CATEGORIAS VECTORESPACIAIS E FORMAS QUADRÁTICAS FORTEMENTE INDEFINIDAS

Alegria Gladys Chalom de Oliveira

Resumo

Seja k um corpo algebricamente fechado e seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita sobre k, básica e conexa. Podemos então supor que $\Lambda \cong kQ/I$, onde Q é um quiver conexo e I um ideal admissível.

Queremos estudar a categoria $\Lambda - mod$ dos módulos finitamente gerados à esquerda. Sabemos pelo teorema de Drozd, que essas álgebras se separam em duas classes disjuntas: as mansas e as selvagens. Porém, dada uma álgebra arbitrária, é , em geral, muito difícil decidir se ela é mansa ou selvagem.

Um fato importante é que se a álgebra é mansa a forma quadrática de Tits é fracamente não negativa (de la Peña).

O propósito deste trabalho é provar que, para certas categorias vectorespaciais selvagens, $\mathcal{U}$ $(M, \Lambda - mod)$ inteiramente contidas em componentes dirigidas de tipo árvore teremos a forma quadrática de Tits $q_{\Lambda[M]}$ fortemente indefinida (i.e. $q_{\Lambda[M]}(z) \leq 0$ para algum vetor $z \in N^{Q_0}$).

Este trabalho é parte da tese de doutoramento sob a orientação do Prof. Dr. Hector Merklen. Agradeço ao Prof. Hector a orientação e o incentivo sem os quais este trabalho não seria possível.

1 Preliminares

Definição 1.1 Λ é mansa se para todo natural $d \in N$, existe uma família finita M_1, M_2, $\ldots$, $M_{s(d)}$ de $\Lambda - k[t]$-bimódulos, livres de posto finito sobre $k[t]$ e tais que para quase todo Λ-módulo M indecomponível de dimensão d, M é da forma: $M \cong M_i \otimes_{k[t]} S_\alpha$, onde S_α é um $k[t]$-módulo simples.

Definição 1.2 Λ é selvagem se existe M um $\Lambda - k < x, y >$-bimódulo, livre de posto finito sobre $k < x, y >$, tal que o funtor

$$F := M \otimes_{k\langle x,y\rangle} — \; : k\langle x, y\rangle - mod \to \Lambda - mod$$

preserva indecomponíveis e reflete isomorfismos.

Teorema 1.3 (Drozd) Se Λ é uma k-álgebra de dimensão finita, então Λ é mansa ou selvagem, mas não simultaneamente.

Associadas a Λ, podemos definir duas formas quadráticas.

Definição 1.4 Seja C_Λ a matriz de Cartan de Λ (que é inversível pois $gldim\Lambda$ é finita) e sejam x e y vetores no grupo de Grothendieck $\mathbb{K}_0(\Lambda)$ de Λ. Então temos a forma bilinear (em geral não simétrica) $< x, y >= xC_\Lambda^{-T}y^T$ e a correspondente forma quadrática (de Euler) $\chi_\Lambda(x) =< x, x >$.

A forma bilinear $<,>$ tem a seguinte interpretação homológica.

Lema 1.5 (Ringel) $<\underline{dim}X, \underline{dim}Y> = \sum_{t\geq 0}(-1)^t dim_k Ext^t_\Lambda(X,Y)$.

Definição 1.6 Sabemos por outro lado, que a forma de Tits é dada por:
$q_\Lambda(x_1, x_2, ..., x_l) = \sum_{i\in Q_0} x_i^2 - \sum_{i,j\in Q_0} x_i.x_j.dim_k Ext^1_\Lambda(S_i, S_j) + \sum_{i,j\in Q_0} x_i.x_j.dim_k Ext^2_\Lambda(S_i, S_j)$

Teorema 1.7 (Bongarzt) Para Λ com $gldim\Lambda \leq 2$ temos $\chi_\Lambda = q_\Lambda$.

