veem, em traço cheio, a curva não corrigida; em traço interpolado, a curva exata, que coincide com a correção feita como se expôs acima (incluída, no caso da vertical da carga não coincidir com um montante, a correção devida também à carga concentrada  $kP$ , que faz parte, como se viu, da carga transmitida pelos montantes:  $p = kP + q$ ); em linha tracejada, a curva dos momentos no arco e no taboleiro isolados, considerado este como viga contínua; e em linha pontilhada a curva correspondente ao taboleiro articulado sobre todos os montantes. Note-se que as curvas referentes ao taboleiro isolado desaparecem para  $\zeta = 1/2$  e  $\zeta = 1/4$ . As curvas que se obtêm com a correção aproximada da Tabela I, no presente caso, coincide quasi completamente com as exatas, não figurando por isso nos diagramas, embora constem suas ordenadas da Tabela II, onde se encontram os dados referentes a todos os casos citados para valores de  $\zeta$  e  $\xi$  variando de  $1/8$  em  $1/8$ .

Mais uteis, porem, são as linhas de influência para os momentos fletores em pontos de  $\xi$  igual a  $3/8$ ,  $1/4$  e  $1/8$ , traçadas, nas figuras 5f, 5g e 5h, com os dados da referida Tabela.

Estudados os momentos fletores, falta-nos verificar as reações de apoio. O empuxo  $H$ , como se viu, permanece inalterado em todos os casos; a linha de influência correspondente encontra-se na figura 5i. As reações verticais do taboleiro e do arco, que devem somar em A e em B, respectivamente,  $\bar{V}_A = P(1 - \xi)$  e  $\bar{V}_B = P\xi$ , obtêm-se considerando as cargas aplicadas ao taboleiro diretamente e através dos montantes. Os resultados encontram-se na Tabela II e na figura 5j.

*EXEMPLO 2.º — Arco igual ao do Exemplo 1.º, mas com sete montantes em vez de três.*

Tudo se passa como no Exemplo 1.º, com exceção das correções que são feitas considerando-se vigas contínuas sobre quatro vãos e não sobre dois apenas. Pelos resultados, apresentados na Tabela III, verifica-se, como era de esperar, que são mais próximos dos não corrigidos do que eram os do Exemplo 1.º. O empuxo não se altera.

*EXEMPLO 3.º — Arco igual ao do Exemplo 1.º, mas com  $jt = 2,5$  jas = constante.*

As curvas dos momentos não corrigidos conservam o mesmo aspeto das do Exemplo 1.º, mas em escalas diferentes: as referentes ao arco teem suas ordenadas 2,5 vezes maiores que as do taboleiro, as quais, por sua vez, são iguais a  $4/7$  das do Exemplo 1.º (pois agora  $1 - k = \frac{1}{3,5} = \frac{2}{7}$ , em vez de  $\frac{1}{2}$ ).



**TABELA II**  
**Arco triarticulado**

Exemplo 1.º: parabólico, três montantes,  $j_1 = j_u = \text{constante}$

Os valores de M devem ser multiplicados por  $\frac{Pl}{10000}$  e os de  $V_A$  e  $V_B$  por  $\frac{P}{1000}$ .

P em $\xi =$	H = $\frac{P}{10000} \frac{1}{I} X$	M (") em $\xi =$	T A B O L E I R O						A R C O				
			I	II	III	Correção (')	IV	V	I	II	III	IV	V
1/2	2500	1/8	0	0	-234	+ 39	-195	-195	-469	-469	-234	-273	-273
		1/4	0	0	-312	- 78 - 0	-390	-390	-625	-625	-312	-234	-234
		3/8	0	0	-234	+ 39	-195	-195	-469	-469	-234	-273	-273
3/8	1875	1/8	-117	0	-19	- 30 (-34)	- 49	- 53	- 39	- 39	- 20	10	14
		1/4	-234	0	78	-59-117 (-125)	- 98	-106	156	156	78	254	262
		3/8	508	625	293	+ 283 (279)	576	572	586	- 39	293	10	14
		5/8	0	0	-176	+ 30	-146	-146	-352	-352	-176	-206	-206
		3/4	0	0	-234	- 59 - 0	-293	-293	-469	-469	-234	-175	-175
1/4	1250	1/8	0	0	195	+ 20	215	215	391	391	195	175	175
		1/4	0	0	469	- 39 - 0	430	430	938	938	469	508	508
		3/8	0	0	195	+ 20	215	215	391	391	195	175	175
		5/8	0	0	-117	+ 20	- 97	- 97	-234	-234	-117	-137	-137
		3/4	0	0	-156	- 39 - 0	-195	-195	-312	-312	-156	-117	-117
1/8	625	1/8	508	625	410	+ 264 (260)	674	670	820	195	410	146	150
		1/4	-234	0	234	-20-117 (-125)	98	90	469	469	234	371	379
		3/8	-117	0	98	- 49 (- 53)	49	45	195	195	97	146	150
		5/8	0	0	- 59	+ 10	- 49	- 49	-117	-117	- 59	- 69	- 69
		3/4	0	0	- 78	- 20 - 0	- 98	- 98	-156	-156	- 78	- 58	- 58
1/2	$V_A = V_B =$		0	0	-250	+ 94 + 0	-156	-156	500	500	750	656	656
3/8	$V_A =$ $V_B =$		-94	0	- 62	+70-47 (-50)	- 39	- 42	625	625	687	664	667
			0	0	-188	+ 70 + 0	-118	-118	375	375	563	493	493
1/4	$V_A =$ $V_B =$		0	0	125	+ 47 + 0	172	172	750	750	625	578	578
			0	0	-125	+ 47 + 0	- 78	- 78	250	250	375	328	328
1/8	$V_A =$ $V_B =$		406	500	312	+23+203 (200)	538	535	875	875	563	337	340
			0	0	- 62	+ 23 + 0	- 39	- 39	125	125	187	164	164

Caso I: Arco e taboleiro isolados, este calculado como viga contínua.

Caso II: Taboleiro articulado sobre todos os montantes.

Caso III: Arco e taboleiro ligados por montantes infinitamente próximos.

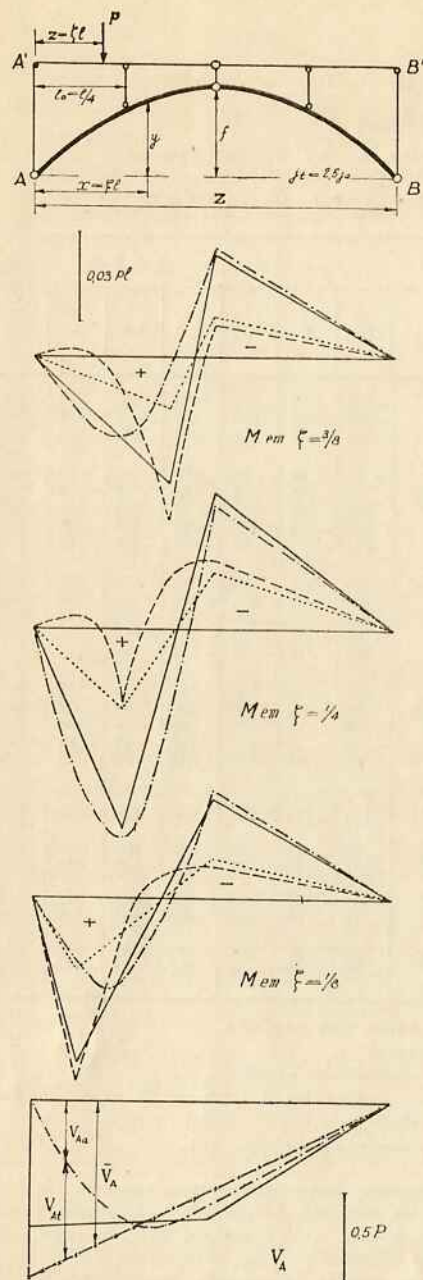
Caso IV: Caso anterior corrigido, para montantes afastados, com a analogia de viga contínua.

Caso V: Idem, corrigido com os coeficientes da Tabela I.

Caso VI: Cálculo exato (nos arcos triarticulados coincide com o caso IV).

(') A correção, para o taboleiro, processa-se do seguinte modo: Calculado o caso III, verifica-se qual a correção a ser feita sobre os montantes (vértices do polígono) correspondente à carga distribuída  $q$  (1.º termo dos binômios da tabela) e, si a vertical da carga não coincidir com a de um montante também a correspondente à carga concentrada (2.º termo). Aplicada a correção, obtêm-se as ordenadas dos vértices do polígono (casos IV e V); as ordenadas intermediárias são obtidas por interpolação linear. Destas tiram-se as correções respectivas (monômios), por subtração das do caso III; essas correções precisam ser conhecidas para serem aplicadas, em sentido contrário, aos momentos no arco. No Exemplo 1.º as correções relativas ao caso IV quase sempre coincidem com as do caso V; quando isso não acontece, estas figuram na Tabela entre parênteses.

