

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações
e Controle

ISSN 1517-3550

BT/PTC/9909

Análise de Estabilidade e
Síntese de Sistemas Híbridos

Diego Colón
Felipe Miguel Pait


São Paulo – 1999

1065899

O presente trabalho é um resumo da dissertação de mestrado apresentada por Diego Colón sob orientação do Prof. Dr. Felipe Miguel Pait.: "Análise de Estabilidade e Síntese de Sistemas Híbridos", defendida em 28/09/99, na Escola Politécnica.

A íntegra da dissertação encontra-se à disposição com o autor e na Biblioteca de Engenharia Elétrica da Escola Politécnica/USP.

FICHA CATALOGRÁFICA

Colón, Diego

Análise de estabilidade e síntese de sistemas híbridos / D. Colón, F.M. Pait. -- São Paulo : EPUSP, 1999.

12 p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, BT/PTC/9909)

1. Sistemas híbridos 2. Sistemas chaveados 3. Controle linear I. Pait, Felipe Miguel II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle III. Título IV. Série

ISSN 1517-3550

CDD 003.74

621.381537

629.8312

Análise de Estabilidade e Síntese de Sistemas Híbridos*

Diego Colón

Orientador: Felipe Miguel Pait

Departamento de Engenharia Eletrônica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Artigo Técnico da Dissertação de Mestrado

Agosto de 1999

Resumo

Este artigo investiga o problema de estabilizar um sistema linear invariante no tempo usando a chamada realimentação híbrida. Esta técnica dá origem a um sistema híbrido formado por um par de sistemas lineares invariantes no tempo de segunda ordem. Define-se aqui o que são sistemas híbridos e por fim, apresenta-se o autômato que realiza o chaveamento de forma a estabilizar o sistema híbrido.

mostra alguns exemplos de autômatos que estabilizam (1), da seguinte forma:

1. Faz-se a realimentação de saída $v = -3y$ de modo a se obter um segundo oscilador harmônico.
2. Projeta-se um autômato que chaveia entre estes dois sistemas de modo que a trajetória seja assintoticamente estável para qualquer estado inicial.

1 Motivação

No artigo [1], Artstein propõe o seguinte problema:
Dado um oscilador harmônico simples como em:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (2)$$

é sabido que não é possível estabilizar este sistema com realimentação de saída sem se usar um observador de estados. Para se implementar um observador de estados, é necessário que se tenha uma memória de ponto flutuante para se armazenar o valor do estado do observador a cada passo de integração algorítmico.

Será que é possível utilizar um autômato finito de dois estados que estabilize tal sistema sem a necessidade do observador? Artstein, no seu artigo,

No artigo [1], o segundo sistema, obtido por realimentação de saída feita no primeiro, é:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

Chamando este sistema de A_2 e o anterior de A_1 , o autômato que estabiliza (1) aparece na figura 1.

O valor δ é o tempo de permanência no estado 1, o que significa que o sistema A_1 permanece em funcionamento este período de tempo. $3\pi/4$ é o tempo de permanência em 2, o que significa que A_2 permanece em funcionamento por $3\pi/4$ segundos. $\xi(tr.)$ é o valor do estado ξ no instante da transição de estado do autômato.

Tal autômato estabiliza o sistema (1) assintoticamente, de modo que se justifica um estudo mais aprofundado da estabilização via autômatos.

*Esta pesquisa foi patrocinada pelo CNPq, processo 130546/98-4

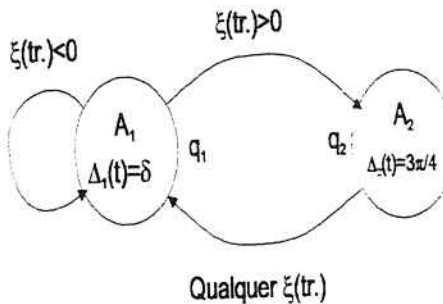


Figura 1: Autômato estabilizante

2 Sistemas Híbridos

2.1 Definição

Um sistema híbrido é um sistema dinâmico formado por duas partes (subsistemas):

- A primeira, à qual se chama de **parte contínua**, é uma família de sistemas de tempo contínuo e espaço de estados contínuo $\dot{x}(t) = f_p(x)$, com $\{f_p : p \in \mathcal{P}\}$ e onde $\mathcal{P}$ é um conjunto compacto. A cada sistema desta família chama-se de **sistema componente contínuo**.
- A segunda, à qual se chama **parte lógica**, é um sistema dinâmico também de tempo contínuo, porém com um conjunto enumerável de estados.

Estas duas partes interagem com as seguintes características:

- A cada estado da parte lógica está associado um sistema componente contínuo.
- Uma mudança de estado da parte lógica acarreta a troca do sistema componente contínuo que está em funcionamento (chaveamento).
- Durante o intervalo de tempo entre chaveamentos, a parte lógica fica inativa e, um e somente um dos sistemas da parte contínua permanece funcionando.
- O próximo sistema componente contínuo que entrará em funcionamento, assim como a duração deste funcionamento, dependem da dinâmica da parte lógica.

- A parte lógica tem como entrada informações obtidas da saída do sistema componente contínuo que está em funcionamento.

