



JUROS SIMPLES SÃO MESMO SIMPLES?

ANTÔNIO LUIZ PEREIRA – IME/USP

INTRODUÇÃO

Em fevereiro de 2016, a Procuradoria Geral de Santa Catarina ajuizou mandado de segurança no STF, pedindo mudanças no cálculo dos juros de suas dívidas com a União. Essa reivindicação foi interpretada, talvez de maneira inexata, como um pedido de alteração no cálculo do saldo da dívida do regime de juros compostos para o de juros simples.

A iniciativa de Santa Catarina foi seguida por vários Estados, 11 dos quais obtiveram parecer liminar favorável do STF, impedindo que o governo federal lhes aplicasse sanções até o julgamento do mérito da questão. Em sua sessão de 27/04/2016, a Suprema Corte decidiu adiar esse julgamento e concedeu um prazo de 60 dias para que as partes chegassem a um acordo.

A grande repercussão desse julgamento, devida sobretudo à magnitude das cifras envolvidas, reacendeu uma antiga polêmica sobre a sistemática mais adequada para a correção dos saldos devedores em empréstimos no Brasil.

Não é nosso objetivo aqui discutir as complicadas questões legais e políticas ligadas ao assunto, mas apenas entender alguns dos aspectos matemáticos e conceituais envolvidos. Em particular, argumentaremos que a quase universalidade do sistema de juros compostos não se deve apenas ao interesse de emprestadores e aplicadores por maior rendimento, mas também a razões concretas de ordem prática e conceitual.



SISTEMÁTICAS DE JUROS

Uma ideia fundamental em Matemática Financeira é que o valor do dinheiro varia com o tempo. Um real hoje vale menos do que um real ontem e mais do que um real amanhã. Para comparar quantias em dinheiro em datas diferentes, é necessário transformá-las primeiro em quantias “equivalentes” em uma mesma data de referência. Para que isso seja possível, é essencial fixar uma regra sobre os juros que determina quanto se pode obter no futuro pela aplicação de uma certa quantia de dinheiro hoje. Na prática, existem duas sistemáticas de juros: a **sistemática de juros simples** e a **sistemática de juros compostos**.

Na **sistemática de juros simples**, um capital inicial C é corrigido ao final de cada período básico T pelo acréscimo (ou “capitalização”) de juros segundo a fórmula $J = iC$, em que i é uma constante denominada taxa de juros. O valor resultante M é denominado o montante em cada instante. O valor do montante depois de n períodos é então dado por $M = (1 + ni)C$, ou seja, o montante cresce segundo uma P.A. de primeiro termo C e razão iC .

Na **sistemática de juros compostos**, o valor dos juros acrescidos ao final de cada período é dado por $J = iM$, sendo M o valor do montante no período imediatamente anterior. O valor do montante após n períodos é dado por $M = (1 + i)^n C$, ou seja, ele cresce segundo uma P.G. de primeiro termo C e razão $(1 + i)$.

Suponhamos, por exemplo, que um capital inicial de R\$ 50.000 é corrigido a uma taxa de 10% de juros a cada período de um ano. A tabela abaixo mostra a evolução do montante por um período de dez anos em cada um dos regimes:

	capital inicial	1 ano	2 anos	3 anos
simples	50.000	55.000	60.000	65.000
compostos	50.000	55.000	60.500	66.550

		4 anos	5 anos	10 anos
simples		70.000	75.000	100.000
compostos		73.205	80.525,50	129.687,12...

À primeira vista, os cálculos da evolução do montante são mais simples na sistemática de juros simples, especialmente se tivermos que efetuá-los sem auxílio de uma calculadora ou planilha. Note, entretanto, que a correção do montante, no regime de juros compostos, depende apenas do seu valor no presente, diversamente do que ocorre sob juros simples, em que a correção em cada período depende do conhecimento do seu valor no “instante inicial” ou seja, do capital. Isso pode não parecer importante na situação simples do exemplo, mas veremos que tem implicações que tornam a aplicação dos juros compostos bem mais conveniente em várias situações. Por enquanto, observamos que essa sistemática está mais próxima do que ocorre com os preços das mercadorias em geral, que são reajustados pelo seu preço no momento do reajuste; nenhum lojista vai se perguntar qual era o preço de um produto na data de inauguração, antes de reajustá-lo.