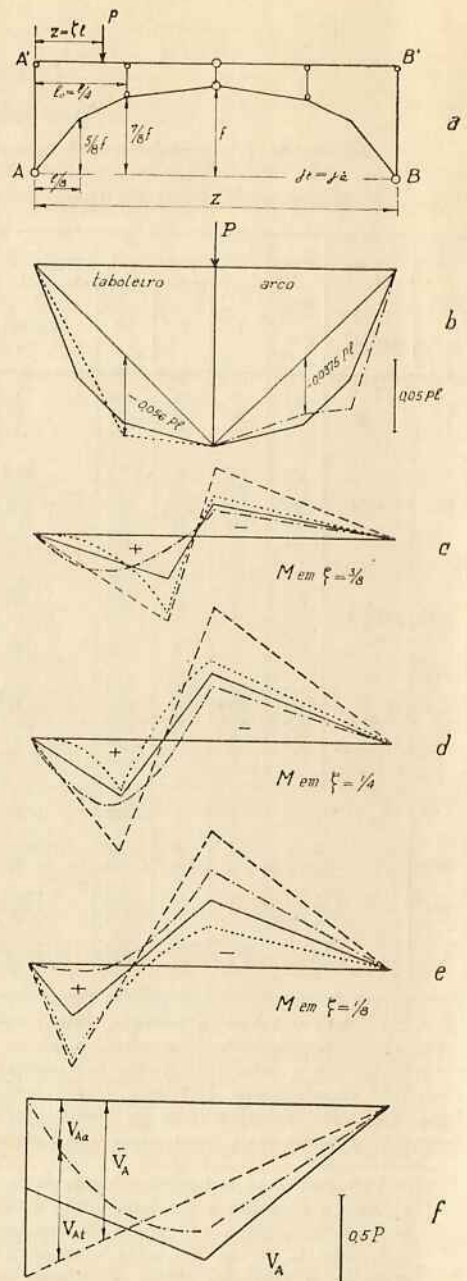
(") As abscissas da secção variam de distâncias iguais a  $1/8$ . Não figuram os dados correspondentes a  $\xi = 1/2$  por serem sempre nulos e os correspondentes a  $\xi = 7/8$  por serem iguais aos de  $\xi = 5/8$  (desde que  $\xi \leq 1/2$ ). Para  $\xi = 1/2$  os resultados são simétricos.



LEGENDA:

Sem correção { taboleiro .....  
arco ————  
Com correção { taboleiro .....  
arco ————

Fig. 6



LEGENDA:

Arco isolado .....  
Arco e taboleiro solidários { sem correção, ambos .....  
com correção, taboleiro .....  
com correção, arco ————

Fig. 7



As correções relativas à carga distribuída  $q$  diminuem, mas as devidas às cargas concentradas  $kP$  aumentam, fazendo com que a linha definitiva se aproxime, para o taboleiro, da correspondente ao caso da viga contínua, e para o arco, da correspondente ao caso do taboleiro articulado sobre os montantes. O empuxo continua inalterado. Os resultados são apresentados na Tabela III e na figura 6 <sup>(12)</sup>.

**EXEMPLO 4.º** — Arco igual ao do Exemplo 1.º, mas com forma poligonal como se indica na figura 7a.

A carga reduz-se, neste caso, a cargas concentradas nos vértices da linha poligonal, com os seguintes valores, para que o empuxo seja igual a  $\frac{H}{2}$  e para que dela não se originem momentos no arco:

$$\begin{array}{ll} \text{em } \xi = \frac{1}{2} : & q_1 = \frac{H}{2} \frac{f}{l} = \frac{P}{4} \zeta \\ \text{em } \xi = \frac{1}{4} \text{ e } \frac{3}{4} : & q_2 = \frac{3H}{4} \frac{f}{l} = \frac{3P}{8} \zeta \\ \text{em } \xi = \frac{1}{8} \text{ e } \frac{7}{8} : & q_3 = \frac{3H}{2} \frac{f}{l} = \frac{3P}{4} \zeta. \end{array}$$

A correção que considera o afastamento dos montantes é feita só para as cargas concentradas  $q_3$  e  $kP$  (esta, quando não for aplicada na vertical de um montante).

Os resultados obtidos acham-se na Tabela III e na figura 7, onde se encontram, em 7b, uma curva análoga à da figura 5b, e de 7c a 7f, as linhas de influência para momentos fletores e reação vertical. O empuxo permanece o mesmo do Exemplo 1.º.

#### b) Arco de duas articulações.

**EXEMPLO 5.º** — Arco parabólico simétrico, articulado nas nascenças, com taboleiro nele repousando através de três montantes e com dimensões tais que  $j_t = j_a = \text{constante}$ .

A marcha de cálculo é a mesma do Exemplo 1.º. Há a notar, porém, que o empuxo do arco isolado (pondo  $\omega = (1 - \zeta) \zeta$ ):

$$\bar{H} = P \frac{1}{f} \frac{5}{8} \omega (1 + \omega),$$

que se admite manter-se invariável, de fato não o é. A diferença existente entre  $\bar{H}$  e o empuxo real  $H$  é no entanto, inteiramente desprezível, como se vê na Tabela IV. Por esse mesmo motivo, a correção feita para eliminar a

(12) O fato de se obterem, em certos pontos, maiores momentos no taboleiro do que no arco vem mostrar que a estrutura está mal proporcionada e que se deve, ou aumentar o número de montantes, ou alterar a rigidez do taboleiro.

TABELA III

## Arco triarticulado

Exemplo 2.º: parabólico, sete montantes,  $j_t = j_a = \text{constante}$ Exemplo 3.º: parabólico, três montantes,  $j_t = 2,5 j_a = \text{constante}$ Exemplo 4.º: poligonal, três montantes,  $j_t = j_a = \text{constante}$ Os valores de M devem ser multiplicados por  $\frac{Pl}{10000}$  e os de  $V_A$  e  $V_B$  por  $\frac{P}{1000}$ .

P em $\xi =$	M (°) em $\xi =$	EXEMPLO 2.º				EXEMPLO 3.º						EXEMPLO 4.º					
		Taboleiro		Arco		Taboleiro			Arco			Taboleiro			Arco		
		IV	V	IV	V	III	IV	V	III	IV	V	III	IV	V	III	IV	V
1/2	1/8	-251	-251	-218	-218	-134	-112	-112	-335	-357	-357	469	-279	-281	-469	-659	-657
	1/4	-324	-325	-301	-300	-179	-223	-223	-446	-402	-402	469	-557	-562	-469	-381	-376
	3/8	-251	-251	-218	-218	-134	-112	-112	-335	-357	-357	234	-279	-281	-234	-189	-187
3/8	1/8	-32	-32	-7	-7	-11	-78	-84	-28	39	45	-195	-111	-113	-195	-279	-277
	1/4	70	69	86	87	45	-156	-167	112	313	324	-39	-222	-226	-39	144	148
	3/8	280	280	305	305	167	547	541	419	39	45	293	514	512	293	72	74
	5/8	-188	-188	-163	-163	-100	-84	-84	-251	-268	-268	176	-209	-211	-176	-143	-141
	3/4	-243	-244	-226	-225	-134	-167	-167	-335	301	301	-352	-418	-423	-352	-286	-281
	7/8	-188	-188	-163	-163	-100	-84	-84	-251	-268	-268	352	-209	-211	-352	-495	-493
1/4	1/8	187	187	204	204	112	123	123	279	268	268	78	173	172	78	-17	-16
	1/4	463	463	474	474	268	246	246	670	692	692	391	347	344	391	435	438
	3/8	187	187	204	204	112	123	123	279	123	123	195	173	172	195	218	219
	5/8	-125	-125	-109	-109	-67	-56	-56	-167	-178	-178	-117	-139	-140	-117	-95	-94
	3/4	-162	-162	-150	-150	-89	-112	-112	-223	-201	-201	234	-278	-281	234	-190	-187
	7/8	-125	-125	-109	-109	-67	-56	-56	-167	-178	-178	234	-139	-140	-234	-329	-328
1/8	1/8	406	406	414	414	234	602	597	586	218	223	352	654	652	352	50	52
	1/4	231	231	237	237	134	-45	-56	335	513	525	195	56	55	195	334	335
	3/8	94	94	102	102	56	-22	-28	140	218	223	98	28	27	98	168	169
	5/8	-63	-63	-54	-54	-33	-28	-28	-84	-89	-89	-59	-69	-70	-59	-48	-47
	3/4	-81	-81	-75	-75	-45	-56	-56	-112	-100	-100	-117	-139	-140	-117	-95	-94
	7/8	-63	-63	-54	-54	-33	-28	-28	-84	-89	-89	-117	-69	-70	-117	-165	-164
1/2	$V_A = V_B =$	-201	-201	701	701	-143	-89	-89	643	589	589	-375	-223	-225	875	723	725
3/8	$V_A =$	-26	-26	651	651	-36	-62	-67	661	687	692	-156	-89	-94	781	714	719
	$V_B =$	-151	-151	526	526	-107	-67	-67	482	442	442	-281	-167	-169	656	542	544
1/4	$V_A =$	150	150	600	600	72	98	98	678	652	652	62	138	138	688	612	612
	$V_B =$	-100	-100	350	350	-72	-44	-44	322	294	294	-188	-112	-112	438	362	362
1/8	$V_A =$	325	325	550	550	179	482	478	696	393	397	281	523	519	594	352	356
	$V_B =$	-50	-50	175	175	-36	-22	-22	161	147	147	-94	-56	-56	219	181	181

Para explicação dos casos I a VI, veja-se o rodapé da Tabela II. Na presente Tabela não figuram o empuxo H, nem os casos I e II (e também o caso III do Exemplo 2.º), por coincidirem com os do Exemplo 1.º (Tabela II).

(\*) Os dados correspondentes a  $\xi = 1/2$  não figuram na Tabela por serem sempre nulos. Para  $\xi = 1/2$  os resultados são simétricos.



influência do afastamento dos montantes (13) não leva a resultados exatos, como no caso dos arcos triarticulados, mas a valores bem próximos deles. As correções aproximadas, obtidas com o emprego dos coeficientes da Tabela I também são satisfatórias. Todos os resultados acham-se na Tabela IV.

**EXEMPLO 6.º** — Arco igual ao do Exemplo 5.º, mas com dimensões variáveis de modo que  $j_t = j_a = j_0 [1 - (1 - n)(1 - 2\xi)^2]$  dando-se a  $n$  os valores extremos 0 (dimensões do arco crescentes do fecho para as nascentes) e 10 (dimensões crescentes das nascentes para o fecho).

