# DISCRIMINAÇÃO DE RAÍZES

TON MARAR

## 1. Introdução

Encontrar os zeros de um polinômio de uma variável com coeficientes reais $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, ou em outras palavras, encontrar as raízes de uma equação algébrica $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ é um problema clássico da matemática[1]. O teorema fundamental da álgebra estabelece que polinômios de grau $n$ possuem $n$ raízes[2]. Sob certas condições sobre os coeficientes pode-se garantir, por exemplo, que tais raízes são raízes reais e distintas.

O caso das equações algébricas do segundo grau é bem conhecido. As duas raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, dependem do valor $\Delta = b^2-4ac$; ou seja, os coeficientes da equação verificam a desigualdade $\Delta > 0$ se, e somente se, as duas raízes são reais simples. Quando $\Delta = 0$ temos uma única raiz dupla; isto é, uma raiz com multiplicidade 2.

No caso das equações de grau maior que 2, a discriminação entre raízes reais e complexas e a obtenção das multiplicidades das raízes através de condições sobre os coeficientes não é tão trivial.

Iniciaremos com a análise de um exemplo de uma equação do quarto grau. Em seguida trataremos do caso geral das equações do terceiro e quarto graus.

À classificação das raízes em reais e complexas (i.e. parte imaginária não nula) e a determinação da multiplicidade corresponde uma subdivisão do espaço dos coeficientes (estratificação). Quem determina tal subdivisão é um conjunto do espaço dos coeficientes da equação denominado *discriminante*, ou popularmente conhecido como o delta da equação. Descreveremos tal estratificação no caso geral das equações de grau $n$.

Faremos uma análise detalhada das equações de grau quatro $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Este caso é bastante rico em número de estratos; isto é, em número de possíveis tipos de raízes.

Veremos também como o número de estratos está relacionado ao número de possíveis partições do grau $n$ da equação e que este cresce exponencialmente com $n$, provocando assim uma dificuldade imensa no estudo do caso geral. Finalizamos com um exemplo de uma equação do quinto grau.

[1] O registro mais antigos do tratamento deste tipo de problema, particularmente no caso $n = 2$, é atribuido ao matemático Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, que viveu em Bagdá no século VIII. Foi ele quem introduziu a palavra algebra e é do sobrenome dele que deriva a palavra algarismo.

[2] Gauss, em sua tese de doutorado [G], apresenta a primeira demonstração do teorema fundamental, baseado em idéias de Euler.

## 2. Um exemplo

Considere a equação do quarto grau

$$x^4 - x^2 + bx + c = 0$$

Sabemos do teorema fundamental da algebra que esta equação possui 4 raízes. Dependendo dos valores dos coeficientes $b$ e $c$ algumas das raízes podem ser reais e outras complexas. Em particular, para certos valores de $b$ e $c$ podemos ter apenas raízes reais. Neste caso, podem ocorrer:
(i) quatro raízes distintas, ditas raízes simples.
(ii) duas raízes simples e uma raiz dupla; isto é, de multiplicidade 2.
(iii) duas raízes duplas distintas.
(iv) uma raiz simples e uma outra de multiplicidade 3.

Para este exemplo, a relação entre os coeficientes $b$ e $c$ que fornece informações sobre os diferentes tipos de raízes é $\Delta = 4b^2 - 27b^4 + 16c - 128c^2 - 144b^2c + 256c^3$, como demonstraremos em breve.

A curva algébrica $\Delta = 0$ (Figura 1) divide o plano de coordenadas $b$ e $c$ em três componentes conexas.

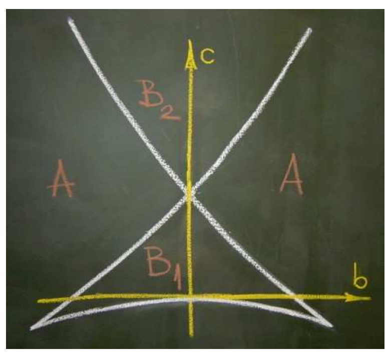


Figura 1

Vamos denominar essas regiões como:
*região A*$= \{(b,c) : \Delta < 0\}$, a região "externa" à curva $\Delta = 0$
*região B*$= \{(b,c) : \Delta > 0\}$, a região "interna" à curva $\Delta = 0$
Subdividimos a *região B* em duas:
*região* $B_1$ é a componente limitada da *região B* e
*região* $B_2$ é a componente não limitada da *região B*.

Aos coeficientes $b$ e $c$ da *região A* correspondem as equações $x^4 - x^2 + bx + c = 0$ que possuem duas raízes reais simples e duas complexas.

