ÁLGEBRAS DE QUIVERS

ROMMEL BARBOSA

ORIENTADOR: HÉCTOR A.MERKLEN GOLDSCHMIDT

Definição 1: Seja K um corpo. Por uma K-álgebra entendemos um espaço vetorial a de dimensão finita sobre K no qual está definida uma multiplicação

$$(a,b) \to ab$$

satisfazendo as seguintes condições:

1) $(ab)c=a(bc)$.

2) $a(b+c)=ab+ac$ e

$(b+c)a=ba+ca$.

3) $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$.

$\forall\ a,b,c\in A;\alpha\in K$.

Definição 2: Um quiver é uma aplicação da forma $Q:A \to V\times V$, onde A é um conjunto finito cujos elementos se chamam flechas e $V\subset \mathbb{N}$. Se $Q(a)=(i,j)$, dizemos que i é a origem e j o extremo de a. Um caminho do quiver Q, do vértice i ao vértice j, $(j|a_k\ldots a_i|i)$, é uma seqüência $(a_1,\ldots,a_k)$ de flechas tais que i é a origem de a_1, o extremo de a_ℓ coincide com a origem de $a_{\ell+1}$ e o extremo de a_K é j. Dado $i\in V$, a seqüência vazia define um caminho de i a i, $(i||i)$, denotado por e_i.

<u>Exemplo</u>: $\overset{1}{\bullet} \xrightarrow{a} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{b} \overset{3}{\bullet}$ $\qquad V=\{1,2,3\}$

$A=\{a,b\}$

$Q(a)=(1,2)$.

$Q(b)=(2,3)$.

Definiremos operações em A da seguinte forma:

$\alpha,\beta\in A$, $\alpha\beta=0$ se $Q(\alpha)=(i_1,j_1)$, $Q(\beta)=(i_2,j_2)$, $i_1\neq j_2$, e será o caminho $(j_1|\alpha\beta|i_2)$ se $i_1=j_2$. Temos que $e_ie_j=0$ se $i\neq j$, e $e_i.e_i=e_i$; $e_i.a=0$ se $Q(a)=(k,\ell)$ com $\ell\neq i$ e $e_ia.=a$ se $\ell=i$; $ae_i=a$ se $i=k$ e $a.e_i=0$, $i\neq k$.

Com estas operações, o k-espaço vetorial cuja base são os caminhos de Q é uma álgebra associativa sobre k, com elemento unidade $1=\sum_{i\in V} e_i$ quando V é finito.

<u>Proposição 1</u>: $\dim_k A$ é finita <=> o número de caminhos é finito.

<u>Proposição 2</u>: o ideal gerado pelas flechas é nilpotente maximal.

<u>Definção 3</u>: Uma k-representação de Q é um par (M,ϕ) consistindo de um conjunto $M=\{M_i:\ i\in V\}$ de k-espaços de dimensão finita, e um conjunto $\phi=\{\phi_a:\ a\in A\}$ de funções lineares $\phi_a: M_i \to M_j$, onde i é a origem e j o extremo da flecha a.

Sejam M,N: k-representações de Q, onde:

Q: $\overset{1}{\bullet} \xrightarrow{a} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{b} \overset{3}{\bullet}$

Um morfismo $\alpha: M \to N$ é uma família $\alpha=(\alpha_v)_{v\in V}$ de aplicações lineares $\alpha_v: V_v \to V'_v$ que torna comutativo o

$$\begin{tikzcd}
M: & V_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & V_2 \arrow[r, "t_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & V_3 \arrow[d, "\alpha_3"] \\
N: & V_1' \arrow[r, "g_1"'] & V_2' \arrow[r, "g_2"'] & V_3'
\end{tikzcd}$$

diagrama correspondente. α será isomorfismo quando cada α_v for um isomorfismo. As k-representações de Q podem ser interpretadas como os módulos finitamente gerados sobre a álgebra A.

BIBLIOGRAFIA:

[1] Polcino Milies, C. - Anéis e Módulos, IME-USP, 1972.

[2] Felzenswalb, B. - Álgebras de dimensão finita, 12º CBM, 1979.

[3] Merklen, H. - Representaciones de aljabas y el Teorema de Gabriel, VII Escola de Álgebra, Campinas, 1982.