Com este exemplo procura-se mostrar que, também com dimensões variáveis do taboleiro e do arco, se pode admitir a não variação do empuxo, que é igual a

para  $n = 0$ :

$$H = P \frac{1}{f} \frac{7}{12} \omega (1 + \omega + 2\omega^2)$$

para  $n = 10$ :

$$H = P \frac{1}{f} \frac{7}{64} \omega (7 + 7\omega - 36\omega^2).$$

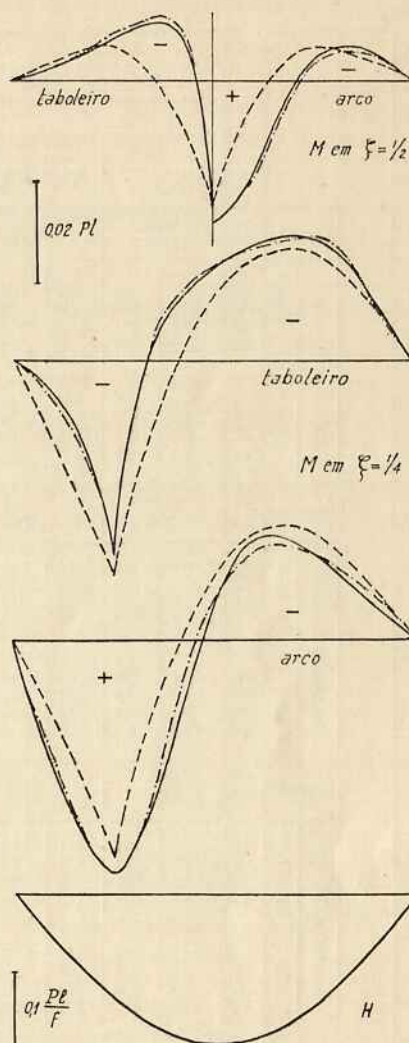
Nele também utilizamos pela primeira vez os coeficientes da Tabela I para  $j$  variável. Os resultados acham-se na Tabela IV. Para  $n = 0$  foram traçadas as linhas de influência na figura 8.

**EXEMPLO 7.º** — Arco igual ao do Exemplo 5.º, mas com  $j_t = 10j_a = \text{constante}$ .

Visa-se mostrar com este Exemplo, para o qual se exageraram as dimensões relativas do arco, a aplicação, também nesse caso, das hipóteses feitas. Nele se verifica a tendência que o taboleiro, com o decréscimo de sua rigidez relativa, apresenta em funcionar como viga contínua e a que o arco mostra em atuar como se o taboleiro fosse articulado sobre todos os montantes. Os resultados estão reunidos na Tabela IV.

# LINHAS DE INFLUÊNCIA

Exemplo 6.º ( $n = 0$ )



## LEGENDA

- sem correção (= 1/2 arco só)
- com correção (Tabela I)
- exato

Fig. 8

(13) Aqui também se tem  $q = \frac{2Hf}{l^2}$ , bem como nos exemplos seguintes de arco parabólico (engastado ou não) e  $j_t = j_a$ .

**TABELA IV**  
**Arco biarticulado**

Exemplo 5.º: parabólico, três montantes,  $j_t = j_a = \text{constante}$

Exemplo 6.º: idem,  $j_t = j_a = j_o [1 - (1 - n)(1 - 2\xi)^2]$

Exemplo 7.º: idem,  $j_t = 10j_a = \text{constante}$

Os valores do empuxo devem ser multiplicados por  $\frac{P}{10000} \frac{1}{l}$  e os dos momentos por  $\frac{Pl}{10000}$

Exemplo		Caso	P em $\zeta =$												$\Delta t \left( \frac{P}{H} = \frac{P}{100 \text{ T}} \right)$	
			1/2		3/8		1/4		1/8							
			M em $\xi =$													
			1/4	1/2	1/4	1/2	3/4	1/4	1/2	3/4	1/4	1/2	3/4	1/4		1/2
5.º	Empuxo	III VI	1953 1951		1808 1805		1392 1390		758 754		200,0 199,8					
		Momentos fletores	Taboleiro	III IV V VI	-107 -160 -159 -159	273 239 235 240	103 -37 -38 -36	33 -99 -102 -98	-209 -233 -232 -231	416 378 379 379	-71 -96 -98 -95	-209 -247 -246 -246	184 39 40 40	-67 -47 -50 -44	-128 -157 -148 -155	-75 -80 -80 -80
	Arco			III IV V VI	-107 -55 -56 -54	273 308 311 309	103 244 245 245	33 166 169 168	-209 -186 -187 -185	416 453 452 453	-71 -46 -44 -45	-209 -172 -173 -172	184 330 329 332	-67 -87 -83 -85	-128 -99 -108 -98	-75 -70 -70 -70
			Empuxo	III VI	2005 2004		1838 1836		1376 1376		723 721		200,0 199,9			
	Momentos fletores			Taboleiro	III IV V VI	-127 -175 -180 -178	247 209 208 213	92 -69 -87 -73	19 -110 -117 -104	-202 -216 -225 -238	422 388 385 383	-63 -89 -90 -82	-203 -237 -240 -242	198 94 104 91	-49 -41 -44 -37	-115 -139 -134 -142
		Arco	III IV V VI		-127 -79 -74 -75	247 286 286 283	92 253 272 258	19 147 154 144	-202 -187 -179 -201	422 455 458 460	-63 -37 -36 -44	-203 -170 -167 -165	198 301 292 305	-49 -57 -54 -60	-115 -90 -96 -87	-75 -70 -70 -70
6.º n=0			Empuxo	III VI	1777 1773		1708 1704		1445 1442		878 866		200,0 199,5			
		Momentos fletores		Taboleiro	III IV V VI	-42 -97 -88 -96	361 334 327 336	141 41 50 42	83 -73 -50 -71	-172 -210 -192 -208	396 350 358 352	-98 -120 -126 -118	-229 -275 -267 -273	140 -85 -73 -80	-126 -70 -96 -64	-173 -209 -196 -204
	Arco		III IV V VI		-42 14 5 16	361 389 396 391	141 241 231 242	83 240 217 242	-172 -134 -152 -132	396 441 434 442	-98 -75 -69 -74	-229 -184 -191 -183	140 364 352 368	-126 -183 -157 -177	-173 -137 -150 -133	-75 -69 -70 -69
			Empuxo	III VI	1953 1953		1808 1807		1392 1391		758 755		110,0 110,0			
	Momentos fletores			Taboleiro	III IV V VI	-20 -29 -29 -29	50 43 43 43	19 -157 -160 -157	6 -182 -182 -182	-38 -1 -1 -1	76 69 69 69	-13 -17 -18 -17	-38 -45 -45 -45	34 -198 -197 -198	-12 46 42 47	-23 42 -37 -42
		Arco	III IV V VI		-195 -186 -186 -186	497 504 504 504	188 364 367 365	61 249 249 250	-381 -417 -417 -417	756 763 762 763	-129 -124 -124 -124	-381 -374 -374 -374	335 567 566 570	-121 -180 -175 -176	-233 -214 -229 -212	-75 -74 -74 -74

Para explicação dos casos I a VI, veja-se o rodapé da Tabela II. O empuxo do caso III coincide com  $\bar{H}$ , empuxo do arco isolado, exceto para  $\Delta t$ . Os resultados são simétricos para  $\Delta t$  e para  $\xi = 1/2$ .



**c) Arco engastado.**

**EXEMPLO 8.º** — Arco engastado parabólico simétrico, com taboleiro engastado nas extremidades e repousando sobre ele através de três montantes, com dimensões tais que  $j_t = j_a = j_o [1 - (1 - n) (1 - 2\xi)^2]$ , dando-se a  $n$  os valores extremos 0 e 1.

A marcha de cálculo é a mesma dos Exemplos 1.º e 5.º.

Para  $n = 1$  tem-se  $j_t$  e  $j_a$  constantes. O empuxo

$$\bar{H} = P \frac{1}{f} \frac{15}{4} \omega^2$$

pode ser considerado inalterado, como se vê na Tabela V. As correções propostas são portanto aceitáveis; é aliás o que se vê pelos dados reunidos na Tabela V e na figura 9.

Para  $n = 0$  (nos arcos engastados não se usa  $n > 1$ ), tem-se

$$\bar{H} = P \frac{1}{f} \frac{35}{2} \omega^3 ;$$

as considerações precedentes são também aplicáveis a este caso, como se mostra na Tabela V.

**EXEMPLO 9.º** — Arco igual ao do Exemplo 8.º com  $j_t = 10j_a =$  constante.

O fim visado com este Exemplo, que é o mesmo do Exemplo 7.º, fica plenamente satisfeito, como se vê na Tabela V.

**EXEMPLO 10.º** — Arcos iguais aos dos Exemplos 8.º e 9.º, mas com taboleiro livremente apoiado nas extremidades.

Inicia-se o cálculo como se o taboleiro fosse engastado nas extremidades. Conhecidos os momentos de engastamento  $M_e$  do taboleiro, calculam-se as forças

$$- (1,5 - 0,4 k') \frac{M_e}{l_o}$$

que se supõem aplicadas sobre o arco através do montante mais próximo da extremidade considerada. Com as linhas de influência do arco isolado, já conhecidas, fácil é obter o resultado final. O efeito sobre o taboleiro é considerado corrigindo-se os momentos, nas verticais dos três montantes mais próximos, das quantidades cuja expressão foi dada anteriormente.

Assim, p. ex., os dados do último exemplo da Tabela V, relativos a  $\xi = 3/8$ , foram obtidos como passamos a expor.