EQUIVALÊNCIA DE VALORES

Fixada uma regra sobre os juros (incluindo a taxa, período básico e regime), consideremos dois instantes de tempo t e s que diferem por um múltiplo m do período básico T com $t \leq s$. Dizemos que os valores X no instante t e Y no instante s são **equivalentes** se um capital de valor X investido no instante t , depois de corrigido segundo a regra fixada durante m períodos básicos, resulta no montante Y no instante s .

Enfatizamos que a definição de equivalência de valores em dinheiro depende da fixação prévia dos juros. Pode ser pensada como uma transformação que leva em conta a remuneração “média” que pode ser obtida no mercado pelo detentor do capital C . Na nossa discussão, porém, não será essa a interpretação adotada; os juros serão os estabelecidos em cada situação particular, dada pelo problema que se quer resolver.

Usaremos a notação $(X, t) \sim (Y, s)$ para indicar a equivalência entre os capitais X e Y nos instantes t e s , respectivamente. Observe que as proprie-

dades de **reflexividade**: $(X, t) \sim (X, t)$ e **simetria**: $(X, t) \sim (Y, s) \rightarrow (Y, s) \sim (X, t)$ decorrem imediatamente da definição. E a **transitividade**? Bem, não é difícil verificar que, **sob o regime de juros compostos**, a noção de equivalência entre capitais goza também dessa desejável propriedade:

Se $(X, t) \sim (Y, s)$ e $(Y, s) \sim (Z, r)$, então $(X, t) \sim (Z, r)$.

De fato, se $s = t + mT$ e $r = s + kT$, k e m inteiros, então $Y = (1 + i)^m X$ e $Z = (1 + i)^k Y$. Segue que $Z = (1 + i)^{k+m} X$ e, portanto, $(X, t) \sim (Z, r)$.

A transitividade, entretanto, **não vale** se for adotada a sistemática de juros simples.

De fato, com as mesmas notações acima (e supondo X e i positivos), teremos, agora:

$$(X, t) \sim (Y, s) \text{ e } (Y, s) \sim (Z, r) \rightarrow$$

$$Y = (1 + mi)X \text{ e } Z = (1 + ki)Y.$$

Segue

$$Z = (1 + ki)(1 + mi)X = [1 + (k + m)i]X + kmi^2X.$$

Portanto, $(X, t) \sim (Z, r)$ se e somente se $kmi^2X = 0$, ou seja, $X = Y$ ou $Y = Z$.

Uma consequência interessante e importante da transitividade é que duas quantias em dinheiro podem ser comparadas em dois momentos quaisquer (cuja diferença seja múltiplo do período básico). Mais precisamente, se as quantias em dinheiro X no instante t e Y no instante s são ambas equivalentes à mesma quantia Z no instante r , então, em qualquer outro instante r' (com $r - r'$ múltiplo de T), X e Y serão equivalentes ao mesmo valor Z' (a prova é simples e fica como exercício). Isso permite escolher, em um dado problema, qualquer instante de referência para as comparações, sem risco de inconsistência.

Essa agradável consistência não se mantém, entretanto, se a sistemática de juros simples for adotada! Por exemplo, usando os cálculos da tabela da seção anterior, vemos que, no regime de juros compostos, um valor inicial de R\$ 50.000 é equivalente ao valor de R\$ 55.000 = $(1 + 0,1) \times 50.000$ ao final do primeiro ano e ao valor de R\$ 80.525,5 = $(1 + 0,1)^5 \times 50.000$ ao final de 5 anos. Por outro

lado, um valor de R\$ 55.000 daqui a um ano será transformado, pelas mesmas regras sobre os juros, em R\$ 80.525,5 depois de mais quatro anos. Portanto, os valores (equivalentes) de R\$ 50.000 agora e R\$ 55.000 daqui a um ano são ambos equivalentes (a R\$ 80.525,5) daqui a 5 anos.

No caso de juros simples, um valor inicial de R\$ 50.000 é ainda equivalente ao valor de R\$ 55.000 = $(1 + 0,1) \times 50.000$ ao final do primeiro ano. Por outro lado, R\$ 50.000 agora é equivalente a R\$ 75.000 = $(1 + 0,5) 50.000$ daqui a 5 anos. Entretanto, o valor de R\$ 55.000 daqui a um ano será transformado, depois de mais 4 anos, no valor R\$ 77.000. Portanto, o valor de R\$ 55.000 daqui a um ano é equivalente a R\$ 77.000 depois de mais quatro anos. Assim, embora equivalentes, os valores de R\$ 50.000 agora e R\$ 55.000 daqui a um ano não são equivalentes ao mesmo valor daqui a 5 anos! Essa “inconsistência” ou, mais exatamente, essa dependência da noção de equivalência das datas de comparação, introduz uma considerável complicação em diversas transações financeiras quando se adota a sistemática de juros simples, como veremos.