Aos coeficientes $b$ e $c$ da *região* $B_1$ correspondem as equações $x^4 - x^2 + bx + c = 0$ que possuem quatro raízes reais simples.

Aos coeficientes $b$ e $c$ da *região* $B_2$ correspondem as equações $x^4 - x^2 + bx + c = 0$ que possuem quatro raízes complexas simples.

Aos coeficientes $b$ e $c$ sobre a curva $\Delta = 0$ correspondem três tipos de equações do quarto grau $x^4 - x^2 + bx + c = 0$. O primeiro tipo corresponde ao ponto de auto-interseção da curva $\Delta = 0$; isto é, $b = 0$ e $c = \frac{1}{4}$. Neste caso, a equação do quarto grau correspondente é $(x^2 - \frac{1}{2})^2 = 0$; ou seja, temos duas raízes reais duplas. Para os valores de $b$ e $c$ que são as coordenadas dos dois pontos cuspidais da curva $\Delta = 0$ correspondem equações com duas raízes reais sendo uma raiz simples e uma de multiplicidade 3. Aos pontos dos arcos da curva $\Delta = 0$ entre os pontos cuspidais e entre esses e o ponto de auto-interseção correspondem equações $x^4 - x^2 + bx + c = 0$ que possuem três raízes reais sendo uma raiz real de multiplicidade 2 e duas raízes reais simples. Finalmente, aos pontos dos arcos da curva $\Delta = 0$ que partem do ponto de auto-interseção correspondem as equações que possuem uma raiz real de multiplicidade 2 e duas raízes complexas. Em outras palavras, podemos ter $x^4 - x^2 + bx + c = (x - x_0)^2(x - (u + iv)(x - (u - iv))$, com $v \neq 0$. De fato, expandindo o lado direito da igualdade e comparando os coeficientes de cada lado obtemos: $-2x_0 - 2u = 0$ (coeficiente de $x^3$), $-2u^2 + v^2 = -1$ (coeficiente de $x^2$), $2uv^2 = b$ e $u^4 + u^2v^2 = c$. Por exemplo, quando $b = c = 2$, $\Delta = 0$ e a equação $x^4 - x^2 + 2x + 2 = 0$ possui as raízes $1 + i$, $1 - i$ além da raiz $-1$ de multiplicidade 2.

Na Figura 2 são indicados os diversos tipos de equações nas diferentes regiões e partes da curva $\Delta = 0$.

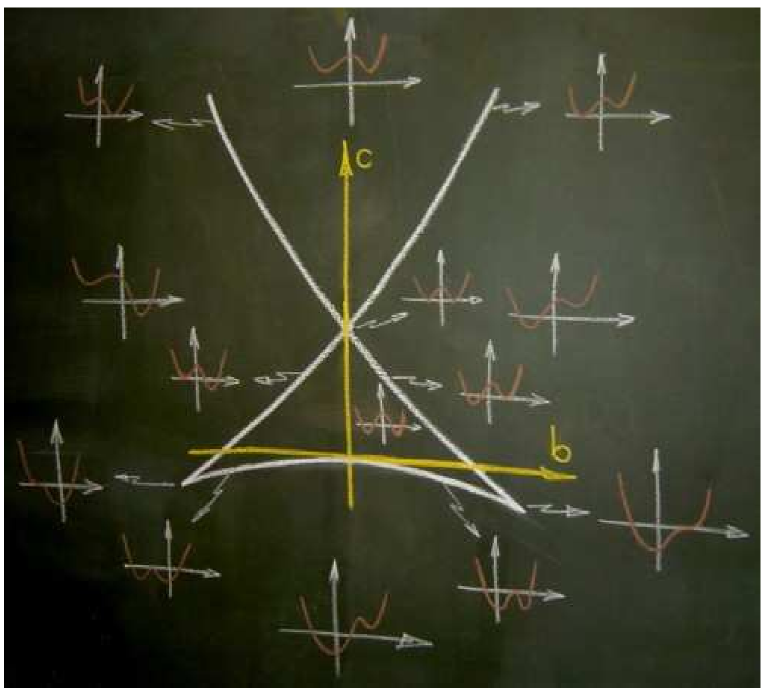


FIGURA 2

Em resumo, para a equação do quarto grau $x^4 - x^2 + bx + c = 0$ descrevemos a natureza das raízes através das seguintes condições sobre os coeficientes $b$ e $c$

| $x^4 - x^2 + bx + c = 0$ | $b$ e $c$ | *região* |
|---|---|---|
| 4 reais simples | $\Delta > 0$ | $B_1$ |
| 4 complexas simples | $\Delta > 0$ | $B_2$ |
| 2 reais simples e 2 complexas | $\Delta < 0$ | $A$ |
| 1 real dupla e duas reais simples | $\Delta = 0$ | *bordo de* $B_1$ |
| 1 real dupla e duas complexas | $\Delta = 0$ | *bordo de* $B_2$ |
| 1 real tripla e uma simples | $\Delta = 0$ | *cúspides* |
| 2 raízes reais duplas | $\Delta = 0$ | *auto-interseção* |