Calculando a estrutura como se o taboleiro fosse engastado, chegaram-se aos resultados do Exemplo 9.º apresentado na mesma Tabela V. Os momentos de engastamento em  $\xi = 0$  e  $\xi = 1$  são (caso V) respetivamente iguais a 0,0080 Pl e 0,0037 Pl. As forças a serem aplicadas no primeiro

TABELA V — Arco engastado

Exemplo 8.º: parabólico, três montantes,  $j_t = j_a = j_o [1 - (1 - n) (1 - 2 \xi)^2]$

Exemplo 9.º: idem,  $j_t = 10 j_a = \text{constante}$

Exemplo 10.º: anteriores com taboleiro não engastado nas extremidades

Os valores do empuxo devem ser multiplicados por  $\frac{P}{10000}$  e os dos momentos por  $\frac{Pl}{10000}$

Exemplo	Caso	P em $\xi =$																$\Delta t \left( \frac{P}{H} = \frac{P}{100 \text{ t}} \right)$						
		1/2				3/8				1/4				1/8										
		M em $\xi =$																						
		0	1/4	1/2	0	1/4	1/2	3/4	1	0	1/4	1/2	3/4	1	0	1/4	1/2		3/4	1	0	1/4	1/2	
8.º n = 1	Empuxo	III	2344																					
		VI	2335																					
	Momentos fletores	Taboleiro	IV	107	-146	186	-36	-113	-132	-145	190	-291	269	-91	-121	178	-537	-8	25	-48	75	62	-12	-37
			V	108	-146	186	-36	-113	-135	-148	204	-291	269	-91	-121	178	-538	-8	27	-43	72	63	-12	-37
			VI	105	-146	187	-41	-133	-129	-144	185	-293	269	-90	-121	176	-540	-7	24	-48	71	62	-12	-37
	Momentos fletores	Arco	III	156	-98	234	-46	36	8	-130	247	-264	297	-64	-94	205	-329	74	-36	-33	81	67	-8	-33
			IV	205	-49	283	-56	185	149	-115	304	-236	324	-36	-66	233	-122	156	46	-18	88	71	-4	-29
			V	205	-49	283	-56	185	151	-112	290	-236	324	-36	-67	232	-120	156	44	-24	90	71	-4	-29
			VI	202	-49	284	-62	207	151	-114	298	-238	324	-35	-66	231	-126	156	44	-18	84	71	-4	-29
8.º n = 0	Empuxo	III	2734																					
		VI	2762																					
	Momentos fletores	Taboleiro	IV	228	-139	136	-1	-191	-149	-83	327	-497	205	-72	-54	235	-843	0	-11	-12	56	74	1	-24
			V	256	-145	139	-44	-207	-158	-95	381	-485	203	-71	-56	247	-889	-13	8	-10	56	76	1	-24
			VI	281	-154	141	11	-195	-148	-88	349	-492	210	-81	-49	241	-845	2	-13	-10	54	75	1	-24
	Momentos fletores	Arco	III	312	-88	195	-71	-11	-11	-73	427	-461	227	-47	-32	271	-484	35	-14	-5	61	80	5	-20
			IV	397	-37	254	-131	168	127	-64	528	-426	249	-22	-11	307	-126	60	-17	2	65	86	9	-16
			V	369	-31	232	-99	184	136	-52	474	-438	251	-23	-8	295	-120	83	-20	0	65	84	9	-16
			VI	386	-21	244	-157	174	127	-59	503	-420	244	-16	-15	313	-125	85	-14	0	66	85	9	-16
9.º	Empuxo	III	2344																					
		VI	2343																					
	Momentos fletores	Taboleiro	III	28	-18	43	-8	7	1	-24	45	-48	54	-12	-17	37	-60	13	-6	-6	15	7	-1	-3
			IV	20	-27	34	80	-194	-184	19	12	-53	49	-16	-22	32	-422	-120	27	-18	18	6	-1	-4
			V	20	-27	34	80	-194	-175	14	37	-53	49	-16	-22	32	-425	-120	28	-18	13	6	-1	-4
			VI	20	-27	34	80	-194	-183	19	11	-53	49	-16	-22	32	-422	-120	28	-18	18	6	-1	-3
	Momentos fletores	Arco	III	284	-178	426	-83	66	15	-236	450	-479	539	-115	-171	373	-598	135	-75	-61	148	67	-8	-33
			IV	293	-169	435	-172	266	201	-279	482	-474	544	-110	-166	378	-598	135	-99	-49	144	67	-8	-33
			V	293	-169	435	-172	267	205	-274	442	-474	544	-110	-166	378	-598	135	-100	-59	149	67	-8	-33
			VI	292	-169	435	-178	267	203	-278	476	-475	544	-110	-166	378	-598	135	-96	-48	139	67	-8	-34



Exemplo	Caso	P em $\xi =$																$\Delta t \left( \frac{P}{H} = \frac{P}{100 \text{ T}} \right)$					
		1/2				3/8				1/4													
		M em $\xi =$																					
		0	1/4	1/2	0	1/4	1/2	3/4	1	0	1/4	1/2	3/4	1	0	1/4	1/2						
$10^\circ$ $n=1$ $j_t=j_a$	Empuxo	VII	2219	1962				1384				719				128,5							
		VI	2216	1961				1379				703				128,8							
	Momentos fletores	Taboleiro	VII	0 - 137	192	0	-111	-129	-134	0	0	253	-94	-115	0	0	-44	-41	-48	0	0	-7	-34
		VI	0 - 130	193	0	-103	-126	-130	0	0	255	-93	-125	0	0	-49	-35	-76	0	0	-3	-34	
	Arco	VII	216 - 68	295	-101	211	160	-168	-167	344	-336	415	-43	-137	326	-258	302	-71	-87	204	74	-15	-22
		VI	211 - 71	302	-100	207	163	-167	348	-335	413	-45	-130	318	-265	307	-83	-67	184	76	-18	-19	
$10^\circ$ $n=0$ $j_t=j_a$	Empuxo	VII	2475	2082				1275				652				123,0							
		VI	2491	2076				1289				608				128,2							
	Momentos fletores	Taboleiro	VII	0 - 122	154	0	-180	-148	-69	0	0	174	-78	-48	0	0	-60	-27	-20	0	0	8	-20
		VI	0 - 136	155	0	-187	-139	-73	0	0	200	-87	-33	0	0	-31	-33	-26	0	0	6	-21	
	Arco	VII	412 - 75	273	-172	182	149	-127	618	-694	355	-33	-71	511	-572	222	-46	-31	252	97	-4	-10	
		VI	414 - 68	267	-230	180	142	-126	636	-661	346	-27	-76	515	-466	231	-47	-29	273	98	-4	-9	
$10^\circ$ $n=1$ $j_t=10j_a$	Empuxo	VII	2314	1970				1334				766				100,4							
		VI	2323	2003				1328				647				103,6							
	Momentos fletores	Taboleiro	VII	0 - 22	31	0	-177	-182	23	0	0	39	-15	-16	0	0	-207	53	-14	0	0	0	-4
		VI	0 - 22	32	0	-174	-189	24	0	0	37	-15	-16	0	0	-221	50	-23	0	0	0	-4	
	Arco	VII	294 - 173	438	-156	243	213	-278	434	-498	566	-112	-183	400	-367	417	-130	-110	255	68	-9	-32	
		VI	296 - 175	441	-152	237	217	-278	466	-474	567	-113	-182	399	-395	433	-158	-81	223	68	-10	-31	

Para explicação dos casos I a VI, veja-se o rodapé da Tabela II; o caso VII corresponde ao caso V, corrigido, como se indica no texto, para o efeito do não engastamento das extremidades do taboleiro. No exemplo 8.º os momentos do taboleiro no caso III são iguais aos do arco. Também se aplica a esta Tabela o que foi dito no rodapé da Tabela IV.

# LINHAS DE INFLUÊNCIA

--- sem correção ( $= \frac{1}{2}$  arco só)  
 ..... com correção (Tabela I)  
 — exato

Exemplo 8° ( $n=0$ )

Exemplo 10° ( $n=0$ )