JUROS SIMPLES X JUROS COMPOSTOS EM APLICAÇÕES

Duas operações básicas em Matemática Financeira são as de empréstimo e aplicação. Na verdade, uma aplicação (ou investimento) pode ser vista como uma forma de empréstimo, mas, para nossos propósitos aqui, será conveniente distingui-las.

Na *operação de empréstimo*, uma pessoa (física ou jurídica) transfere um valor C em dinheiro, denominado capital ou principal do empréstimo a outra pessoa, por um certo período de tempo nT , múltiplo de um *período básico* T . O valor do empréstimo, acrescido de juros capitalizados em cada um dos períodos, deve ser pago ao final do prazo de empréstimo, ou em parcelas ao longo desse prazo.

Na *operação de investimento*, uma pessoa deposita um certo valor em dinheiro em uma instituição



financeira, sob promessa de capitalização periódica de juros sobre o capital depositado. Em essência, uma aplicação é um empréstimo feito a uma instituição financeira. Uma diferença é que o aplicador normalmente espera um grau maior de liquidez, ou seja, ele espera poder retirar o montante da aplicação a qualquer momento, se assim for de seu interesse. Para simplificar, pensaremos esquematicamente em investimento como o dinheiro que você deixa no banco sob a expectativa de recebimento de juros e em empréstimo como o dinheiro que você pede ao banco para saldar suas dívidas ou fazer uma compra, e sobre o qual você também deverá pagar juros.

Como se pode perceber facilmente na tabela da pág. 21, com a mesma taxa de juros, os retornos são sempre maiores no sistema de juros compostos, exceto no primeiro período, e se tornam progressivamente maiores quando o número de períodos aumenta, devido ao crescimento geométrico (ou exponencial) em comparação com o crescimento aritmético (ou linear) no caso de juros simples. De fato, o crescimento do montante no caso de juros compostos tem um caráter “explosivo” quando n se torna “grande”. No nosso exemplo, para $n = 100$, o valor corrigido depois de 100 anos seria de 689.030.616 e alguns centavos em comparação com meros 550.000 no sistema de juros simples, ou seja, mais de 1000 vezes maior!

Sendo você o investidor, certamente lhe agrada o fato de que a sistemática de juros compostos será certamente a usada pelo banco. Mas por que o seu banco não adota o sistema de juros simples, menos oneroso para ele?

A resposta curta é: ele não pode ou, mais exatamente, existe uma estratégia simples para contornar uma eventual tentativa de remunerar sua aplicação usando o regime de juros simples. Como a remuneração nos dois sistemas coincide no primeiro período, bastaria, ao final de cada período, retirar seu dinheiro, esperar uns minutinhos na fila e reaplicá-lo. Seu capital seria então remunerado, de qualquer forma, levando em conta o capital no iní-

cio de cada período, ou seja, estaríamos de volta à sistemática dos juros compostos, com um pequeno prejuízo em termos de tempo para você! Como o banco também teria um custo pelo aumento do número de atendimentos, muito provavelmente ele acabaria oferecendo a opção de “reaplicação automática”, mesmo que fosse obrigado por lei a adotar a sistemática de juros simples.

Por essa razão, parece bastante provável que a sistemática de juros compostos continue sendo adotada para remunerar o seu investimento no futuro visível.

JUROS SIMPLES X JUROS COMPOSTOS EM EMPRÉSTIMOS

Considere agora uma situação “simétrica” em relação à anterior. Você precisou pedir um empréstimo de R\$ 50.000 ao banco sobre o qual vai pagar uma taxa de 10% de juros a cada período de um ano. Inicialmente, suponha que o empréstimo será quitado em uma única parcela daqui a, digamos, 5 anos. Você deverá então pagar, ao final do período de 5 anos, um total de

