

GRUPOS DE HOMOLOGIA SINGULAR DE GRAFOS CONEXOS

Luciano Silva

Orientadora: Lucília Daruiz Borsari

Departamento de Matemática Pura, IME-USP

Várias derivações de propriedades de espaços topológicos são obtidas através de características de grupos associados a tais espaços. Neste contexto estão inseridos os grupos de homologia. Existem várias teorias de homologia, mas todas partem de uma construção básica: considere uma seqüência infinita de grupos abelianos e homomorfismos

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

satisfazendo $\partial_{q-1}\partial_q = 0, \forall q \geq 1$. Esta seqüência é chamada *complexo de cadeias*, denotada por C_* . Temos que $Ker(\partial_q) = \{c \in C_q | \partial_q(c) = 0\}$ e $Im(\partial_{q+1}) = \{c \in C_q | c = \partial_{q+1}(u)\}$ são subgrupos de C_q e $Im(\partial_{q+1}) \subset Ker(\partial_q)$. Definimos o q -ésimo grupo de homologia de C_* pelo grupo quociente $H_q(C_*) = Ker(\partial_q)/Im(\partial_{q+1})$.

A diferença básica entre as várias teorias de homologia reside no fato de como são construídos os grupos abelianos C_q e os homomorfismos ∂_q . Desenvolveremos os princípios básicos da Teoria Singular em espaços topológicos X , onde construiremos módulos de cadeias de X como combinações lineares formais de simplexes singulares em X , com coeficientes num anel abeliano com unidade R . Os homomorfismos serão extensões lineares do operador de borda destes simplexes aos módulos de cadeias.

Dentre os objetos topológicos, as variedades de dimensão 2 ou superfícies têm estabelecido uma forte ligação com a Teoria de Grafos. Questões de separabilidade de superfícies por grafos funcionando como subcomplexos utilizam constantemente grupos de homologia associados a estes grafos. Como uma introdução a estas questões, discutiremos o cálculo dos grupos de homologia singular de grafos conexos, com o resultado:

Teorema: Seja G um grafo conexo. Então os grupos de homologia singular de G são dados por:

$$H_q(G; R) = \begin{cases} \simeq R \oplus \dots \oplus R \oplus R(\text{vezes}), & \text{se } q=1; \\ 0, & \text{se } q>1. \end{cases}$$

Ressaltamos que este resultado pode ser estendido para grafos G não conexos: calculamos os grupos de homologia para cada componente conexa G_k de G e podemos provar a existência de um isomorfismo canônico

$$H_q(G; R) \simeq \bigoplus_k H_q(G_k; R).$$

Referências

- [1] Artin, E., Braun, H., *Introduction to algebraic topology*, Charles E. Merrill Publishing Co., Ohio 1969.
- [2] Gblin, P.J., *Graphs, Surfaces and Homology*, Chapman and Hall Ltd., New York 1981.
- [3] Greenberg, M.J., Harper, J.R., *Algebraic topology: a first course*, The Benjamin Cumming Publishing Co., Massachusetts 1981.
- [4] Massey, W.S., *Singular homology theory*, Springer Verlag, New York 1980.