Teorema 1.8 (de la Peña) Se Λ é uma álgebra mansa então q_Λ é fracamente não negativa (isto é, $q_\Lambda(z) \geq 0$, para z vetor de coordenadas não negativas).

A recíproca do teorema 1.8 é válida nos seguintes casos:
1. Λ é hereditária (Dlab e Ringel),
2. Λ é inclinada (Kerner),
3. Λ é quase-inclinada (Skowronski),
4. Λ é extensão por um ponto de uma álgebra mansa oculta, livre de $\tilde{A}_n$ (de la Peña).

Existem duas conjeturas já famosas:
Conjetura 1 (Skowronski) vale para Λ fortemente simplesmente conexa (Λ é fortemente simplesmente conexa se toda subcategoria plena convexa tem a propriedade de separação).
Conjetura 2 (de la Peña) vale para Λ boa álgebra (Λ é boa álgebra se Λ é Schurian, tem a propriedade de separação e é livre de $\tilde{A}_n$).

2 Categorias Vectorespaciais

Definição 2.1 Uma categoria vectorespacial $\mathbb{K}$ é uma k-categoria (onde vamos supor que idempotentes cindem) aditiva, com um funtor fiel $|\ |: \mathbb{K} \to mod\ k$. Em particular $\mathbb{K}(X,Y) \subset Hom(|X|, |Y|)$.

Definimos a categoria $\mathcal{U}(\mathbb{K})$ de subespaços de $\mathbb{K}$, como sendo a categoria cujos objetos são dados por ternas: (X, U, φ), com $X \in \mathbb{K}$, $U \in$k-mod e $\varphi : U \to |X|$ k-linear. Os morfismos $(X, U, \varphi) \to (X', U', \varphi')$ são dados por um par (α, β) com $\alpha : U \to U'$ linear e $\beta : X \to X'$ em $\mathbb{K}$ e tal que o seguinte quadrado comuta:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & |X| \\ \alpha\downarrow & & \downarrow|\beta| \\ U' & \xrightarrow{\varphi'} & |X'| \end{array}$$

Claramente, todo objeto de $\mathcal{U}(\mathbb{K})$ é isomorfo a uma soma direta de uma terna (X, U, φ), com φ injetora e várias cópias de $(0, k, 0)$.

A categoria vectorespacial $\mathbb{K}$ é dita Schurian se $End_{\mathbb{K}}(X) \cong k$.

Definimos uma relação $\leq$ em $ind\mathbb{K}$, dada por $X \leq Y$ se e só se $\mathbb{K}(Y, X) \neq 0$ (esta relação não é transitiva em geral).

Se para todo $X \in ind\mathbb{K}$, tem-se $dim_k|X| \leq 1$, então $\mathbb{K}$ é um conjunto parcialmente ordenado e vale o importante teorema seguinte.

Teorema 2.2 (Nazarova) Seja $\mathbb{K}$ um poset. Então $\mathcal{U}(\mathbb{K})$ é mansa se e só se $\mathbb{K}$ não contém como subcategoria plena um dos posets da lista: $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$, $(N,5)$. Além disso, se $\mathbb{K}$ não é mansa então $\mathbb{K}$ é selvagem.

No caso em que $\mathbb{K}$ não é um conjunto parcialmente ordenado, a caracterização de categorias mansas ainda é um problema em aberto. Porém temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3 (Ringel) Seja $\mathbb{K}$ uma categoria vectorespacial e suponha que $\mathbb{K}$ contém como subcategoria plena uma das subcategorias abaixo:

1. $\{X\}$ com $dim_k|X| \geq 3$.
2. $\{X, Y\}$ com $dim_k|X| = 2$, $dim_k|Y| \leq 2$ e $Hom_{\mathbb{K}}(X,Y) = Hom_{\mathbb{K}}(Y,X) = 0$.
3. $\{X, Y\}$ com $dim_k|X| = 2$, $dim_k|Y| = 2$ e $dim_k Hom_{\mathbb{K}}(X,Y) = dim_k Hom_{\mathbb{K}}(Y,X) = 1$.