A parte contínua, evidentemente, é descrita por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (uma para cada sistema componente contínuo) e a parte lógica é descrita por *autômatos finitos temporizados*.

Parte-se agora para um estudo mais detalhado dos sistemas híbridos, porém já particularizando este estudo para o caso que será abordado neste artigo, que é aquele onde a parte contínua é formada por dois sistemas de segunda ordem lineares invariantes no tempo, isto é, $f_p(x) = A_p x$ com $A_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $\mathcal{P} = \{1, 2\}$.

2.2 Descrição da Parte Contínua

Seja $\{A_1, A_2\}$, com $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, o conjunto das matrizes-A dos sistemas componentes contínuos e $u : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1\}$ o **sinal de chaveamento**, que é o sinal gerado pela parte lógica e que determina o sistema componente contínuo que está em funcionamento. A equação:

$$\dot{x}(t) = [u(t)A_1 + (1 - u(t))A_2]x(t)$$

descreve a parte contínua do sistema híbrido (dado o sinal de chaveamento).

Olhando esta equação, pode-se ver que quando $u(t) = 1$ para $t \in [t_1, t_2]$ com t_1 e t_2 e $t_1 < t_2$ quaisquer, o sistema componente contínuo que está ativo é aquele cuja matriz-A é A_1 . Se, por outro lado, $u(t) = 0$ para $t \in [t_1, t_2]$ com t_1 e t_2 e $t_1 < t_2$ quaisquer, então o sistema componente que está ativo é aquele cuja matriz-A é A_2 .

O espaço de estados para cada sistema componente contínuo é, evidentemente, o $\mathbb{R}^2$. A trajetória de estados da parte contínua é contínua e suave por trechos e, à cada trecho, corresponde um sistema componente contínuo, que é aquele que estava em funcionamento naquele período.

2.3 Descrição da Parte Lógica

Definição 1 (Autômatos Finitos) Um *autômato finito*, segundo [2], é um sistema (Q, I, ν, q_0) , onde:

- Q é um conjunto finito de estados (espaço de estados).

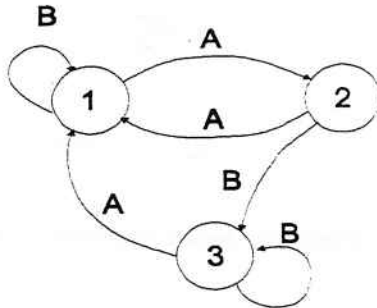


Figura 2: Exemplo de autômato finito

- I é um alfabeto de entrada, ou seja, um conjunto finito de símbolos que participam da mudança de estado.
- ν é uma função de transição de estados de $Q \times I$ em Q .
- q_0 é o estado inicial.

Dados uma sequência de entrada (com elementos de I), uma particular função de transição de estados ν e um estado inicial q_0 , pode-se calcular toda sequência de estados a partir de q_0 .

Exemplo

Seja o seguinte autômato finito (que, graficamente, tem a representação da figura 2):

$$\begin{aligned}
 Q &= \{1, 2, 3\} \\
 I &= \{A, B\} \\
 \nu &= \{(1, B) \rightarrow 1, (1, A) \rightarrow 2, \\
 &\quad (2, A) \rightarrow 1, (2, B) \rightarrow 3, \\
 &\quad (3, A) \rightarrow 1, (3, B) \rightarrow 3\} \\
 q_0 &= 1
 \end{aligned}$$

Se for dada uma sequência de entrada $E = \{A, A, B, A, B, B\}$, a sequência de estados será $q = \{1, 2, 1, 1, 2, 3, 3\}$.

Até aqui, o conceito de tempo esteve ausente, pois só trabalhamos com sequências. Define-se o

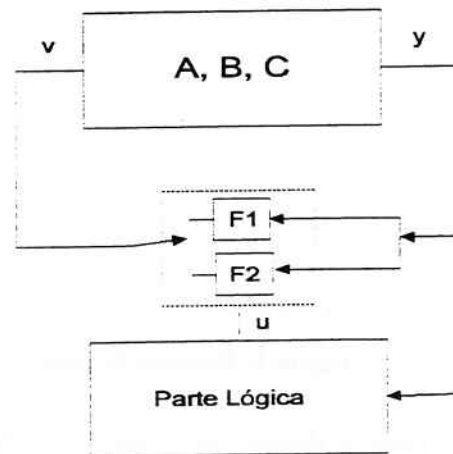


Figura 3: Diagrama de blocos de um sistema híbrido

tempo de permanência no estado q , $\Delta_q(t)$, como o tempo em que o autômato fica no estado q . Este tempo pode ser diferente a cada vez que o autômato muda para este estado.

Os tipos de autômatos finitos temporizados encontrados são dois:

1. Fixos: quando o tempo de permanência para cada estado Δ_q é fixo.
2. Dependentes da Parte Contínua: quando Δ_q é diferente cada vez que se volta àquele estado.