$$(50.000) \times (1 + 0,1)^5 = 80.525,5 \text{ reais}$$

no caso de juros compostos e de

$$50.000 \times (1 + 5 \times 0,1) = 75.000 \text{ reais}$$

no caso de juros simples. Agora, você provavelmente ficaria feliz se os bancos fossem obrigados a adotar juros simples para esse empréstimo. E note que eles não teriam como usar o truque da “reaplicação”; o dinheiro do empréstimo está com você! Infelizmente, porém, eles poderiam eliminar essa vantagem bastando elevar os juros. De fato, sabendo previamente que teriam que adotar juros simples, bastaria que eles exigissem, no contrato de empréstimo, que a taxa de juros fosse tal que o valor final a ser pago se mantivesse o mesmo (ou quem sabe um pouco mais). No nosso exemplo, bastaria que a taxa de juros i fosse tal que:

$$50.000 \times (1 + 5i) \geq 80.525,5, \text{ ou seja,}$$

$$(1 + 5i) \geq 1,61 \Leftrightarrow 5i \geq 0,61 \Leftrightarrow i \geq 0,122.$$

Portanto, pelo menos para empréstimos com tempo



determinado a pagar no final, a sistemática de juros não importa no total a ser pago no final e sim a taxa de juros. Observemos, contudo, que o valor dos juros na sistemática de juros simples que levariam ao mesmo resultado para uma taxa de juros fixa no sistema de juros compostos teria que ser maior se o empréstimo fosse a prazo mais longo. Assim, essa provável “compensação” levaria a uma taxa de juros diferente para cada prazo de empréstimo e, portanto, a uma complicação adicional nos contratos.

AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS

Frequentemente, empréstimos não são pagos no final e sim em prestações periódicas. Como se calcula o valor dessas prestações?

A ideia básica é bastante simples: **o valor da soma das prestações deve ser igual ao valor do empréstimo**. Como já observamos, porém, só faz sentido comparar esses valores se eles forem convertidos em seu valor equivalente em uma data fixa. É usual tomar essa data como sendo a da concessão do empréstimo ou a da última prestação. Suponhamos então que um certo capital C foi emprestado por n períodos, a uma taxa de juros i e deve ser pago em n prestações, vencendo no final de cada período.

O caso dos juros compostos é bem conhecido, mas vamos lembrar brevemente o procedimento, apenas para permitir uma comparação. Denotando por p_k a prestação a ser paga no final do k -ésimo período, devemos ter

$$1) \quad C(1+i)^n = p_1(1+i)^{(n-1)} + p_2(1+i)^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(1+i) + p_n$$

se a comparação for feita no final do empréstimo ou

$$2) \quad C = \frac{p_1}{1+i} + \frac{p_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{p_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{p_n}{(1+i)^n}$$

se a comparação for feita no início do empréstimo.

É claro que as equações 1) e 2) são equivalentes, basta multiplicar 2) por $(1+i)^n$ para obter 1).

Para determinar o valor das prestações, é necessário impor mais alguma condição. Há dois “sistemas de amortização” de uso frequente: o sistema

de preços constantes, em que a prestação é mantida constante em valores nominais (tabela Price), e o “sistema de amortização constante”, no qual uma parcela constante do principal é amortizada em cada prestação (tabela SAC). Vamos considerar brevemente apenas o primeiro; para uma discussão mais completa, ver, por exemplo, [1].

Supondo então que o valor nominal das prestações é uma constante p , teremos, usando fórmula da soma da P.G. e a equação 1), a bem conhecida fórmula:

$$p = C \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1},$$

para o valor das prestações no “sistema Price”.

Vejamos agora o que ocorre, usando as mesmas ideias, no regime de juros simples.

Impondo a equivalência entre o valor do capital emprestado e a soma das prestações, teremos:

$$1) \quad C(1+ni) = p_1[1+(n-1)i] + p_2[1+(n-2)i] + \dots + p_{n-1}(1+i) + p_n,$$

se a comparação for feita no final do empréstimo ou

$$2) \quad C = \frac{p_1}{1+i} + \frac{p_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{p_{n-1}}{[1+(n-1)i]} + \frac{p_n}{(1+ni)}$$

se a comparação for feita no início do empréstimo.

Agora, entretanto, as duas equações não são equivalentes. Como verificaremos em um exemplo, o valor das prestações pode mudar dependendo da data em que a comparação é feita!