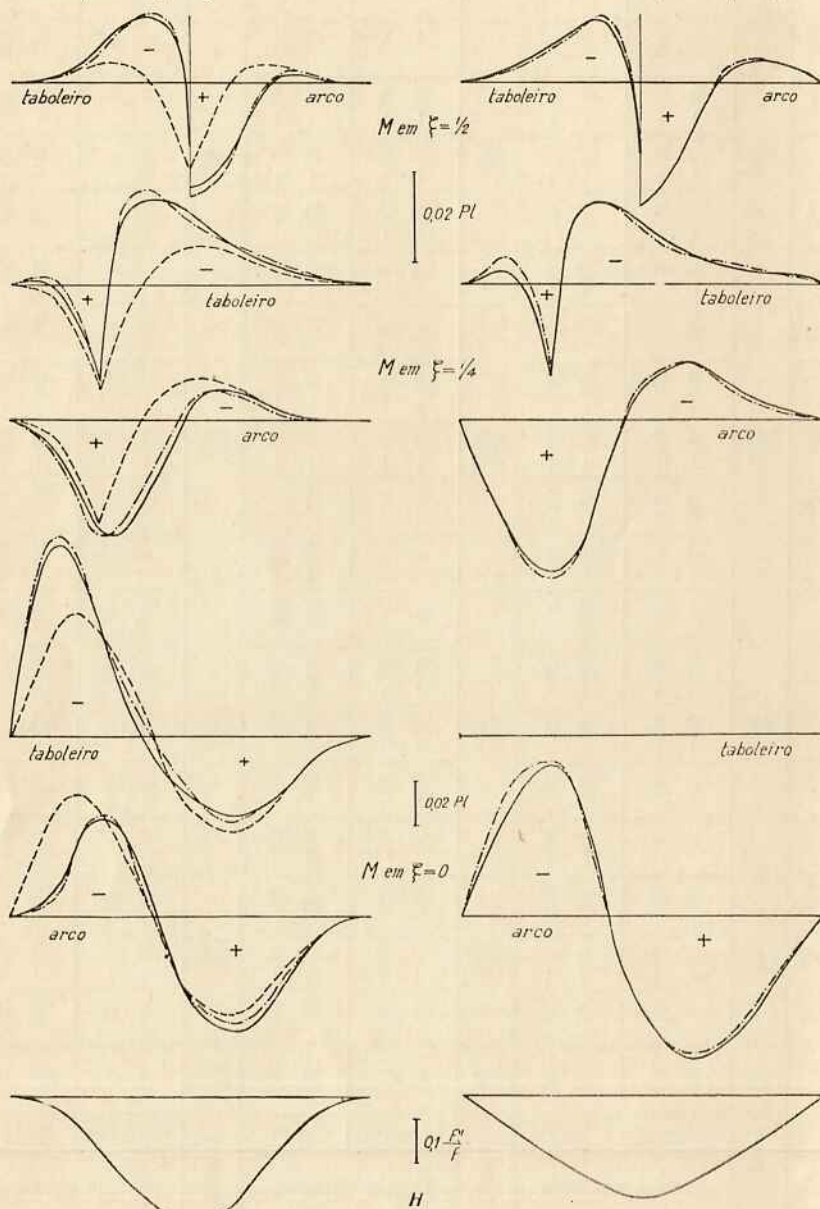


Fig. 9



e no último montantes para substituir o efeito do engastamento sobre os esforços no arco são, pois (visto que  $l = 4l_0$  e  $k' = 0,1$ ):

$$\begin{aligned} -4 (1,5 - 0,04) 0,0080 P &= -0,0467 P \\ -4 (1,5 - 0,04) 0,0037 P &= -0,0216 P. \end{aligned}$$

O efeito dessas forças, aplicadas em  $\xi = 1/4$  e  $\xi = 3/4$ , sobre o arco isolado, deduz-se dos próprios dados do Exemplo 9.º (caso III; o empuxo é o mesmo e os momentos fletores são  $1/k = 1,1$  vez maiores); assim vem:

correção do empuxo (na unidade da tabela):

$$1318 (-0,0467 - 0,0216) = -90 \quad \text{donde} \quad H = 2060 - 90 = 1970$$

correção dos momentos (na unidade da tabela):

$$\begin{aligned} \text{em } \xi = 0: & \quad 1,1 (+ 474 \times 0,0467 - 378 \times 0,0216) = 16 \\ & \quad \text{donde} \quad M = -172 + 16 = -156 \\ \text{em } \xi = 1/4: & \quad 1,1 (- 544 \times 0,0467 + 166 \times 0,0216) = -24 \\ & \quad \text{donde} \quad M = 267 - 24 = 243 \\ \text{em } \xi = 1/2: & \quad 1,1 (+ 110 \times 0,0467 + 110 \times 0,0216) = 8 \\ & \quad \text{donde} \quad M = 205 + 8 = 213 \\ \text{em } \xi = 3/4: & \quad 1,1 (+ 166 \times 0,0467 - 544 \times 0,0216) = -4 \\ & \quad \text{donde} \quad M = -274 - 4 = -278 \\ \text{em } \xi = 1: & \quad 1,1 (- 378 \times 0,0467 + 474 \times 0,0216) = -8 \\ & \quad \text{donde} \quad M = 442 - 8 = 434. \end{aligned}$$

Para o taboleiro, as correções a introduzir são:

$$\begin{aligned} \text{sobre o montante mais próximo:} & \quad (+ 0,22 - 0,15 \times 0,1) M_e = 0,205 M_e \\ \text{sobre o montante central:} & \quad (- 0,07 + 0,1 \times 0,1) M_e = -0,06 M_e \\ \text{sobre o montante mais afastado:} & \quad 0,02 M_e \end{aligned}$$

que levam aos seguintes resultados (na unidade da tabela):

$$\begin{aligned} \text{em } \xi = 1/4: & \quad 0,205 \times 80 + 0,02 \times 37 = 17 \\ & \quad \text{donde} \quad M = -194 + 17 = -177 \\ \text{em } \xi = 1/2: & \quad -0,06 \times 80 - 0,06 \times 37 = -7 \\ & \quad \text{donde} \quad M = -175 - 7 = -182 \\ \text{em } \xi = 3/4: & \quad 0,02 \times 80 + 0,205 \times 37 = 9 \\ & \quad \text{donde} \quad M = 14 + 9 = 23. \end{aligned}$$

#### d) Nota geral.

O cálculo exato de todos os exemplos anteriores foi feito tomando como incógnitas as reações dos montantes, agindo-se como se indicou na figura 1. Como é interessante ver-se a variação desses esforços com os tipos de arco, reunimos na Tabela VI os dados referentes aos exemplos precedentes de

TABELA VI

## Reações dos montantes

Arco parabólico, três montantes,  $j_t = j_0 [1 - (1 - n)(1 - 2\xi)^2]$ ,  $j_a = k' j_t$ 

Carateristicos da estrutura			Reação do 1.º montante								Reação do montante central					
			P = 1000 em $\xi =$								$A_t$	P = 1000 em $\xi =$				$A_t$
Núm. de articulações (*)	n	1/k'	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	$\bar{H}=100 \frac{1}{I}$		1/8	1/4	3/8	1/2	$\bar{H}=100 \frac{1}{I}$
3	1	1	422	656	578	312	234	156	78	0		0	94	344	688	0
			422	656	578	312	234	156	78	0		0	94	344	688	0
		2,5	536	804	625	179	134	89	45	0	-40	54	371	821	0	0
		$\infty$	688	1000	688	0	0	0	0	0	-94	0	406	1000	0	0
2	0	1	412	660	516	227	149	160	99	227	9	124	459	688		187
			409	654	512	224	145	154	92	223	14	132	466	691		191
		$\infty$	656	1000	612	0	-122	0	29	0	-110	0	580	1000		0
	1	1	450	659	490	223	146	159	106	229	-10	129	471	681		186
			450	659	490	223	146	159	106	228	-10	129	471	681		186
		2,5	569	805	523	128	32	91	78	91	-75	74	529	818		74
			569	805	523	128	32	91	78	91	-75	74	529	818		74
		10	677	938	553	41	-72	29	52	23	-133	24	582	942		19
			678	938	553	41	-72	29	52	23	-133	24	582	942		19
		$\infty$	728	1000	567	0	-120	0	40	0	-161	0	607	1000		0
	10	1	539	671	438	211	138	171	138	237	-63	126	490	655		174
			537	672	438	211	138	172	139	238	-62	126	490	655		175
		$\infty$	872	1000	470	0	-129	0	70	0	-277	0	683	1000		0
E	0	1	155	603	601	292	151	103	25	192	7	129	505	764		205
			158	608	588	257	138	108	22	188	4	118	513	780		205
		$\infty$	273	1000	751	0	-149	0	13	0	-39	0	560	1000		0
	1	1	280	631	521	233	137	131	57	199	-3	131	501	733		199
			281	632	523	234	139	132	58	200	-2	132	503	734		200
		2,5	363	790	570	134	21	75	44	80	-42	75	541	848		80
			363	790	570	134	21	75	45	80	-42	75	541	848		80
		10	438	933	614	43	-84	24	32	20	-77	24	577	952		20
			438	933	614	43	-84	24	33	20	-77	24	577	952		20
		$\infty$	473	1000	634	0	-134	0	27	0	-94	0	594	1000		0
	P	1	398	690	524	207	98	102	59	41	-13	129	504	738		225
			399	696	531	210	97	93	42	62	-2	132	503	734		200
	10	1	575	949	587	36	-90	15	37	-2	-110	22	584	955		30
			561	949	590	37	-88	15	28	1	-77	24	577	952		20
		$\infty$	610	1000	598	0	-127	0	35	0	-130	0	601	1000		0
A	0	1	512	809	594	171	3	-4	8	-129	3	128	507	767		212
			529	827	593	156	-6	4	-3	-137	4	118	513	780		205
		$\infty$	656	1000	612	0	-122	0	29	0	-110	0	580	1000		0
	1	1	525	758	532	181	54	63	47	-113	-22	127	507	742		249
			517	760	539	187	55	54	25	-75	-2	132	503	734		200
		2,5	620	873	552	96	-38	15	30	-65	-78	79	559	862		128
			618	879	557	101	-44	21	21	-54	-42	75	541	848		80
		10	697	964	564	30	-95	6	39	-21	-138	21	591	957		39
			684	964	567	32	-91	5	23	-17	-77	24	577	952		20
		$\infty$	728	1000	567	0	-120	0	40	0	-161	0	607	1000		0
	10	1	512	809	594	171	3	-4	8	-129	3	128	507	767		212
			529	827	593	156	-6	4	-3	-137	4	118	513	780		205
		$\infty$	656	1000	612	0	-122	0	29	0	-110	0	580	1000		0

Em cada caso, os números de cima referem-se ao cálculo exato e os de baixo ao cálculo com montantes infinitamente próximos corrigidos com a analogia de viga contínua. Ambos são iguais quando  $1/k' = \infty$ .

(\*) E = arco e taboleiro engastados; P = arco engastado e taboleiro prolongando-se um painel além dos encontros; A = arco engastado e taboleiro livremente apoiado nas extremidades. Nestes dois últimos casos, o processo de correção que completa o anterior é o exposto no texto.



arco parabólico com taboleiro apoiado por meio de três montantes. Acrescentamos ainda alguns casos de relações diferentes entre  $j_t$  e  $j_a$  e o caso de arco engastado, com taboleiro simplesmente apoiado prolongando-se um painel para cada lado da vertical das impostas, pelo qual se vê que é admissível a hipótese formulada anteriormente de que o efeito do não engastamento reduz-se à metade quando há um prolongamento do taboleiro nas condições do exemplo. Linhas, exatas e calculadas, dos momentos fletores oriundos de variações de temperatura, referentes a vários casos, formam reunidas na figura 10.