2.4 Sistema Completo

Considere a equação da parte contínua:

$$\dot{x}(t) = [u(t)A_1 + (1 - u(t))A_2]x(t)$$

e seja $y : [0, \infty) \rightarrow R$ uma saída definida como sendo uma combinação linear das variáveis de estado. A interação entre as partes é da seguinte forma:

- A parte lógica atua na parte contínua através do sinal $u(t)$.
- A parte contínua influencia a parte lógica através da saída $y(t)$, que vai se expressar no alfabeto de entrada I . Quando o autômato temporizado for fixo (Δ_q fixo), a parte lógica lê o valor da saída $y(t)$ no instante de transição entre estados e determina, de acordo com uma

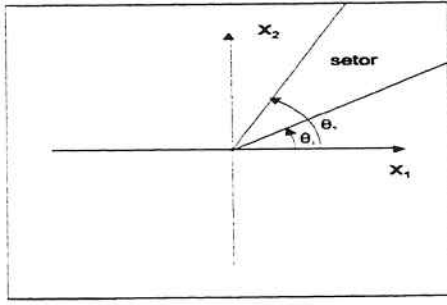


Figura 4: Exemplo de setor

regra, o elemento de I que vai ser fornecido ao autômato.

3 Algumas Propriedades de Sistemas Lineares

Seja um sistema linear invariante no tempo de segunda ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (3)$$

onde $A \in R^{2 \times 2}$, $B \in R^{2 \times 1}$ e $C \in R^{1 \times 2}$ são matrizes constantes.

Definição 2 (Setor) Chama-se de setor $\theta_2 - \theta_1$ o subconjunto do R^2 representado na figura 4. Evidentemente, duas retas passando pela origem vão dividir o plano em quatro setores.

Propriedade 1 (Tempo de percurso) O tempo para uma trajetória percorrer o setor $\theta_2 - \theta_1$ depende de θ e dos coeficientes do sistema a, b, c e d , de modo que pode-se fazer a seguinte integração:

$$\Delta t = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{c \cos^2 \theta - b \sin^2 \theta + \frac{d-a}{2} \sin 2\theta} \quad (4)$$

que é o tempo de percurso do trecho da trajetória dentro do setor $\theta_2 - \theta_1$ para qualquer trajetória.

4 Realimentação Híbrida

O problema da realimentação híbrida é dividido em duas partes:

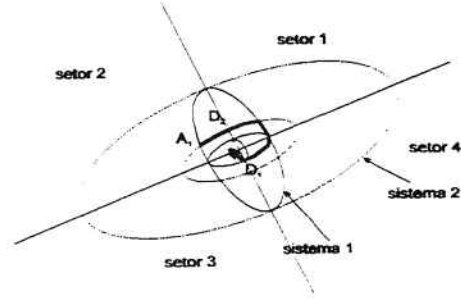


Figura 5: Melhor trajetória: 2 centros

1. Dado um sistema como em (4), obter o par de sistemas através das realimentações f_1 e f_2 (que são escolhidas pelo projetista) da figura 3, de modo que o par de sistemas resultantes (com matrizes-A sendo $A - BCf_1$ e $A - BCf_2$) e sendo que a matriz de entrada e a de saída são as mesmas para ambos) sejam tais que se possa projetar um autômato que as estabilize.
2. Tendo o par de sistemas, projetar o autômato estabilizante de acordo com as regras que serão estudadas a seguir.

Nota

Para escolher f_1 e f_2 , é útil usar o diagrama do lugar das raízes, pois se pode ver, para cada valor de f_1 e f_2 , os pares de pólos e o zero do sistema e assim fazer uma boa escolha.

As respostas para algumas destas perguntas, serão dadas a seguir:

Estudou-se autômatos para estabilização dos seguintes pares de sistemas: (centro, centro), (centro, foco instável), (centro, sela), (foco instável, sela), (centro, nó instável), (foco instável, nó instável). Estes serão estudados agora.

4.1 (Centro, Centro)

4.1.1 Setores favoráveis ao chaveamento

Seja o espaço de estados na figura 5. Se o sistema 2 estiver em funcionamento, os setores favoráveis ao chaveamento são 1 e 3, pois a trajetória irá se desviar para a região interior à órbita atual, como

se pode ver. Se o sistema 1 estiver em funcionamento, os setores favoráveis são 2 e 4. Os eixos desenhados indicam os lugares geométricos onde os campos dos sistemas componentes contínuos são paralelos.

Pode-se sempre determinar, para o caso de par de centros, estas regiões de forma analítica. Para isso, tem-se que usar uma função de Lyapunov cujas curvas de nível são as órbitas de um dos sistemas e determinar $\dot{V}$ para outro sistema. Os setores favoráveis ao chaveamento são fundamentais para o projeto do autômato, como será visto mais em frente.

4.1.2 Algoritmo de chaveamento

Voltando ao exemplo da motivação, será analisado um pouco melhor o autômato da figura 1. Adotando-se a função de Lyapunov candidata $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ e aplicando-se para o sistema 1, ou seja, determinando-se $\dot{V}$, não ocorre "perda de energia", pois as curvas de nível de V são as próprias órbitas do sistema. Já para o sistema 2, $\dot{V} = -3x_1x_2$, logo $\dot{V} < 0$ para os quadrantes 1 e 3 e $\dot{V} > 0$ para os quadrantes 2 e 4. Isto significa que se houver chaveamento do sistema 1 para o 2 nos quadrantes 1 e 3 (setores favoráveis), a trajetória irá para a região interna da órbita atual.

