BT/PEF-8826

# SOBRE A ACELERAÇÃO DO CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO

(*) Nelson Achcar
(**) Paulo Boulos
(*) Assistente
(**) Professor Associado
(recebido em 22/12/88)

# SOBRE A ACELERAÇÃO DO CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO


## RESUMO

A aceleração do centro instantâneo de rotação é normal à base do movimento.

Neste trabalho apresentamos uma demonstração deste teorema usando conceitos da Mecânica do Contínuo.


## I - CONCEITOS E RESULTADOS PRELIMINARES

Definição 1: Seja $B \subset R^3$ um corpo. Um movimento rígido de B é uma aplicação $\phi : B \times R \longrightarrow R^3$ de classe $C^2$ tal que

$$\| \phi(a,t) - \phi(b,t) \| = \| a - b \| \quad \forall a,b \in B \quad , \quad \forall t \in R$$

Notações: $A = \phi(a,t)$ é a posição do ponto $a \in B$ no instante t

$B_t = \{ \phi(a,t) : a \in B \}$ é a posição de B no instante t

Admitiremos $B_0 = B$

Definição 2: A trajetória de B é o conjunto

$$T = \{ (A,t) : A \in B_t \, , \, t \in R \}$$

Definição 3: A descrição material da velocidade é a função $\dot{\phi} : B \times R \rightarrow R^3$ dada por

$$\dot{\phi}(a,t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(a,t)$$

e a descrição material da aceleração é a função

$\ddot{\phi} : B \times R \rightarrow R^3$ dada por

$$\ddot{\phi}(a,t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(a,t)$$

<u>Definição 4</u>: A <u>descrição espacial da velocidade</u> é a função

$$v : T \longrightarrow R^3 \quad \text{dada por}$$

$$v(A,t) = \dot{\phi}(a,t) \quad \text{onde} \quad A = \phi(a,t)$$

e a <u>descrição espacial da aceleração</u> é a função

$$a : T \longrightarrow R^3 \quad \text{dada por}$$

$$a(A,t) = \ddot{\phi}(a,t) \quad \text{onde} \quad A = \phi(a,t)$$

<u>Teorema 1</u> (Poisson): Seja $\phi$ um movimento rígido. Então existe uma função $\omega : R \longrightarrow R^3$ tal que

$$v(A,t) = v(B,t) + \omega(t) \wedge (A - B) \qquad \forall A, B \in B_t \ , \quad \forall t \in R \tag{1}$$

<u>Corolário</u>:

$$a(A,t) = a(B,t) + \dot{\omega}(t) \wedge (A - B) + \omega(t) \wedge (v(A,t) - v(B,t)) \tag{2}$$

<u>Definição 5</u>: Um movimento rígido é <u>plano</u> se existir um plano $\Pi$ que contém 3 pontos não alinhados de $B$ e tal que

$$\phi(a,0) \in \Pi \Longrightarrow \phi(a,t) \in \Pi \qquad \forall a \in B \ , \quad \forall t \in R$$

<u>Notação</u>: $\quad B_\Pi = B \cap \Pi \quad , \quad B_{\Pi,t} = B_t \cap \Pi$

Teorema 2: Seja $\phi$ um movimento rígido plano tal que $\omega(t) \neq 0$. Então existe um único ponto $c_t \in B$ tal que

$$v(C_t, t) = 0 \tag{3}$$

onde $C_t = \phi(c_t, t)$

Definição 6: O ponto $C_t$ do teorema 2 é chamado centro instantâneo de rotação (CIR) de $B_{\pi,t}$.

Definição 7: Suponhamos $\omega(t) \neq 0$ para todo $t \in R$. A base do movimento de B no plano $\pi$ é o traço da curva

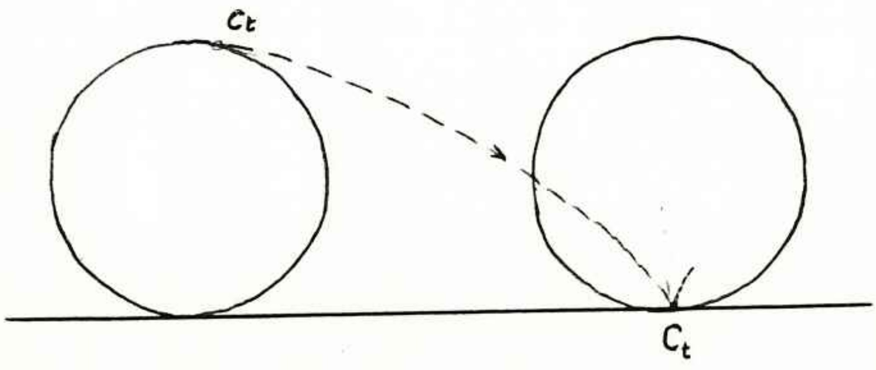
$$\begin{aligned} R &\longrightarrow R^3 \\ t &\longmapsto P(t) = C_t \end{aligned}$$

Notação: Indicaremos por $V(t)$ o vetor

$$V(t) = \frac{d}{d\tau} P(\tau) \Big|_{\tau=t} = \frac{d}{d\tau} \phi(c_\tau, \tau) \Big|_{\tau=t}$$

Portanto, $V(t)$ é tangente à base em $P(t)$.

Exemplo: Um disco rola sem escorregar sobre uma reta




$B_o = B$ $\qquad\qquad$ $B_t$

Atenção: $v(C_t, t) = \dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}(x, \tau) \Big|_{\substack{x=c_t \\ \tau=t}} \neq V(t) = \dfrac{d}{d\tau}(c_\tau, \tau) \Big|_{\tau=t}$

## II - O RESULTADO PRINCIPAL

Teorema 3: Seja $\phi$ um movimento rígido plano tal que $\omega(t) \neq 0$ para todo $t \in R$. Então

$$a(C_t,t) \perp V(t) \qquad \forall t \in R$$

Demonstração: Sejam $o \in B_\pi$ e $O = \phi(o,t)$. Então, por (2):

$$a(C_t,t) = a(O,t) + \dot{\omega}(t) \wedge (C_t - O) + \omega(t) \wedge (v(C_t,t) - v(O,t)) \qquad (4)$$

e, por (1)

$$v(O,t) = v(C_t,t) + \omega(t) \wedge (O - C_t) = \omega(t) \wedge (O - C_t) \quad (\text{por } (3)).$$

usando a definição 4 segue:

$$\dot{\phi}(o,t) = \omega(t) \wedge (\phi(o,t) - \phi(c_t,t))$$

como $a(O,t) = \ddot{\phi}(o,t) = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \tau}(x,\tau) \Big|_{\substack{\tau=t \\ x=o}}$, (definições 4 e 3), então

$$a(O,t) = \dot{\omega}(t) \wedge (\phi(o,t) - \phi(c_t,t)) + \omega(t) \wedge \left(\dot{\phi}(o,t) - \frac{d}{d\tau} \phi(c_\tau,\tau) \Big|_{\tau=t}\right)$$

logo

$$a(O,t) = \dot{\omega}(t) \wedge (O - C_t) + \omega(t) \wedge (v(O,t) - V(t)) \qquad (5)$$

levando (3) e (5) em (4) segue

$$a(C_t,t) = -\omega(t) \wedge V(t)$$

logo

$$a(C_t,t) \perp V(t)$$

# BIBLIOGRAFIA

GURTIN, M.E. An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press. New York, 1981.