Então $\mathbb{K}$ é selvagem.

3 Extensões por um ponto

Definição 3.1 Sejam B uma k-álgebra e M um B-módulo. Chama-se extensão de B por M a álgebra

$$\Lambda = B[M] = \begin{pmatrix} B & M \\ O & k \end{pmatrix}$$

com as operações usuais de matrizes.

Podemos identificar os $B[M]$-módulos às ternas da forma (X, V, φ) onde V é um k-espaço vetorial, X um B-módulo e $\varphi : V \to Hom(M, X)$ é k-linear. Os correspondentes morfismos são identificados de forma óbvia.

Observações

1. Se $gldimB \leq n$ então $gldimB[M] \leq n+1$.
2. $B - mod$ é subcategoria plena, convexa e fechada por extensões de $B[M] - mod$.
3. O tipo de representação de $B[M]$ depende do tipo de representação de B e do tipo de representação da categoria de subespaços $\mathcal{U}$ $(Hom(M, B - mod))$.
4. Suponha $\overline{X}$ um $B[M]$-módulo, $\overline{X} = (X, V, \varphi)$. Então $\underline{dim}\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0) + x_{n+1}.(0, 0, ..., 1) = \underline{dim}X + x_{n+1}.\underline{dim}S_{n+1}$.

Proposição 3.2 Sejam B uma k-álgebra com $gldimB \leq 2$ e M um B-módulo. Com a notação acima, temos $\chi_{B[M]}(\underline{dim}\overline{X}) = q_{B[M]}(\underline{dim}\overline{X}) - x_{n+1}.dim_k Ext^2_B(M, X)$

4 Categorias Imersas em Componentes Dirigidas

Seja B uma álgebra sem circuitos orientados. Seja $\mathbb{K} = Hom(M, B - mod)$, onde M é um módulo indecomponível pertencente a uma componente dirigida e standard $\mathcal{C}$ do quiver de Auslander-Reiten de B, que contém injetivos e tal que $\mathbb{K} = Hom(M, B-mod) = Hom(M, \mathcal{C})$ é finita. Se B é uma álgebra inclinada e $\mathcal{C}$ é a componente de conexão ou é uma componente preinjetiva definimos:

Definição 4.1 Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma componente de tipo árvore se seu quiver-órbita (isto é o quiver das órbitas dos injetivos se $\mathcal{C}$ é preinjetiva ou o quiver das órbitas da fatia completa se $\mathcal{C}$ é a componente de conexão) é uma árvore.

Definição 4.2 Dois conjuntos L e L' de $ind\mathbb{K}$ são chamados de caminho-incomparáveis se para todo $|X| \in L$ e $|Y| \in L'$ não existe caminho em $\mathcal{C}$ entre X e Y.

Temos então o seguinte teorema.

Teorema 4.3 (Marmaridis) Seja $\mathcal{C}$ uma componente preinjetiva de tipo árvore. Suponha que $ind\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena L da forma: $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$, $(N,5)$, $\{X\}$ com $dim_k|X| \geq 3$, $\{X,Y\}$ com $dim_k|X| = 2$, $dim_k|Y| \leq 2$ e $Hom_{\mathbb{K}}(X,Y) = Hom_{\mathbb{K}}(Y,X) = 0$. Suponha também que as componentes conexas de L são caminho-incomparáveis. Então a forma de Euler $\chi_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Proposição 4.4 Sejam B uma álgebra inclinada mansa e M um B-módulo indecomponível em $\mathcal{C}$ onde $\mathcal{C}$ é uma componente dirigida e standard de tipo árvore do quiver de Auslander-Reiten de B, que contém injetivos e tal que $\mathbb{K} = Hom(M, B-mod) = Hom(M,\mathcal{C})$ é finita. Suponha que $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena L da lista acima e as componentes conexas de L são caminho-incomparáveis. Então a forma de Tits $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Além disso temos o seguinte resultado:

Teorema 4.5 (de la Peña, Marmaridis) Sejam B uma álgebra mansa e M um módulo relativamente preinjetivo (isto é, M é um módulo preinjetivo sobre a subálgebra convexa $B_s(M)$ de B) de tipo árvore. Suponha que $dim_k Hom_B(M,N) \leq 1$ para todo $N \in \Gamma_B$. Então $B[M]$ é mansa se e só se a forma de Tits $q_{B[M]}$ é fracamente não negativa.