A idéia central deste autômato é:

1. Levar a trajetória para perto do eixo x_2 ($\ker C$) guiando-se pelos valores da saída $y = x_1$;
2. Quando $y > 0$, chavear para o sistema componente contínuo com perdas (sistema 2) e permanecer por três quartos do período deste sistema.
3. Voltar ao item 1.

A figura 6 mostra as curvas de nível de $\dot{V}$.

Este algoritmo é válido somente para o caso particular do sistema em questão. Pode-se, porém, generalizar a mesma idéia para o caso onde tem-se um par de centros quaisquer.

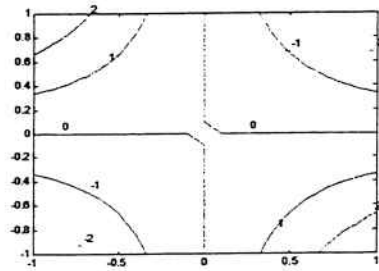


Figura 6: Curvas de nível do produto vetorial para o exemplo da motivação

4.1.3 Generalização do algoritmo para par de centros qualquer mas C dependente do par

Sabe-se, do exemplo da motivação que, para o par de centros em questão, os lugares geométricos onde os campos são paralelos são retas passando pela origem e os quatro setores resultantes são regiões favoráveis ou desfavoráveis ao chaveamento.

Para um par de centros qualquer, esta propriedade continua válida, embora as retas não necessariamente sejam ortogonais e os setores não terão a mesma abertura (exceto os que são radialmente opostos).

Seja δ_1 o tempo necessário para se percorrer os setores 1 e 3 e δ_2 o tempo necessário para se percorrer setores 2 e 4 (vide figura 7).

Suponha que a matriz C é tal que $\ker C$ (onde $y = 0$) coincide com a primeira reta onde os campos são paralelos (vide figura 7).

O autômato de Artstein generalizado para este caso está representado na figura 8. O seguinte roteiro para o projeto deste autômato foi obtido:

1. Adotar como função de Lyapunov candidata aquela cujas curvas de nível são as órbitas do sistema 1;
2. Determinar quais os setores favoráveis a 1, isto é, quais os setores onde $\dot{V} < 0$. O tempo de percurso desses setores é δ_1 . O tempo de percurso dos setores desfavoráveis é, pois, δ_2 ;
3. Calcular δ_1 e δ_2 .

Feito isso, já se tem todos os valores necessários para o projeto (o parâmetro δ é determinado

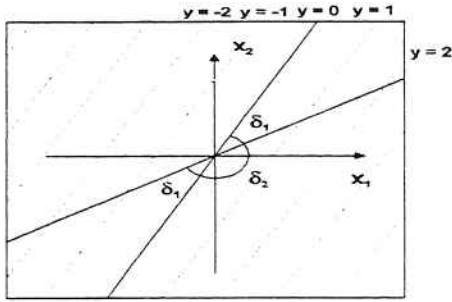


Figura 7: Aspecto do espaço de estados para um par de centros qualquer com curvas de $\ker C = K$ quaisquer

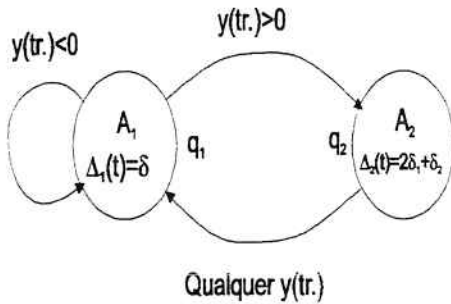


Figura 8: Autômato 1 generalizado

experimentalmente, mas certamente ele deve ser muito menor que δ_2). A seguir, dá-se um exemplo de tal projeto.

4.1.4 Exemplo

Seja um par de centros cujas matrizes-A são:

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} -0.3248 & 0.4375 \\ -0.8125 & 0.3248 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3248 & 0.4375 \\ -0.8125 & -0.3248 \end{bmatrix}$$

1. Adota-se a função de Lyapunov candidata cujas curvas de nível são as órbitas do sistema 1. Então, esta função terá a matriz ($x^T U A_1 x \equiv 0$):

$$U = \begin{bmatrix} 0.8125 & -0.3248 \\ -0.3248 & 0.4375 \end{bmatrix}$$

2. Derivando esta função de Lyapunov candidata e substituindo o sistema 2, tem-se que a matriz de $\dot{V}$ é dada pela fórmula $W = A_2^T U + U A_2$, o que resulta em:

$$W = \begin{bmatrix} 1.0556 & 0 \\ 0 & -0.5684 \end{bmatrix}$$

Por fim, a função de Lyapunov derivada fica:

$$\dot{V} = 1.0556x_1^2 - 0.5684x_2^2 \quad (5)$$

3. Para achar o lugar geométrico onde $\dot{V} = 0$, ou seja, onde os campos são paralelos, usa-se (5) de modo que:

$$1.0556x_1^2 - 0.5684x_2^2 = 0$$

o que resulta em:

$$x_2 = \pm 1.8571x_1 \quad (6)$$

4. Adota-se $\ker C$ coincidindo com a reta $x_2 = -1.8571x_1$ de (6), de modo que $C = [1.8571, 1]$ (pois o autômato só funciona para este caso).
5. Para se determinar δ_1 e δ_2 , (os autovalores do sistema 2 são $\pm j0.5$ então $\omega_0 = 0.5$ e $T = 4\pi$), calcula-se δ_1 através da integral em 4. Substituindo os valores, resulta em $\delta_1 = 2.4244$.
6. Pode-se calcular δ_2 pela fórmula $2\delta_1 + 2\delta_2 = \frac{2\pi}{\omega_0} = T$, que resulta: 3.8588
7. O tempo de permanência no estado 2 é, então (vide figura 8): $2(2.4244) + 3.8588 = 8.7076$. Desta forma, já se tem tudo o que é necessário para o projeto do autômato.