Na seqüência estudaremos a equação geral do quarto grau e a classificação dos diferentes tipos de raízes. Antes, porém aplicaremos uma transformação nas equações que reduz, sem perda de generalidade, a dimensão do espaço de coeficientes.

## 3. Forma reduzida das equações de grau $n$

Consideremos a equação algébrica geral de grau $n$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0.$$

Sendo o grau da equação igual a $n$, segue que o coeficiente $a_n$ é não nulo. Assim, podemos dividir toda a equação por $a_n$ e obter a chamada *forma mônica* da equação geral de grau $n$,

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0 = 0.$$

Através da transformação $x = X - \frac{b_{n-1}}{n}$ a equação mônica na nova variável $X$ não apresentará o termo de grau $n-1$. De fato, substituindo $x = X - \frac{b_{n-1}}{n}$ na equação $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0 = 0$, obtemos uma equação em $X$ da forma

$$X^n + A_{n-2}X^{n-2} + ... + A_1 X + A_0 = 0,$$

sendo os coeficientes $A_i's$ dados pelos coeficientes $b_i's$. Esta forma da equação de grau $n$ é chamada *forma reduzida*. Como $\frac{b_{n-1}}{n}$ é real a natureza das raízes da equação reduzida e da equação original é a mesma. Obtendo-se as raízes da equação reduzida, obtém-se as raízes da equação geral através da transformação inversa daquela que leva a equação geral para a forma reduzida.

**Exemplo:** A equação $x^7 + 7x^6 + 1 = 0$ depois da transformação $x = X - 1$ toma a forma reduzida $X^7 - 21X^5 + 70X^4 - 105X^3 + 84X^2 - 35X + 7 = 0$.

## 4. O discriminante

O fato de uma equação $P_n(X) = X^n + A_{n-2}X^{n-2} + ... + A_1 X + A_0 = 0$ possuir uma raiz $X_0$ significa que podemos fatorar o termo $(X - X_0)$ do polinômio $P_n(X)$; isto é, a equação pode ser escrita na forma $(X - X_0)P_{n-1}(X) = 0$, sendo $P_i(X)$ um polinômio de grau $i$. Já o fato de $X_0$ ser uma raiz de multiplicidade 2, significa que podemos fatorar o termo $(X - X_0)^2$, isto é, a equação pode ser escrita na forma $(X - X_0)^2 P_{n-2}(X) = 0$.

Raízes com multiplicidade maior ou igual a 2 serão chamadas *raízes com multiplicidade*.

A seguinte proposição fornece um modo prático de se obter condições sobre os coeficientes para detectar raízes com multiplicidade.

**Proposição:** *A equação $P_n(X) = 0$ possui raiz $X_0$ com multiplicidade se, e somente se, $P_n(X_0) = 0$ e sua derivada $P'_n(X_0) = 0$.*

**Demonstração:** Se $P_n(X) = 0$ possui raiz $X_0$ com multiplicidade, então $P_n(X) = (X - X_0)^2 P_{n-2}(X)$. Assim, $P'_n(X) = 2(X - X_0)P_{n-2}(X) + (X - X_0)^2 P'_{n-2}(X)$. Portanto, $X_0$ anula ambos $P_n(X)$ e $P'_n(X)$. Reciprocamente, se $P_n(X_0) = 0$ então $P_n(X) = (X - X_0)P_{n-1}(X)$, para algum polinômio $P_{n-1}(X)$ de grau $n-1$. Logo, $P'_n(X) = (X - X_0)P'_{n-1}(X) + P_{n-1}(X)$. Se $P'_n(X_0) = 0$ então $P_{n-1}(X_0) = 0$, e assim podemos fatorar $(X - X_0)$ de $P_{n-1}(X)$, isto é $P_{n-1}(X) = (X - X_0)P_{n-2}(X)$. Portanto, $P_n(X) = (X - X_0)^2 P_{n-2}(X)$, que é o mesmo que dizer que $X_0$ é raiz com multiplicidade da equação $P_n(X) = 0$.

