

ÁLGEBRAS DE QUIVERS

ROMMEL BARBOSA

ORIENTADOR: HÉCTOR A. MERKLEN GOLDSCHMIDT

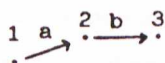
Definição 1: Seja K um corpo. Por uma K -álgebra entendemos um espaço vetorial A de dimensão finita sobre K no qual está definida uma multiplicação

$$(a, b) \rightarrow ab$$

satisfazendo as seguintes condições:

- 1) $(ab)c = a(bc)$.
 - 2) $a(b+c) = ab+ac$ e
 $(b+c)a = ba+ca$.
 - 3) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.
- $\forall a, b, c \in A; \alpha \in K$.

Definição 2: Um quiver é uma aplicação da forma $Q: A \rightarrow V \times V$, onde A é um conjunto finito cujos elementos se chamam flechas e $V \subset \mathbb{N}$. Se $Q(a) = (i, j)$, dizemos que i é a origem e j o extremo de a . Um caminho do quiver Q , do vértice i ao vértice j , $(j | a_k \dots a_1 | i)$, é uma sequência (a_1, \dots, a_k) de flechas tais que i é a origem de a_1 , o extremo de a_1 coincide com a origem de a_{1+1} e o extremo de a_k é j . Dado $i \in V$, a sequência vazia define um caminho de i a i , $(i | | i)$, de notado por e_i .

Exemplo:

$$V = \{1, 2, 3\}$$

$$A = \{a, b\}$$

$$Q(a) = (1, 2).$$

$$Q(b) = (2, 3).$$

Definiremos operações em A da seguinte forma:

$\alpha, \beta \in A$, $\alpha\beta = 0$ se $Q(\alpha) = (i_1, j_1)$, $Q(\beta) = (i_2, j_2)$, $i_1 \neq j_2$, e será o caminho $(j_1 | \alpha\beta | i_2)$ se $i_1 = j_2$. Temos que $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$, e $e_i \cdot e_i = e_i$; $e_i \cdot a = 0$ se $Q(a) = (k, l)$ com $l \neq i$ e $e_i a = a$ se $l = i$; $a e_i = a$ se $i = k$ e $a \cdot e_i = 0$, $i \neq k$.

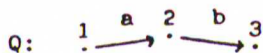
Com estas operações, o k -espaço vetorial cuja base são os caminhos de Q é uma álgebra associativa sobre k , com elemento unidade $1 = \sum_{i \in V} e_i$ quando V é finito.

Proposição 1: $\dim_k A$ é finita \Leftrightarrow o número de caminhos é finito.

Proposição 2: o ideal gerado pelas flechas é nilpotente maximal.

Definição 3: Uma k -representação de Q é um par (M, ϕ) consistindo de um conjunto $M = (M_i : i \in V)$ de k -espaços de dimensão finita, e um conjunto $\phi = \{\phi_a : a \in A\}$ de funções lineares $\phi_a : M_i \rightarrow M_j$, onde i é a origem e j o extremo da flecha a .

Sejam M, N : k -representações de Q , onde:



Um morfismo $\alpha : M \rightarrow N$ é uma família $\alpha = (\alpha_v)_{v \in V}$ de aplicações lineares $\alpha_v : V_v \rightarrow V'_v$ que torna comutativo o

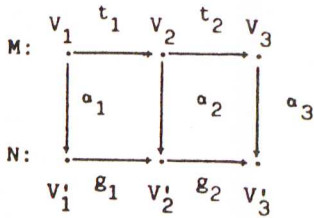


diagrama correspondente. α será isomorfismo quando cada α_v for um isomorfismo. As k -representações de Q podem ser interpretadas como os módulos finitamente gerados sobre a álgebra A .

BIBLIOGRAFIA:

- [1] Polcino Milies, C. - Anéis e Módulos, IME-USP, 1972.
- [2] Felzenswalb, B. - Álgebras de dimensão finita, 12ª CBM, 1979.
- [3] Merklen, H. - Representaciones de aljabas y el Teorema de Gabriel, VII Escola de Álgebra, Campinas, 1982.