A figura 9 mostra uma simulação para estado inicial do autômato q_2 , estado inicial da parte contínua $[-1, 1]^T$, tempo de simulação de 50 segundos e parâmetro $\delta = 0.05$.

4.1.5 Generalização para C qualquer

O autômato anterior tem uma restrição sobre C , isto é, ele só funciona para $\ker C$ sendo uma das retas que delimitam a região favorável. Para que se possa trabalhar com C qualquer, é necessário modificar um pouco o autômato, acrescentando-lhe um estado. Este novo autômato está representado na figura 10.

A explicação deste algoritmo é a seguinte:

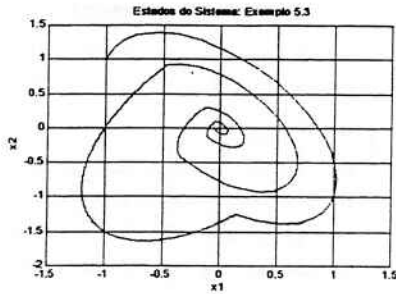
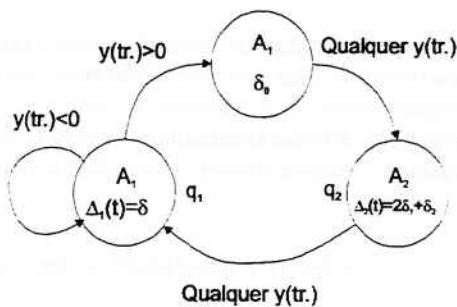


Figura 9: Exemplo de projeto (centro, centro)

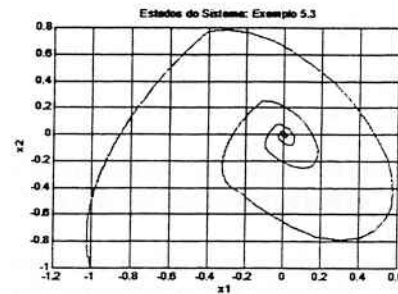
Figura 10: Autômato para (centro, centro) e C qualquer

1. Levar a trajetória para perto da reta $\ker C = 0$ guiando-se pelos valores da saída y ;
2. Permanecer ainda no sistema 1 por um tempo δ_0 até se atingir a vizinhança da reta limite da região favorável.
3. Chavear para o sistema componente contínuo com perdas (sistema 2) e permanecer por $2\delta_1 + \delta_2$.
4. Voltar ao item 1.

É necessário, além de δ_1 e δ_2 que se calcule δ_0 , o que se consegue usando a integral (4). A seguir, dá-se um exemplo de projeto usando esta técnica.

4.1.6 Exemplo

Supondo que $C = [0, 1]$, ou seja $y = x_2$ e com o mesmo par de sistemas do exemplo anterior (de modo que a região favorável é a mesma). Tem-se que calcular o tempo de percurso do setor entre x_2 e a reta $x_2 = -1.8571x_1$, mas para o sistema 1. Usando a fórmula (4), obtem-se $\delta_0 = 1.1610$. Já

Figura 11: Trajetória para (centro, centro) e C qualquer

se tem então todos os elementos para projetar o autômato.

Fazendo a simulação para estado inicial do autômato q_1 , estado contínuo inicial $[-1, -1]^T$, tempo de simulação de 100 segundos e parâmetro $\delta = 0.05$, obtem-se a trajetória de estados na figura 11.

4.2 (Centro, Foco Instável)

Definição 3 Seja um sistema como em (7) com $b > 0$. Tomando-se o mesmo sistema com $b = 0$, obtem-se o centro correspondente ao foco.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx \quad (7)$$

4.2.1 Algoritmos para estabilização

Estudou-se até aqui autômatos para estabilizar um par de centros qualquer e C qualquer, o que foi uma generalização do autômato de Artstein. Deseja-se agora generalizar esse autômato para o caso onde um dos sistemas componentes contínuos é um foco. Para isso, adota-se aqui o *balanço de energia*, isto é, desde que a perda de energia na região favorável compense o ganho na região desfavorável, o autômato estabiliza o sistema.

Inicialmente, generaliza-se o autômato na figura 8 para A_2 sendo foco. Sendo A_1 o centro, a técnica de projeto é:

1. Determinar a região favorável tomando a função de Lyapunov candidata cujas curvas de nível são as órbitas de A_1 . Calcular $\dot{V}$ para A_2 .

2. Calcular os tempos δ_1 e δ_2 .
3. Assumir C tal que $\ker C$ coincida com a reta limite da região favorável.

O aspecto do espaço de estados ficaria como na figura 7, embora neste caso um dos sistemas é foco instável.