**Exemplo:** Considere $P_3(X) = X^3 + AX + B$. Seja $X_0 = t$ uma raiz com multiplicidade. Então $t^3 + At + B = 0$ e $3t^2 + A = 0$. Podemos escrever os coeficientes $A = -3t^2$ e $B = 2t^3$, como função de $t$. Variando-se $t \in \mathbb{R}$ obtemos o conjunto das equações $X^3 + AX + B = 0$ que possuem raiz com multiplicidade; em outras palavras, obtemos uma parametrização do conjunto de coeficientes das equações reduzidas $X^3 + AX + B = 0$, que possuem raiz com multiplicidade (Figura 3 (a)).

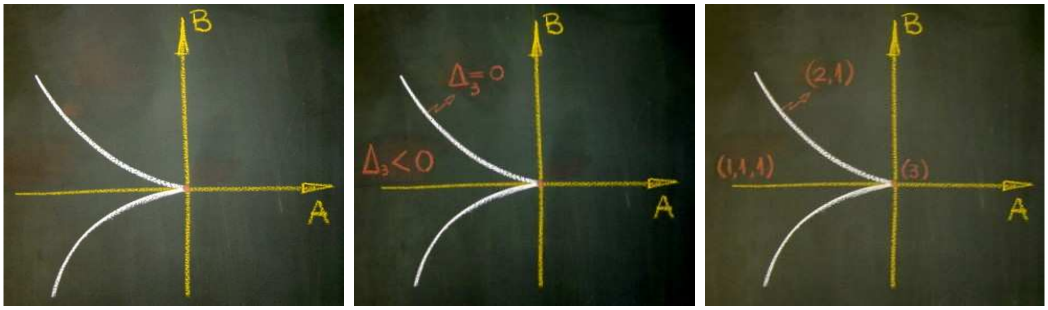


FIGURA 3. (a), (b), (c)

**Definição:** O conjunto $\{(A_{n-2}, A_{n-3}, ..., A_1, A_0) \in \mathbf{R}^{n-1} : P_n(X) = 0$ tem raiz com multiplicidade$\}$ é denominado *discriminante* da equação reduzida $P_n(X) = X^n + A_{n-2}X^{n-2} + ... + A_1 x + A_0 = 0$ de grau $n$.

**Observações:** 1) A cada ponto $(A_{n-2}, A_{n-3}, ..., A_1, A_0)$ do discriminante fica associado um polinômio $P_n(X)$ e reciprocamente.

2) Para a equação de grau 3, o discriminante é uma curva algébrica parametrizada no $\mathbb{R}^2$. Em geral, o discriminante é a imagem de uma aplicação $\mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-1}$. Um dos $n-2$ parâmetros corresponde à raiz com multiplicidade. Eliminando-se este parâmetro obtemos uma equação definindo o discriminante da equação de grau $n$ que será denotada por $\Delta_n = 0$.

## 5. INDEXAÇÃO DOS TIPOS DE RAÍZES

Uma *partição* de um número natural $n$ é uma decomposições da forma $\gamma(n) = (r_1, r_2, ..., r_k)$, com $r_i \in \mathbb{N}$, $r_i \geq r_{i+1}$ e $\sum r_i = n$. O número $k$ é chamado *comprimento da partição.*

Podemos indexar as possíveis multiplicidades das raízes de uma equação de grau $n$ através das partições do número $n$. De fato, dada uma partição $\gamma(n) = (r_1, r_2, ..., r_k)$ do número $n$, associamos a cada $r_i$ a multiplicidade de uma dada raiz da equação de grau $n$.

Assim, o problema de saber quantos tipos de raízes uma equação do grau $n$ possui, reduz-se ao problema de saber quantas partições o número $n$ possui[3]. Por exemplo, o número de partições do número 2 é 2, a saber, $(1,1)$ e $(2)$. O que corresponde ao fato de equações de grau 2 possuirem duas raízes de multiplicidade 1 ou uma raiz de multiplicidade 2. Já o número 3 possui 3 partições, a saber, $(1,1,1), (2,1)$ e $(3)$. Em outras palavras, as equações de grau 3 podem possuir três raízes de multiplicidade 1, uma raiz de multiplicidade 2 e uma de multiplicidade 1 ou uma única raiz de multiplicidade 3. Se $n = 4$, $\gamma(4)$ pode ser uma das seguintes cinco partições $(1,1,1,1)$,

[3] Parece um problema simples, porém sua solução, magnificamente não trivial, só foi obtida por volta de 1920 por G. Hardy e S. Ramanujam (v. observações finais)

$(2,1,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$ e $(4)$. Se $n = 5$ teremos 7 partições possíveis. O número de partições de um número $n$ cresce exponencialmente com $n$.