## 2) LIGAÇÃO CENTRAL RÍGIDA ENTRE TABOLEIRO E ARCO

**EXEMPLO 11.º** — Projetar um arco articulado nas nascentes, com 40 m de vão e 8 m de flecha, suportando um taboleiro que nele se apoia direta e rigidamente nos 16 m centrais e, na parte restante, através de montantes afastados de 4 m. O trem tipo consiste num compressor de 24 t distribuídas sobre dois eixos afastados de 3 m de modo que caibam 10 t para o deanteiro e 14 t para o trazeiro. Deve-se considerar ainda uma variação de temperatura de  $-25^{\circ}\text{C}$  e  $+10^{\circ}\text{C}$ , sabendo-se que o coeficiente de dilatação do material é igual a 0,00001 por  $^{\circ}\text{C}$  e que o seu módulo de elasticidade é 2.100.000 t/m<sup>2</sup>. O peso próprio, que atua sobre o arco antes de ser ele solidário com o taboleiro, deve ser calculado para um peso específico do material igual a 2,4 t/m<sup>3</sup> e acrescido de uma

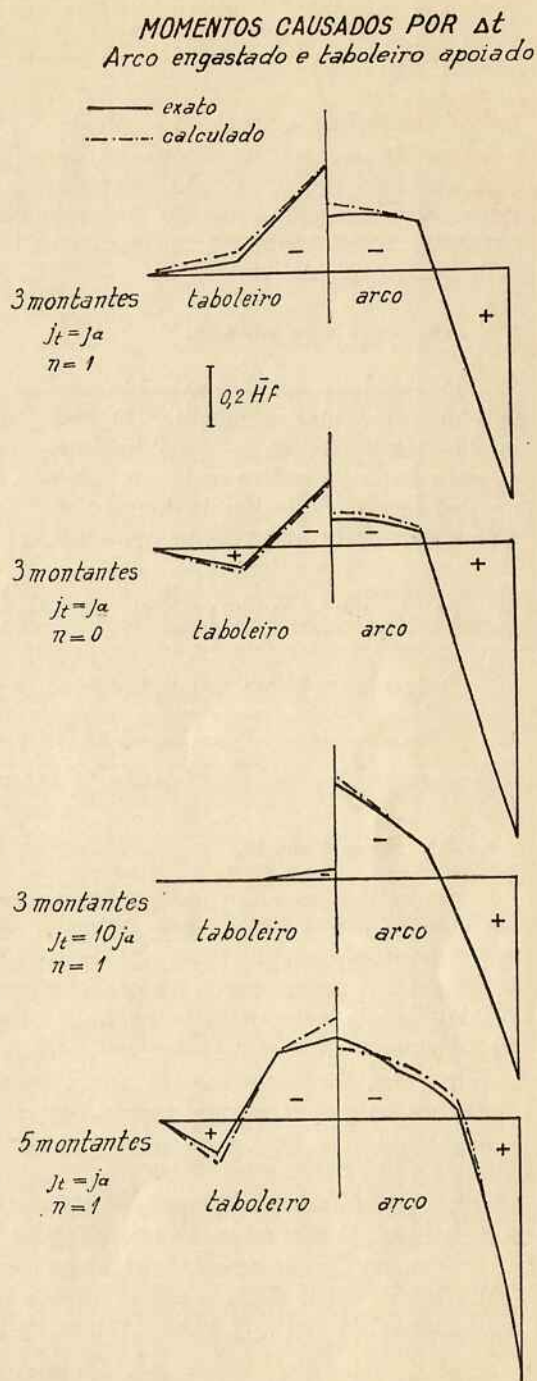


Fig. 10

carga permanente, sobre o taboleiro, de 1 t/m. O material é suposto homogêneo, nele se admitindo, tanto à tração como à compressão, uma tensão de 780 t/m<sup>2</sup>.

Nota: — Para simplificar os cálculos e evitar frequentes repetições na designação das unidades, são adotadas para todas as grandezas do presente exemplo, como unidades, a tonelada, o metro, e suas derivadas.

#### a) Taboleiro isolado.

O taboleiro será construído com secção retangular constante. O momento fletor máximo — considerando-o, para garantia contra os inconvenientes dos recalques desiguais dos apoios, como articulado sobre cada montante — é (fig. 11):

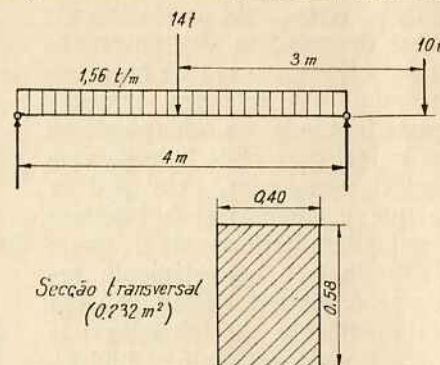


Fig. 11

$$(1 + 2,4 \times 0,232) \frac{16}{8} + 14 \times \frac{4}{4} = 1,56 \times 2 + 14 = 17,1.$$

A tensão máxima é, adotando-se a secção transversal de 0,40 × 0,58:

$$\sigma = \frac{6 \times 17,1}{0,40 \times 0,58^2} = 762 < 780.$$

#### b) Arco isolado.

Se se der ao arco uma secção transversal retangular, variavel de acordo com os esforços que nela atuam, e se se traçar o seu eixo de modo que as cargas permanentes nele não causem momentos fletores, o resultado que se obtém é o representado na primeira metade da figura 14 e na Tabela VII. Nesta Tabela encontram-se os dados mais importantes relativos à marcha de cálculo, conforme passamos a explicar.

Na 1.<sup>a</sup> coluna acham-se as abscissas das secções consideradas, espaçadas de  $\Delta x = 2$  m. Na 2.<sup>a</sup> são dadas as alturas  $h$  das secções (a largura é constante  $b = 0,6$ ) e na 3.<sup>a</sup> o peso próprio  $g$  dos trechos da estrutura (incluídos arco, montantes, taboleiro e carga permanente) limitados pelas verticais das secções. Na 4.<sup>a</sup> coluna encontram-se os momentos  $\Sigma gx$ , em relação à imposta esquerda, dos  $g$  situados à esquerda da secção considerada.

A soma dos  $g$ , igual a 61,5, fornece o peso próprio total da semi-estrutura e o último  $\Sigma gx$  o seu momento em relação à imposta, o qual é igual ao produto da flecha  $f$  pelo empuxo  $H_g$  oriundo do peso próprio; daí:

$$H_g = \frac{580,0}{8} = 72,5.$$



TABELA VII

Exemplo 11.º: Arco isolado

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª	16.ª
x	h	g	$\Sigma gx$	y	$\cos \alpha$	i	$\Sigma iy$	$\Sigma ixy$	$H_i$	$y_i$	$M_c$	$M_g$	$M_{\Delta t}$	$M_{max}$	$\sigma$
0	0,96		0	0						—	—	—	—	—	—
2	0,98	6,74	6,7	1,60	0,778	56,4	0	0	0	—	—	—	—	—	—
4	1,00	6,73	26,9	3,02	0,815	50,6	45	45	0,153	1,47	35,5	9,4	1,0	45,9	479
6	1,02	6,62	60,0	4,26	0,850	45,7	162	396	0,302	2,88	56,8	10,1	2,0	68,9	689
8	1,04	6,54	105,8	5,32	0,885	41,4	328	1228	0,440	4,11	67,0	10,7	2,9	80,6	773
10	1,06	6,49	164,2	6,19	0,917	37,7	527	2616	0,566	5,16	69,1	11,3	3,6	84,0	777
12	1,08	6,42	234,8	6,89	0,943	34,6	744	4568	0,679	6,13	68,4	11,9	4,3	84,6	753
14	1,03	6,57	320,2	7,40	0,969	35,2	970	7057	0,776	6,72	65,7	12,5	4,7	82,9	710
16	0,98	5,76	406,6	7,75	0,985	40,0	1221	10327	0,858	7,23	59,4	12,2	5,1	76,7	723
18	0,93	5,03	492,2	7,94	0,996	45,7	1524	14872	0,921	7,59	52,5	11,8	5,3	69,6	724
20	0,88	4,62	580,0	8,00	0,999	54,1	1883	20967	0,962	7,78	47,1	11,2	5,5	63,8	738
							2314	29159	0,976	7,85	43,8	10,7	5,5	60,0	774

TABELA VIII

Exemplo 11.º: Arco e taboleiro solidários.