Pode-se também generalizar o projeto para C qualquer, de modo que o algoritmo fica como na figura 10. Será dado agora um exemplo de projeto.

4.2.2 Exemplo

Sejam os sistemas dados em (8). Adotando-se $C = [0, 1]$ e a função de Lyapunov candidata aquela cujas curvas de nível são as órbitas de A_1 , então ela será: $V = \frac{1}{2}(4x_1^2 + x_2^2)$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ -1 & \beta \end{bmatrix} \quad (8)$$

Achando $\dot{V}$ para o sistema A_2 e igualando a zero, tem-se:

$$\dot{V} = 4\beta x_1^2 + 3x_1x_2 + \beta x_2^2 = 0$$

As retas limites do setor favorável são obtidas resolvendo esta equação para x_2 :

$$x_{2,1} = \frac{1}{\beta}(-3 + \sqrt{9 - 16\beta^2})x_1$$

$$x_{2,2} = \frac{1}{\beta}(-3 - \sqrt{9 - 16\beta^2})x_1$$

Os setores favoráveis são aqueles entre a reta da primeira equação e a reta da segunda, caminhando no sentido horário. Observa-se que a medida que se vai aumentando β , menor vai ficando a abertura do setor favorável. De fato, o setor favorável desaparece quando $\beta = \frac{3}{4}$.

O passo seguinte para se determinar o autômato para este par achar δ_1 e δ_2 de modo a substituir no autômato da figura (8) e o projeto estaria completo (se o projeto fosse para C qualquer, ter-se-ia que calcular δ_0 para substituir no autômato da figura 10). Como o projeto é semelhante ao (centro, centro), em vez de dar outro exemplo, tentar-se-á achar qual seria o valor de β máximo tal que o sistema ainda pudesse ser estabilizado pelo autômato 8 (10).

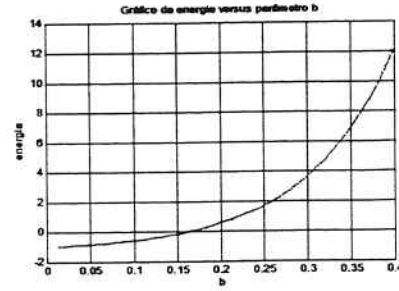


Figura 12: Energia em função de β

A fase de trocas de energia deste algoritmo é obviamente a fase em que o sistema componente contínuo ativo é o sistema 2, que é o foco (a energia do sistema permanece constante enquanto o sistema 1 estiver ativo). Dessa forma a integral :

$$\int_0^{2\delta_1 + \delta_2} (4\beta x_1^2(t) + 3x_1(t)x_2(t) + \beta x_2^2(t))dt \quad (9)$$

é a energia adquirida durante a fase de troca por ciclo. Se o seu valor for positivo, significa que o autômato não funciona, pois o sistema estaria adquirindo energia. Se for negativo, então o autômato estabiliza o sistema híbrido para aquele valor de β .

Como é muito difícil (ou talvez impossível) esperar uma resposta analítica (em função de β) desta integral, pode-se resolvê-la numericamente, dando-se valores de β . Resolvendo-se, então, a integral para o intervalo de valores de β $[0.01, .4]$, e passo 0.01, obtem-se o gráfico da energia adquirida em função de β mostrado na figura 12. Vê-se que para β acima de aproximadamente 0.17, o sistema híbrido é instável (este é β_{crit})

4.2.3 Aspectos práticos

As considerações de trocas de energia que foram feitas consideraram que o sistema 2 (sistema com perdas) funcionava por um tempo igual a $2\delta_1 + \delta_2$. Entretanto, devido a δ ser um valor finito (e não infinitésimo), o chaveamento do sistema 1 para 2 nunca ocorrerá tão logo $y = 0$, porém, algum tempo depois. Já que não se conhece o estado inicial contínuo, fica impossível saber este tempo. Da mesma forma, como o sistema 2 deve funcionar por um tempo determinado pelo projetista, o sistema

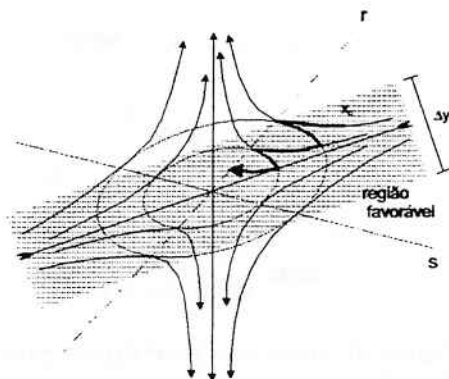


Figura 13: Fluxos de sistema (centro, sela)

1 voltará a funcionar algum tempo depois do que o esperado no caso ideal de δ infinitamente pequeno, logo, só se poderia estabilizar um par cujo foco tem β próximo do crítico se δ fosse muito pequeno. Quanto maior δ , menor será o β máximo.

4.3 (Foco Instável, Foco Instável)

Nos pares (centro, centro) e (centro, foco instável), podia-se sempre distinguir o sistema 1 como aquele onde não ocorre trocas de energia. Adotava-se a função de Lyapunov candidata como sendo a que tinha curvas de nível iguais às órbitas do centro e o procedimento de projeto era igual.