O discriminante da equação reduzida de grau $n$ é um conjunto contido no espaço $(n-1)-$dimensional dos coeficientes da equação, e que divide este espaço em componentes conexas. Por sua vez o discriminante é subdividido em partes correspondentes aos coeficientes cujas equações possuem raízes de um dado tipo, que é indexado pelas diversas partições do grau da equação. Esta subdivisão é chamada *estratificação* do discriminante e cada parte, correspondente a uma das diversas partições do grau da equação, é chamada *estrato*.

O comprimento $k$ de uma dada partição $\gamma(n) = (r_1, r_2, ..., r_k)$ mede a dimensão do correspondente estrato, visto como subvariedade do $\mathbb{R}^{n-1}$.

Vimos que para uma equação de grau $n$ (sempre na forma reduzida) a dimensão do discriminante é $n-2$, uma hipersuperfície no $\mathbb{R}^{n-1}$.

**Proposição:** O estrato associado a uma partição $\gamma(n) = (r_1, \cdots, r_k)$ de comprimento $k$ tem dimensão $k-1$.

**Demonstração:** Sejam $X_i$, $i = 1, \cdots, k$ as $k$ raízes distintas do polinômio $P_n(X) = X^n + A_{n-2}X^{n-2} + \cdots + A_1X + A_0$ de multiplicidades $r_i$, $i = 1, \cdots, k$ respectivamente. Então $P_n(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - X_i)^{r_i}$. Desta igualdade vem que os coeficientes $A_0, \cdots, A_{n-2}$ são funções dos $X_1, \cdots, X_k$. Contudo, expandindo o lado direito desta igualdade obtemos que o coeficiente do termo $X^{n-1}$ é igual a $-r_1X_1 - r_2X_2 - \cdots - r_kX_k$ e portanto se anula. Logo, $X_k = -\frac{r_1}{r_k}X_1 - \frac{r_2}{r_k}X_2 - \cdots - \frac{r_{k-1}}{r_k}X_{k-1}$. Assim, cada coeficiente $A_j$, $j = 0, \cdots, n-2$ é função apenas de $X_1, \cdots, X_{k-1}$. Variando-se continuamente $X_1, \cdots, X_{k-1}$, obtem-se uma parametrização do estrato associado à partição $\gamma(n) = (r_1, \cdots, r_k)$. De fato, a aplicação $(X_1, \cdots, X_{k-1}) \to (A_0, \cdots, A_{n-2})$ é um homeomeorfismo sobre o estrato. Como a dimensão é um invariante topológico (Brouwer), obtemos o resultado.

**Observação:** O espaço dos coeficientes fica estratificado por subvariedades de dimensões que variam de zero até $n-1$. Observe que, variando-se continuamente os coeficientes da equação, o tipo das raízes mantem-se o mesmo, exceto na passagem de um estrato para outro. Cada estrato associado a uma partição de comprimento $k$ é um aberto em $\mathbb{R}^{k-1}$ e na parte correspondente exclusivamente às raízes reais temos que os estratos de dimensão $k-1$ estão na aderência de um estrato de dimensão $k$. O mesmo não acontece na parte correspondente às raízes complexas (v. Figura 4 (b)).

## 6. Geometria dos discriminantes

Descreveremos em detalhes os discriminantes das equações de graus 3 e 4 no espaço euclidiano.

6.1. **Equação do terceiro grau.** A equação cúbica geral $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ é reduzida, através da transformação $x = X - \frac{a}{3}$, à equação

$$X^3 + AX + B = 0$$

sendo $A = -\frac{a^2}{3} + b$ e $B = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$.

O discriminante da equação é lugar geométrico dos coeficientes $A$ e $B$ onde a equação $X^3 + AX + B = 0$ possui raízes com multiplicidade e portanto, pela proposição, é dado pelas equações $X^3 + AX + B = 0$ e $3X^2 + A = 0$. Substituindo $A = -3X^2$ na equação obtém-se $B = 2X^3$.

Eliminando-se $X$ de $A = -3X^2$ e $B = 2X^3$ obtemos uma equação definindo o discriminante, a saber, $\Delta_3 = 4A^3 + 27B^2 = 0$.