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª	16.ª	17.ª	18.ª	19.ª
x	$h_t$	y	$\cos \alpha$	i	$\Sigma ig$	$\Sigma ixy$	$H_i$	$y_i$	$M_{tg}$	$M_{t\Delta t}$	$M_{tc}$	$M_{tmax}$	$M_{tg}$	$M_{i\Delta t}$	$M_{ic}$	$M_{imax}$	$\sigma_t$	$\sigma_a$
0		0			0	0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0,562	1,60	0,778	48,3	39	39	0,155	1,47	1,8	0,2	13,4	15,4	—	—	—	—	705	—
4	0,583	3,02	0,815	43,4	139	339	0,303	2,88	- 2,7	- 0,2	- 4,1	- 7,0	10,1	2,3	50,3	62,7	299	627
6	0,603	4,26	0,850	39,2	282	1053	0,441	4,11	0,8	0,6	16,2	17,6	—	—	—	—	704	—
8	0,623	5,32	0,885	34,6	447	2213	0,565	5,16	- 1,9	- 0,3	- 5,8	- 8,0	11,3	4,1	61,7	77,1	300	713
10	0,643	6,19	0,917	32,3	633	3886	0,674	6,03	1,1	0,8	13,8	15,7	—	—	—	—	556	—
12	0,661	6,89	0,943	29,7	827	6030	0,766	6,72	- 2,2	- 0,4	- 5,7	- 8,3	12,5	5,3	58,2	76,0	278	653
		7,24	0,985	9,2	896	6917	0,846	7,37	—	—	—	—	21,7	6,5	63,5	91,7	—	299
14	—	7,59	0,993	20,1	1051	9240	0,916	7,65	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	—	7,82	0,998	37,1	1343	14213	0,966	7,80	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	7,95	1,000	52,7	1763	22198	0,985	7,85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	—	8,00											10,7	7,3	43,5	61,5	—	794

Na 5.<sup>a</sup> coluna acham-se as ordenadas  $y$  do eixo do arco, obtidas dividindo  $[(61,5 - \Sigma g) x + \Sigma gx]$  por  $H_g$ ; na 6.<sup>a</sup>, o cosseno da inclinação do trecho considerado; e nas três seguintes os valores de  $i = \frac{\Delta x}{J \cos \alpha}$ ,  $\Sigma iy$  e  $\Sigma ixy$ . O cálculo de  $\Sigma iy^2$  para todo o arco foi calculado e achado igual a 29863.

Os empuxos devidos às variações de temperatura de  $+10^\circ\text{C}$  e  $-25^\circ\text{C}$  podem ser agora calculados:

$$H_{10} = \frac{2\,100\,000 \times 0,00001 \times 40 \times 10}{29863} = \frac{840 \times 10}{29863} = 0,2813$$

$$-H_{-25} = \frac{840 \times 25}{29863} = 0,7032.$$

Os empuxos  $H_1$ , devidos a uma carga unitária  $P$ , aplicada no ponto de abscissa  $x$ , também podem ser calculados, dividindo-se  $[(2314 - \Sigma iy) x + \Sigma ixy]$  por 29863. Os resultados são dados na 10.<sup>a</sup> coluna da Tabela. Na 11.<sup>a</sup> encontram-se as ordenadas  $y_i$  das extremidades inferiores dos núcleos centrais (em relação às quais se obtêm, em valor absoluto, os maiores momentos nucleares) e nas quatro seguintes os momentos nucleares devidos respectivamente <sup>(14)</sup>: ao trem tipo na posição mais desfavorável ( $M_e = M_o - H_e y_i$ ), ao peso próprio ( $M_g = H_g y - H_g y_i$ ), à diferença de temperatura ( $M_{\Delta t} = H_{-25} y_i$ ) e o total ( $M_{\max} = M_e + M_g + M_{\Delta t}$ ). Na última coluna acham-se os valores da tensão  $\sigma = \frac{M_{\max}}{W}$ . Na primeira metade da figura 14 são apresentadas a linha de influência para o empuxo (coluna 10.<sup>a</sup>), as linhas dos momentos nucleares (colunas 12.<sup>a</sup> a 15.<sup>a</sup>) e a linha das tensões máximas (coluna 16.<sup>a</sup>).

### c) Arco e taboleiro solidários

Nos itens anteriores foi apresentado o cálculo do arco como é costume fazê-lo, sem consideração da influência do taboleiro. Para levá-la em conta, procede-se de modo diferente. Começa-se por modificar as dimensões do taboleiro de modo a ter-se  $J_t$  proporcional a  $J_a \cos \alpha$ ; acham-se assim as dimensões dadas na 2.<sup>a</sup> coluna da Tabela VIII, das quais se tira  $j_t = 6j_a$ , ou seja,  $k = 6/7$ .

O arco é então calculado como no item anterior, mas como se suas dimensões fossem, na parte em que o taboleiro não se apoia diretamente nele, tais que

(14)  $H_e$  = empuxo devido ao trem tipo, obtido com a linha de influência para  $H_1$ ;  $M_o$  = momento que causaria o trem tipo se o arco fosse uma viga livremente apoiada nas extremidades.



$j = kj_a$ ; e na parte central restante, como se a secção transversal do arco fosse a do conjunto arco + taboleiro (fig. 12). Assim obtêm-se, como no item anterior, as colunas 3.<sup>a</sup> a 9.<sup>a</sup> da Tabela e os seguintes dados:

$$\Sigma iy^2 = 22547$$

$$H_{10} = \frac{840 \times 10}{22547} = 0,3726$$

$$-H_{-25} = \frac{840 \times 25}{22547} = 0,9314.$$

A seguir é preciso fazer-se a correção devida ao afastamento dos montantes, para o que se procede do seguinte modo <sup>(15)</sup>:

Os momentos devidos ao peso próprio não são corrigidos porquê se exercem antes de haver solidariedade entre arco e taboleiro. Eles são, no arco,  $M_{ig} = H_g(y - y_i)$  e, no taboleiro, os calculados como se este fosse uma viga contínua (colunas 10.<sup>a</sup> e 14.<sup>a</sup> da Tab. VIII e 2.<sup>o</sup> diagrama da fig. 13).

Dos momentos devidos à variação de temperatura,  $M_{i\Delta t} = H_{-25}y_i$  na parte central do arco,  $M_{i\Delta t} = kH_{-25}y - H_{-25}(y - y_i)$  nas partes laterais do arco e  $M_{i\Delta t} = (1 - k)H_{-25}y$  no taboleiro <sup>(16)</sup>, só os dois últimos precisam ser corrigidos. A correção se faz transformando a linha dos  $M_{i\Delta t}$  em um polígono cujos vértices, situados em  $x = 4$ ,  $x = 8$  e  $x = 12$ , se afastam da primeira de quantidades iguais aos momentos sobre os apoios de uma viga contínua de três tramos, engastada em uma extremidade e carregada com

$$q = -(1 - k)g \frac{H_{-25}}{H_g}.$$

Usando-se os coeficientes da Tabela I, verifica-se que as correções são quasi desprezíveis:

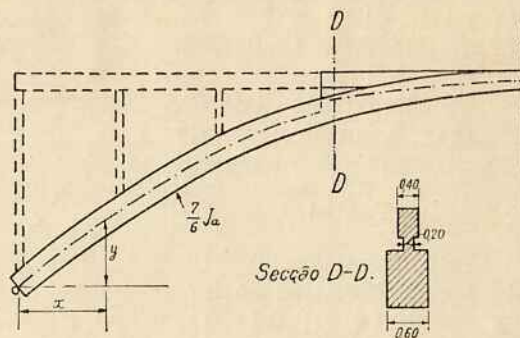


Fig. 12

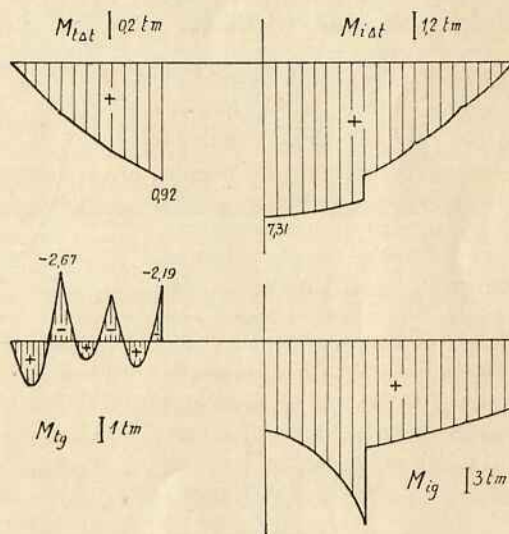


Fig. 13

(15) Mostramos somente o cálculo dos momentos relativos às extremidades inferiores dos núcleos; para os dos relativos às extremidades superiores (que no caso são menores que aqueles) segue-se a mesma marcha, aliás simplificada porquê as correções são as mesmas.

para  $x = 4$ :  
 $\frac{3,33 \times 0,9314}{7 \times 72,5} \times 16 \times 0,105 =$   
 $0,105 \times 3,33 \times 0,0294 = 0,0103$ ,  
 para  $x = 8$ :  
 $0,083 \times 3,26 \times 0,0294 = 0,0079$ ,  
 para  $x = 12$ :  
 $0,083 \times 3,23 \times 0,0294 = 0,0079$ .

Essas correções devem ser aplicadas aos momentos

$M_{t\perp l} = \frac{1}{7} 0,9314 y$ , ou seja, respectivamente, 0,4018; 0,7079 e 0,9168; que se tornam, assim 0,4121; 0,7158 e 0,9247. Nos pontos intermediários,  $x = 2$ ,  $x = 6$  e  $x = 10$ , obtem-se por interpolação: 0,2060; 0,5640 e 0,8202 <sup>(16)</sup>.

Ao arco aplicam-se correções iguais mas com sinal trocado. Os resultados estão reunidos nas colunas 11ª e 15ª da Tabela VIII e no 1.º diagrama da figura 13.