Para o caso de dois focos, não se pode utilizar esse método de projeto pois as órbitas do foco não são fechadas, por isso, não vamos abordá-lo aqui. Porém, fica como sugestão para pesquisas futuras como determinar qual função de Lyapunov é conveniente para esse projeto e determinar o autômato.

4.4 (Centro, Sela)

4.4.1 Algoritmo de chaveamento

Inicialmente, supõe-se que C seja tal que $\ker C$ coincida com a variedade estável da sela, posteriormente, será generalizado para C qualquer.

Seria muito fácil fazer um algoritmo de chaveamento sabendo-se quando a trajetória escapa da região favorável passando por uma das retas r ou s (vide figura 13. Bastaria, para isso ter duas saídas $y_1 = C_1 x$ e $y_2 = C_2 x$ tais que $\ker C_1$ coincide com r e $\ker C_2$ coincide com s .

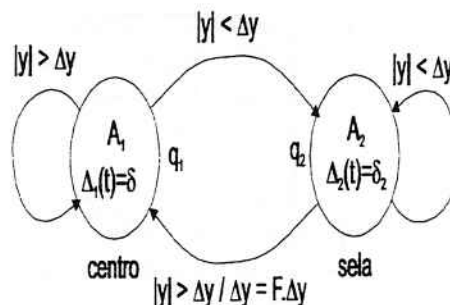


Figura 14: Autômato para o caso (centro, sela)

Entretanto, a proposta é projetar algoritmos para sistemas que só tenham uma saída. Para isso, utiliza-se a chamada região Δy . Esta região, que está hachurada na figura 13, é formada pelas retas paralelas a $\ker C$ tal que a cada y pertencente a $[-\frac{\Delta y}{2}, \frac{\Delta y}{2}]$ corresponde uma dessas retas (com $\ker C$ correspondendo a $y = 0$).

O funcionamento é o seguinte:

1. Dá-se um valor de Δy que permanece fixo;
2. Levar a trajetória para dentro da região Δy usando o centro;
3. Estando a trajetória próxima de $\ker C$, chavear para a sela;
4. Quando a trajetória sair da região Δy , o que pode ser detectado quando $|y| > \Delta y$, chavear de volta para o centro e recomeçar a partir do passo 2.

Isso faz com que a trajetória se aproxime da origem na direção da variedade estável, mas não é suficiente para garantir estabilidade segundo Lyapunov. É necessário que Δy seja diminuído de modo a confinar a trajetória em regiões cada vez menores ao redor da origem. Para isso, deve haver uma memória para armazenar o valor de Δy e uma operação para diminuir seu valor.

A figura 14 mostra o autômato que estabiliza um sistema (centro, sela). O parâmetro F é a fator de redução da largura da região Δy . Os parâmetros δ_1 e δ_2 são ajustados para que sempre se faça pelo menos uma verificação de y dentro da região Δy . A figura 13 mostra o tipo de trajetória num sistema (centro, sela).

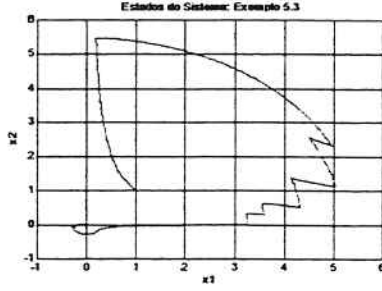


Figura 15: Trajeória para sistema (centro, sela)

4.4.2 Exemplo

Seja o par de sistemas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Aqui, A_1 é um centro e A_2 é uma sela. A figura 15 é um exemplo onde o estado inicial do autômato é q_2 , o estado inicial contínuo é $[1, 1]^T$, o tempo de simulação é 20 e os parâmetros são $\delta_1 = 0.1$ e $\delta_2 = 0.1$.

4.4.3 Generalização para C qualquer

O próximo passo é generalizar o algoritmo para C qualquer. O autômato generalizado está na figura 16. Um estado adicional foi acrescentado. Pode-se facilmente entender o que este autômato faz olhando para a figura 16. Ao atingir a região Δy , o estado muda (embora o sistema componente contínuo ainda seja o mesmo) e permanece no centro por um tempo δ , que é o tempo para ir de $\ker C$ até a variedade estável. Os outros parâmetros δ_1 e δ_2 devem ser ajustados por simulação. O segundo, que é o tempo que se permanece na sela, não deve ser muito grande, senão a trajetória pode se afastar muito da origem até chavear para o centro. Também não pode ser muito pequeno, pois a convergência para a origem seria lenta.

A seguir, faz-se uma simulação para estado inicial do autômato q_2 , estado inicial contínuo $[1, -1]^T$, tempo de simulação 30, parâmetros $\delta = 0.785$, $\delta_1 = 0.1$ e $\delta_2 = 1$. Da mesma forma como no anterior, os sistemas são os mesmos, mas $C = [-1, 1]$, $F = 0.5$ e $\Delta y_0 = 1$. A simulação está na figura 17.