Supondo que o valor nominal das prestações é uma constante p , teremos, usando a equação 1) e a fórmula da soma da P.A.:

$$p = \frac{C}{n} \cdot \frac{i(1+ni)}{1 + \frac{(n-1)i}{2}}.$$

Não vamos tentar encontrar uma fórmula fechada para a equação 2); para nossos objetivos é mais fácil usar 1) e 2) diretamente. Vejamos o que ocorre no exemplo do empréstimo de R\$ 50 000, por 5 anos, com taxa de juros simples de 10% a cada período de um ano. Usando a equação 1), obteríamos:



$$50.000 (1 + 0,5) = p (1 + 1,1 + 1,2 + 1,3 + 1,4)$$

$$75.000 = 6p; \text{ logo, } p = 12.500.$$

Usando agora a equação 2):

$$50.000(1 + 0,5) = p \left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,5} \right)$$

$$p = \frac{50.000}{3,892607393} \cong 12.844,86.$$

Como se vê, os valores apurados para o valor da prestação mudam se a data de referência, escolhida para comparar os valores, muda. Essa discrepância aumenta para valores maiores de juros (o leitor pode verificar isso facilmente, substituindo a taxa de 10% por, digamos, 50% nos cálculos acima). Assim, no regime de juros simples, é necessário fixar, além da taxa e do período de incidência dos juros, também a data na qual a comparação entre os valores será feita (essa data é, às vezes, denominada “data focal” na literatura). Na ausência de um critério óbvio para essa escolha, isso gera uma complicação e uma arbitrariedade adicional no cálculo das prestações no sistema de juros simples.

Um outro problema importante, e que mencionaremos apenas brevemente aqui, é o cálculo do saldo da dívida em cada instante. Novamente, no regime de juros compostos isso é feito de maneira bastante simples e universalmente aceita: de cada pagamento subtrai-se primeiro o valor referente aos juros no período e o restante amortiza o principal da dívida (para uma exposição detalhada, ver, por exemplo, [2], [3],[4] ou [5]).

No caso dos juros simples, não existe um algoritmo padrão para a atualização dos saldos. Uma proposta interessante pode ser encontrada em [2]. Apesar de bastante elegante, o algoritmo proposto em [2] é significativamente mais complicado, quando comparado com o disponível para juros compostos e, a meu ver, um tanto arbitrário.

CONCLUSÃO

Os cálculos envolvidos nas diversas operações financeiras são, frequentemente, de difícil compreensão para o cidadão comum e essa dificuldade pode ser usada para manipulações e distorções em seu prejuízo. A adoção da sistemática de juros simples,

em contraposição à prática, atualmente quase universal, de juros compostos (ou “juros sobre juros”), tem sido às vezes proposta como uma forma de simplificar esses cálculos e, ao mesmo tempo, evitar o “crescimento exponencial” de saldos devedores (sobre esse ponto de vista, ver [2]).

Acreditamos, entretanto, que essa não é uma solução adequada para o problema. Como procuramos mostrar, uma tal troca seria, na melhor das hipóteses, inócua do ponto de vista financeiro e, ao contrário do que pode parecer a princípio, introduziria complicações adicionais, ao invés de simplificar os raciocínios e cálculos envolvidos nas transações.

Em nossa opinião, uma resposta mais adequada seria a adoção de regras claras, a simplificação na redação dos contratos e, principalmente, um melhor domínio dos princípios básicos da Matemática Financeira pelos cidadãos.

Aqui, como em muitas outras situações, uma participação efetiva do indivíduo em nossa complexa “sociedade do conhecimento” depende de... conhecimento. De fato, as questões cotidianas levantadas pelas transações em dinheiro constituem um exemplo claro da importância de uma educação básica adequada em Matemática para o pleno exercício da cidadania na sociedade moderna.

Nota: Após a redação deste artigo, a imprensa noticiou que um acordo de renegociação da dívida dos Estados com a União havia sido alcançado, prevendo a concessão de um prazo maior para o pagamento das dívidas, aparentemente sem mudança na sistemática de juros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FERREIRA, D. B. SAC ou PRICE? RPM 85.
- [2] FORGER F. M. Saldo capitalizável e saldo não capitalizável: novos algoritmos para o regime de juros simples, <http://www.ime.usp.br/~forger/pdf/Saldos.pdf>
- [3] HAZZAN, S. & POMPEO, J. N. *Matemática Financeira*. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2007.
- [4] MORGADO, A. C.R; WAGNER, E. & ZANI, S. C. *Progressões e Matemática Financeira*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1993.
- [5] NETO, A. A. *Matemática Financeira e suas aplicações*. 9ª edição. São Paulo: Atlas, 2006.