No espaço dos coeficientes da equação $X^3 + AX + B = 0$; isto é no plano $0AB$, essa expressão representa uma curva cuspidal. Esta curva decompõe o espaço dos coeficientes em duas componentes conexas. Uma delas $4A^3 + 27B^2 < 0$ corresponde aos coeficientes cujas equações possuem 3 raízes reais distintas, enquanto $4A^3 + 27B^2 > 0$ caracterizam as equações que possuem raízes complexas (Figura 3 (b)).

6.2. **Equação do quatro grau.** A equação quártica geral $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$ é reduzida, através da transformação $x = X - \frac{a}{4}$, à equação

$$X^4 + AX^2 + BX + C = 0.$$

O discriminante desta equação é um subconjunto do espaço tridimensional, cujas coordenadas são todos os possíveis valores dos coeficientes $A, B$ e $C$, dados pelo anulamento de $P_4(X) = X^4 + AX^2 + BX + C$ e pelo anulamento de sua derivada $4X^3 + 2AX + B$. Ou seja, o discriminante é o conjunto $\{(A, B, C) \in \mathbf{R}^3 : X^4 + AX^2 + BX + C = 0 \text{ e } 4X^3 + 2AX + B = 0\}$ que também pode ser escrito como $\{(A, B, C, X) \in \mathbf{R}^4 : B = -4X^3-2AX \text{ e } C = -X^4-AX^2-BX\}$. Esse subconjunto do $\mathbb{R}^4$ é portanto a interseção de duas hipersuperfícies algébricas no $\mathbb{R}^4$.

Podemos parametrizá-lo tomando parâmetros $u$ e $v$ no plano $\mathbf{R}^2$. Deste modo, o discriminante é a superfície do $\mathbf{R}^3$ imagem da aplicação $\delta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, dada por $\delta(u, v) = (u, -4v^3 - 2uv, 3v^4 + uv^2)$.

Para obtermos uma equação definindo o discriminante da equação do quarto grau, procedemos à eliminação dos parâmetros $u$ e $v$ das expressões $A = u$, $B = -4v^3-2uv$ e $C = 3v^4+uv^2$. Depois de tal eliminação obtemos a expressão $\Delta_4 = 4A^3B^2+27B^4-16A^4C+128A^2C^2-144AB^2C-256C^3 = 0$, em outras palavras, a função $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por $F(X, Y, Z) = 4X^3Y^2+27Y^4-16X^4Z+128X^2Z^2-144XY^2Z-256Z^3$ define o discriminante da equação do quarto grau como $F^{-1}(0)$, portanto uma superfície algébrica de grau cinco.

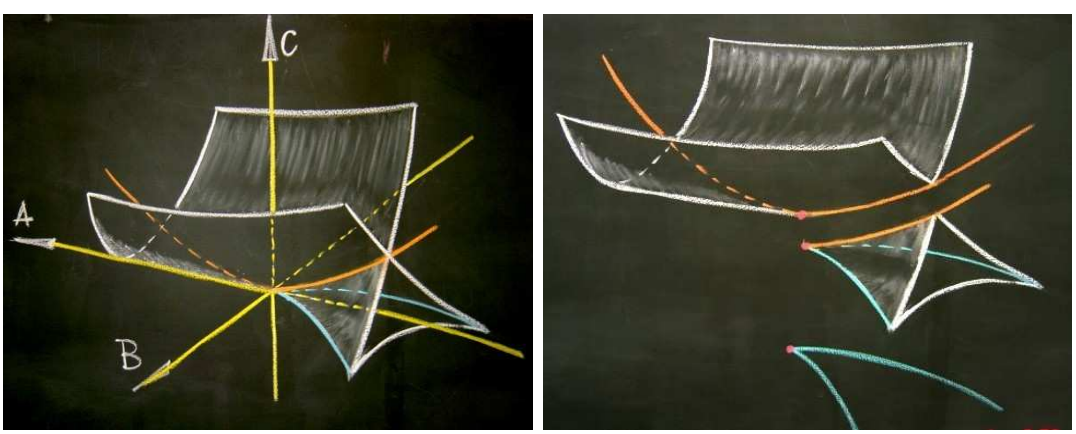


FIGURA 4. (a), (b)

René Thom apelidou o discriminante da equação do quarto grau $X^4+AX^2+BX+C=0$ de rabo de andorinha, devido a forma sugestiva desta superfície (Figura 4 (a)).