Algumas observações sobre os teoremas acima:

1. No artigo [4] os autores provam o teorema 4.5 também para módulos decomponíveis com certas condições sobre a categoria vectorespacial.

2. De qualquer modo as categorias do teorema 4.5 são todas de tipo posets, mas não há restrição quanto à dimensão global de B nem à hipótese de caminho-incomparabilidade.

3. São conhecidas outras categorias selvagens que não constam da lista dada no teorema 4.3.

4. No teorema que veremos abaixo perdemos os posets novamente (a menos é claro que eles sejam caminho incomparáveis).

5. Se B é uma álgebra inclinada mansa e M é um módulo dirigido tal que $\mathbb{K} = Hom(M, B-mod)$ é infinita então $B[M]$ é selvagem e a forma de Tits $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Teorema 4.6 Sejam B uma álgebra inclinada mansa e M um módulo indecomponível em $\mathcal{C}$ onde $\mathcal{C}$ é uma componente dirigida e standard de tipo árvore do quiver de Auslander-Reiten de B, que contém injetivos e tal que $\mathbb{K} = Hom(M, B-mod) = Hom(M,\mathcal{C})$ é finita. Suponha que $\mathbb{K}$ contém uma subcategoria plena da lista abaixo :

1. $\{X\}$ com $dim_k|X| \geq 3$.
2. $\{X,Y\}$ com $dim_k|X| = 2$, $dim_k|Y| \leq 2$ e $Hom_{\mathbb{K}}(X,Y) = Hom_{\mathbb{K}}(Y,X) = 0$.
3. $\{X,Y\}$ com $dim_k|X| = 2$, $dim_k|Y| = 2$ e $dim_k Hom_{\mathbb{K}}(X,Y) = dim_k Hom_{\mathbb{K}}(Y,X) = 1$.

Então a forma de Tits $q_{B[M]}$ é fortemente indefinida.

Mais um pouco de observações:

1. A demonstração do teorema acima é feita por indução no comprimento dos caminhos em C entre X e Y e a fórmula dada pela proposição 3.2.

2. Exemplos mostram que não podemos omitir a hipótese de tipo árvore.

3. Mesmo que B seja fortemente simplesmente conexa e M indecomponível nem sempre teremos $B[M]$ fortemente simplesmente conexa.

4. Infelizmente ainda estamos muito longe de provar que se $B[M]$ é selvagem então temos a correspondente forma quadrática fortemente indefinida.

Referências

[1] K. Bongartz, *Algebras and quadratic forms*, J. London Math. Soc.(2) 28 (1983), 461–469.

[2] W. W. Crawley-Boevey, *On Tame algebras and Bocses*, Proc. London Math. Soc. (3) 56 (1988), 451–483.

[3] N. Marmaridis, *Strongly Indefinite Quadratic Forms and Wild Algebras*, Topics in Algebra, Banach Center Publ. vol. 26 (1990), 341–351.

[4] N. Marmaridis, J. A. de la Peña, *Quadratic Forms and Preinjective Modules*, J. Algebra 134 (1990), 326–343.

[5] J. A. de la Peña, *On the Representation Type of One Point Extensions of Tame Concelead Algebras*, Manuscr. Math. 61 (1988), 183–194.

[6] C. M. Ringel, *Tame Algebras - on Algorithms for Solving Vector Space Problems II*, Lect. Notes Math. 831 (1980), 137–287.

Alegria Gladys Chalom de Oliveira
Departamento de Matemática - IME
Universidade de São Paulo
CEP 05317-970, São Paulo, SP, Brasil
E-mail: agchalom@ime.usp.br