Analogamente são feitas as correções para os momentos das cargas unitárias  $P$  podendo-se então traçar as linhas de influência da figura 15. Aplicando o trem tipo convenientemente sobre essas linhas obtem-se os momentos máximos que eles causam e que são dados nas colunas 12.ª e 16.ª da Tabela VIII. Os momentos máximos totais  $M_{\max}$  são dados nas colunas 13.ª e 17.ª; nas duas últimas colunas encontram-se os valores das tensões

$\sigma = \frac{M_{\max}}{W}$  no taboleiro e no arco, devendo-se notar que, na

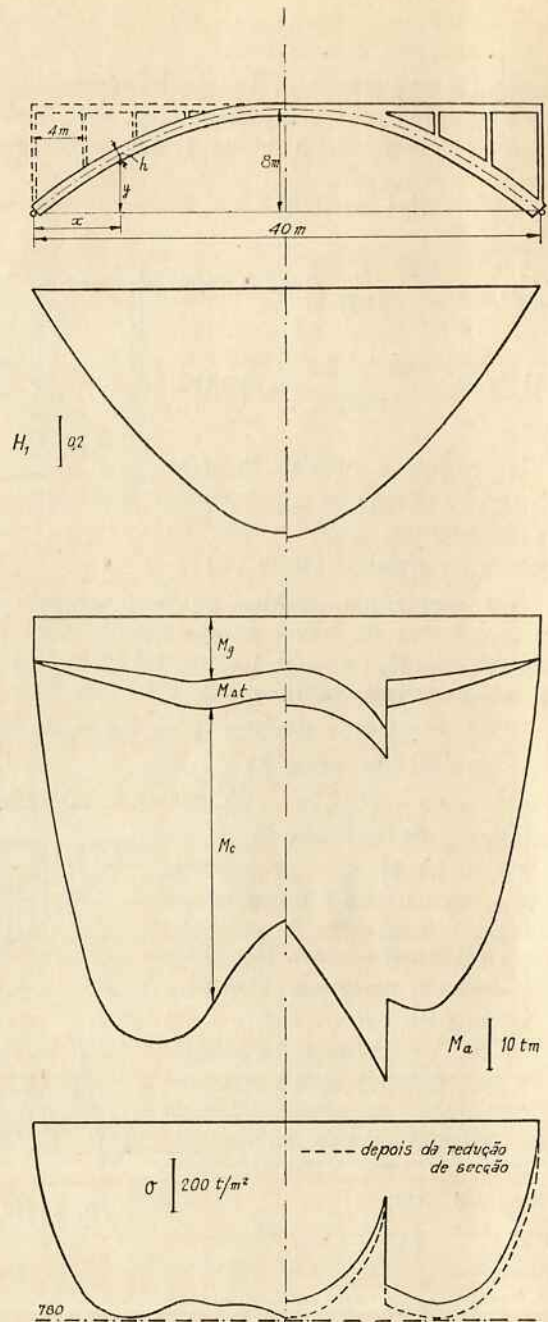


Fig. 14

(16) Às vezes o momento total de maior valor absoluto não é o positivo, e sim o negativo. Deve-se tomar então, no cálculo do efeito da temperatura  $H_{10}$  em vez de  $H_{-25}$ , o que corresponde a multiplicar os resultados anteriores por  $-0,4$ .



parte central deste, os W foram calculados para a secção conjunta arco + taboleiro. A linha de influência para o empuxo (coluna 8.<sup>a</sup>), as linhas dos momentos nucleares (colunas 14.<sup>a</sup> a 17.<sup>a</sup>) e as linhas das tensões máximas (colunas 18.<sup>a</sup> e 19.<sup>a</sup>) acham-se traçadas na segunda metade da fig. 14.

As tensões a que se chega são, no mínimo, 8% menores do que as admissíveis, o que permite reduzir, sem mais cálculos, de 8%, a espessura de toda a estrutura (excetua-se a secção do fecho que precisará ser um pouco aumentada, mas que, por ser uma correção muito local, não alterará essa conclusão). Maior economia ainda poderia ser obtida, mas a custa de novos cálculos, se se procurasse reduzir mais as secções pouco solicitadas. Note-se ainda que da diminuição das dimensões da estrutura decorre um decréscimo dos esforços oriundos do peso próprio e da variação de temperatura, modificação essa fácil de ser considerada e que permite reduzir de mais 2% a espessura da estrutura, que fica assim diminuída de 10%. As tensões máximas finais, antes e depois da redução, serão (tomando para altura de secção do fecho 0,93):

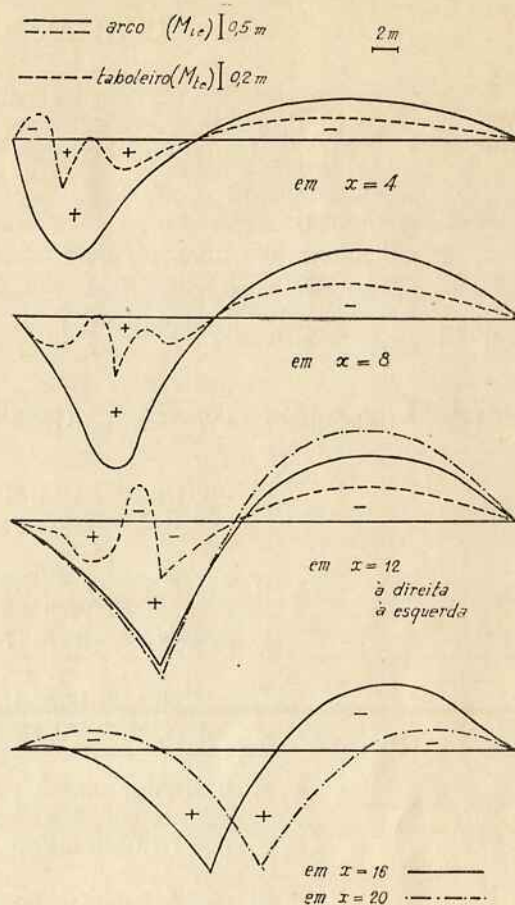


Fig. 15

Secção		Taboleiro			Arco					
		1	3	5	2	4	6 (esq)	6 (dir)	8	10
Carga externa	antes	613	652	489	503	570	500	207	468	503
	depois	681	724	543	559	633	556	230	520	558
Variação de temperatura	antes	10	20	29	23	38	46	21	61	84
	depois	10	20	29	23	38	46	21	61	84
Peso próprio	antes	82	32	38	101	105	107	71	107	123
	depois	88	34	41	105	109	111	74	111	128
Total	antes	705	704	556	627	713	653	299	636	710
	depois	719	778	613	687	780	713	325	692	770
	arco isolado (antes)	.	.	.	689	777	710	710	724	774

## CONCLUSÃO

Visamos, neste trabalho, demonstrar a seguinte tese: É possível, sem grande aumento de dificuldade nos cálculos, considerar-se a contribuição do taboleiro na resistência das pontes em arco.

Parece que colimamos esse objetivo, em face das conclusões obtidas e que aqui resumimos:

a) O cálculo de um arco, no qual se apoia, por meio de pendurais ou montantes articulados e inextensíveis, um taboleiro cujas dimensões sejam tais que  $j_t = \frac{1}{E_t J_t}$  seja proporcional a  $j_a = \frac{1}{E_a J_a \cos \alpha}$ , faz-se como se ele

fosse isolado, notando-se depois que (pondo  $k' = \frac{j_a}{j_t}$  e  $k = \frac{j_t}{j_a + j_t}$ ):

- 1) o efeito das cargas verticais, em relação ao empuxo, não fica alterado;
- 2) o efeito das cargas verticais, em relação aos momentos fletores no eixo do arco, fica reduzido na proporção de  $k:1$ ;
- 3) o efeito de uma variação uniforme de temperatura, em relação ao empuxo, fica multiplicado por  $1/k$ ;
- 4) o efeito de uma variação uniforme de temperatura, em relação aos momentos fletores no eixo do arco, não fica alterado;
- 5) os momentos fletores no taboleiro são iguais aos que se manifestam no eixo do arco (números 2 e 4) multiplicados por  $k'$ .

b) Se os pendurais ou montantes forem muito afastados, os resultados anteriores devem ser corrigidos do seguinte modo:

- 1) as curvas dos momentos no taboleiro ficam substituídas por polígonos, com vértices nas verticais dos montantes, cujas ordenadas são iguais às da curva primitiva corrigida de quantidades iguais aos momentos que se manifestariam nesses pontos se o taboleiro fosse uma viga contínua, sobre apoios fixos, carregada com a seguinte carga:
  - carga realmente aplicada no taboleiro, multiplicada por  $k$ , e
  - carga distribuída proporcionalmente à carga usada na determinação da forma do eixo do arco e de intensidade tal que origine um empuxo igual a  $(1-k)H$



(H é o empuxo definitivo calculado segundo os números 1 ou 3 do item anterior);

- 2) a mesma correção é aplicada, com sinal contrário, aos momentos fletores no eixo do arco; o empuxo não se altera;
- 3) as reações dos montantes correspondem às reações dos apoios da viga contínua calculada com as cargas do número 1.

c) Se o arco for engastado e o taboleiro não o for, nas extremidades, uma nova correção se faz necessária; pode ela ser feita do seguinte modo (pondo  $M_e$  = momento de engastamento calculado para o taboleiro engastado na extremidade,  $l_0$  = distância entre montantes):

- 1) no taboleiro, corrigindo-se as ordenadas dos vértices do polígono dos momentos, nos três montantes mais próximos do ponto em que agiria  $M_e$ , das quantidades:

no 1.º montante:  $(0,22-0,15 k') M_e$

no 2.º montante:  $(-0,07+0,1 k') M_e$

no 3.º montante:  $0,02 M_e$ ;

- 2) no arco, aplicando no montante mais próximo a  $M_e$  uma carga igual a

$$(1,5 - 0,4 k') \frac{M_e}{l_0}$$

e considerando seus efeitos como se o arco fosse isolado.

d) Se o taboleiro tiver uma parte direta e rigidamente ligada ao arco, o cálculo deste se faz considerando-o, nesse trecho, com as dimensões do conjunto arco + taboleiro, e na parte restante, como se suas dimensões fossem  $1/k$  vezes maiores. O empuxo final é o mesmo assim calculado, bem como os momentos no trecho comum ao arco e ao taboleiro; na parte restante, os momentos distribuem-se em duas partes que se obtêm multiplicando-os por  $k$  e  $(1-k)$ , das quais cabe a primeira ao arco e a segunda ao taboleiro. As demais correções, se necessárias, fazem-se como se indicou nos itens b e c.

Doacgo  
PEF