Note que o discriminante da equação do quarto grau $x^4-x^2+bx+c=0$, (Figura 1) considerada no primeiro exemplo, é a curva obtida como interseção do plano $A=-1$ com a superfície $\Delta_4=0$.

## 7. Estratificação do discriminante

7.1. **Equação do terceiro grau.** O curva discriminante da equação do terceiro grau é estratificada em duas partes associadas às partições $(2,1)$ e $(3)$. Em outras palavras, os coeficientes $A$ e $B$ coordenadas dos pontos da curva discriminante correspondem às equações que possuem raízes com multiplidade, a saber, uma raiz com multiplicidade 2 e uma raiz simples para os coeficientes correspondentes à partição $(2,1)$ e uma única raiz de multiplicidade 3 para os coeficientes $A=B=0$, que corresponde à partição $(3)$ (Figura 3 (c)).

7.2. **Equação do quarto grau.** No caso $n=4$, o discriminante é uma superfície (com auto-interseção) no espaço tridimensional dos coeficientes da equação (Figura 4 (a)). Os tipos de raízes, indexadas pelas partições do grau da equação induzem uma estratificação do discriminante com cada estrato associado a uma das partições (Figura 4 (b)).

Com efeito, inicialmente observemos que à partição $(1,1,1,1)$ correspondem três componentes conexas do complementar do discriminante $\Delta_4=0$; isto é, o conjunto dos coeficientes $(A,B,C)$ para os quais a equação $X^4+AX^2+BX+C=0$ possui 4 raízes simples, todas reais ou todas complexas quando $\Delta_4<0$ ou duas reais simples e duas complexas quando $\Delta_4>0$ (componente externa). Na componente em forma de tetraedro encontramos os coeficientes das equações que possuem quatro raízes reais distintas. Correspondente à partição $(2,1,1)$ temos o conjunto dos coeficientes $(A,B,C)$ pertencentes ao discriminante $\Delta_4=0$, para os quais a equação $X^4+AX^2+BX+C=0$ possui 3 raízes, uma delas de multiplicidade 2 e as outras duas raízes são simples. Neste caso, dois tipos se apresentam, a saber, todas raízes reais (na fronteira da componente em forma de tetraedro) ou uma real e duas complexas. À partição $(2,2)$ correspondem os coeficientes para os quais a equação possui 2 raízes, cada uma com multiplidade 2, portanto ou um par de raízes reais duplas ou um par de complexas duplas (parábola). A partição $(3,1)$ caracteriza os coeficientes das equações que possuem 2 raízes, uma com multiplidade 3 e a outra raiz simples, portanto ambas reais (linhas cuspidais). Finalmente a partição $(4)$ refere-se aos coeficientes cuja equação de grau 4 possui uma única raiz de multiplicidade 4, ou seja, todos os coeficientes são nulos e a equação se reduz a $X^4=0$.

De fato, o estrato correspondente à partição $(4)$ é $\{(A,B,C) : \textit{existe } X_0 \textit{ com } X^4+AX^2+BX+C=(X-X_0)^4\}$. Expandindo $(X-X_0)^4$ e igualando os coeficientes obtemos: $-4X_0=0$ coeficiente de $X^3$, $6{X_0}^2=A$, $-4{X_0}^3=B$ e ${X_0}^4=C$, portanto $A=B=C=0$. Assim, o estrato associado à partição $(4)$ reduz-se ao ponto $(0,0,0)$.

O estrato correspondente à partição $(3,1)$ é $\{(A,B,C) : \textit{existem } X_0 \text{ e } X_1 \textit{ com } X^4+AX^2+BX+C=(X-X_0)^3(X-X_1)\}$. Expandindo $(X-X_0)^3(X-X_1)$ e igualando os coeficientes obtemos: $X_1+3X_0=0$, coeficiente de $X^3$, $3X_0X_1+3{X_0}^2=A$, $-3{X_0}^2X_1-{X_0}^3=B$ e ${X_0}^3X_1=C$, portanto $A=-6{X_0}^2$, $B=8{X_0}^3$ e $C=-3{X_0}^4$.

Assim, o estrato associado à partição $(3, 1)$ tem dimensão um. Analogamente, o estrato correspondente à partição $(2, 2)$ é a curva parametrizada por $(-2{X_0}^2, 0, {X_0}^4)$. Portanto uma parábola no plano $B = 0$.

Note que esta parábola é dividida pelo estrato associado à partição (4) em dois estratos, a saber, a parte correspondente às raízes reais duplas e a parte correspondente às raízes camplexas duplas. Note também que este último é um estrato contido no estrato tridimensional e não na aderência de outro estrato.

## 8. Observações finais

**1)** A função $p(n)$ que fornece o número de partições do número $n$ é conhecida como formula de Hardy - Ramanujan [H].

Denotamos por $[x]$ o maior inteiro menor que $x$, por $(a, b)$ o maior divisor comum de $a$ e $b$ e por $((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}, & \text{se } x \text{ não é inteiro} \\ 0, & \text{se } x \text{ é inteiro} \end{cases}$

Então o número de partições de um inteiro $n$ é $p(n) = [t(n)]$, sendo

$$t(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{[2\sqrt{n}/3]} \sqrt{k} A_k(n) \frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})})}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right)$$

$$A_k(n) = \sum_{0<h\leq k,(h,k)=1} e^{\pi i s(h,k)} e^{-2\pi i h n/k} \text{ e } s(h, k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right).$$

**2)** É uma coincidência curiosa que, sob o ponto de vista dos discriminantes, a limitação do grau 4 para as equações serem solúveis por radicais coincide com a limitação de nossa capacidade visual usual. De fato, para equações reduzidas do segundo grau $X^2 - \Delta_2 = 0$, o discriminante é um ponto na reta, no caso das equações do terceiro grau uma curva (cuspidal) no plano e no caso extremo do quarto grau, uma superfície (singular) no espaço tridimensional. Equações do quinto grau possuem discriminante tridimensional no espaço de dimensão quatro, portanto de difícil de concepção visual, como estamos acostumados. René Thom apelidou o discriminante da equação do quinto grau $X^5 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$ de borboleta. Quem sabe isso ajude o leitor numa possível visualização.

**3) Exemplo do quinto grau**: O discriminante da equação reduzida do quinto grau $x^5+ax^3+bx^2+cx+d = 0$ é a hipersuperfície $\Delta_5 = 825a^2b^2d^2-4a^3b^2c^2-27b^4c^2+16a^3b^3d+2000ac^2d^2+108b^5d+144ac^3b^2-900a^3cd^2-3750abd^3+560a^2c^2bd-72a^4cdb-630acdb^3+2250b^2d^2c-1600bdc^3+16a^4c^3-128a^2c^4+256c^5+3125d^4+108a^5d^2 = 0$.

Considere a equação $x^5 - 5x^3 + cx + d = 0$. Neste caso o discriminante é obtido como interseção de $\Delta_5 = 0$ com os hiperplanos $a = -5$ e $b = 0$, portanto uma curva no plano de coordenadas $c$ e $d$ (Figura 5).

Para os coeficientes na região central limitada pela curva com $0 < c < \frac{25}{4}$ a equação possui 5 raízes reais distintas, sobre as quatro linhas limitando esta região a equação possui 4 raízes reais sendo uma de multiplicidade 2 e 3 raízes simples e nos 3 pontos de auto-interseção, cujas coordenadas são $(c, d) = (\frac{25}{4}, 0), (5, 2)$ e $(5, -2)$ (3 vértices superiores desta região central) a equação possui 3 raízes reais, sendo duas de multiplicidade 2 e uma simples. Além disso, no vértice inferior (quando $c = 0 = d$) a equação possui três raízes reais, sendo uma de multiplicidade 3 e duas simples. Assim, para esta equação particular do quinto grau temos contempladas as seguintes partições $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$ e $(3, 1, 1)$.

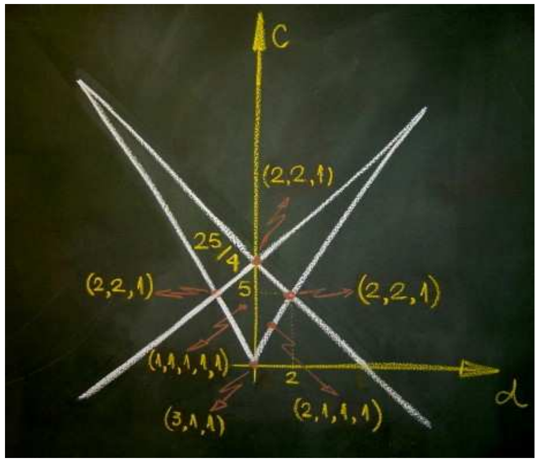


FIGURA 5

**Referências**

[G] Gauss, C. ; Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, Universitt Helmstedt, 1799.

[H] Hademacher, H.; Topics in analytic number theory, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 169. Springer, 1973.

Departamento de matemática aplicada e estatística, ICMC, USP, São Carlos (SP)
*E-mail address*: ton@icmc.usp.br