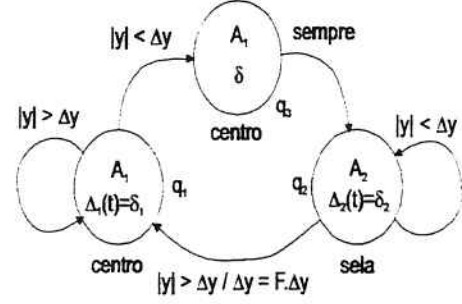
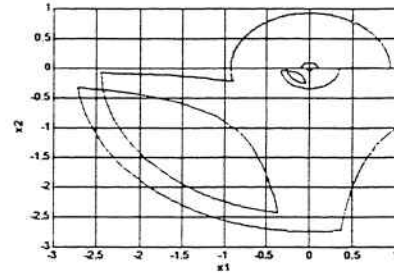
Figura 16: Autômato generalizado para o caso de C qualquer para (centro, sela)

Figura 17: Exemplo de trajetória para sistema (centro, sela) generalizado

4.5 (Foco Instável, Sela)

O algoritmo para se estabilizar este tipo de par é essencialmente o mesmo que o par (centro, sela), pois o papel do centro foi o de levar para a região Δy a trajetória de estados. Esta tarefa também pode ser feita pelo foco, porém, quanto maior for β , mais lenta é a convergência, pois o foco afasta a trajetória da origem.

4.6 (Centro, Nó Instável)

Neste caso, volta a ter importância a região favorável definida por função de Lyapunov (como no (centro, centro)), porém, como nos dois últimos casos, o tipo de autômato que funcionou bem para estabilizar (centro, centro) e (centro, foco instável) não funciona aqui. Deseja-se obter uma trajetória do tipo daquela na figura 18. Isto pode ser conseguido usando-se um autômato estabilizante como na figura 19.

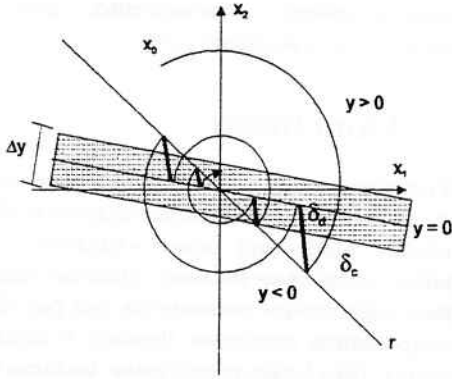


Figura 18: Exemplo de trajetória de um sistema (centro, nó instável)

4.6.1 Algoritmo

O autômato que realiza a estabilização está na figura 19. Como se pode ver, o centro sempre leva a trajetória para a região (setores) favorável (na figura 18, a região delimitada pela reta $y = 0$ e pela reta r onde está ocorrendo chaveamento). Quando ocorre a detecção de $y = 0$, passa-se para o estado q_d , que é centro, e permanece-se por um tempo δ_c , o tempo necessário para cruzar a região favorável. Ao final deste tempo, chaveia-se para q_n e permanece-se por δ_n (tempo para a trajetória cruzar a região favorável quando o sistema em funcionamento é o nó) e reinicia-se o ciclo.

O recurso da região Δy , usado no caso (centro, sela) e (foco instável, sela) é também usado aqui.

4.6.2 Técnica de projeto

1. Fixar a função de Lyapunov candidata como sendo aquela cujas curvas de nível são as órbitas do centro;
2. Achar $\dot{V}$ para o sistema nó.
3. Igualar $\dot{V}$ a zero de modo a obter a equação das curvas de nível para $V = 0$.
4. Calcular os tempos δ_c e δ_n .

4.6.3 Exemplo

Uma simulação foi feita para o seguinte sistema:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

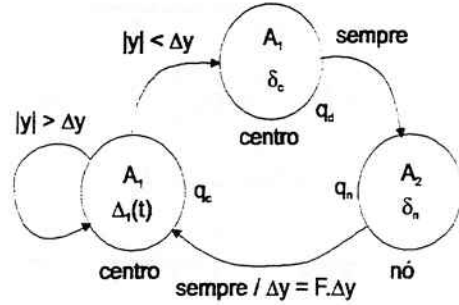


Figura 19: Autômato para o caso (centro, nó instável)

A função de Lyapunov candidata adotada é

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

então:

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$$

substituindo o sistema 2:

$$\dot{V} = 0.1x_1^2 + x_1x_2 + 0.1x_2^2$$

As curvas de nível correspondentes a $\dot{V} = 0$, obtidas resolvendo a equação de x_2 em função de x_1 são as retas:

$$x_2 = -0.1010x_1 \quad (12)$$

$$x_2 = -9.8998x_1 \quad (13)$$

Para calcular os parâmetros δ_c e δ_n usa-se a fórmula (4). Os resultados são $\delta_c = 1.3694$ e $\delta_n = 9.7962$.

A simulação que foi feita foi para os seguintes dados: estado do autômato inicial q_c , estado contínuo inicial $[10, 0]^T$, tempo de simulação de 50 segundos parâmetros $\delta_1 = 0.1$, $\delta_c = 1.2$ e $\delta_n = 2.47$. A figura que mostra a trajetória é 20. Os valores de δ_c e δ_n devem ser menores que os calculados (isso se determina experimentalmente, por tentativa e erro, de modo que a convergência seja a mais rápida possível).

Pode-se generalizar o algoritmo anterior para este caso. Entretanto, deve-se levar em conta que quanto maior for o ganho de energia do sistema foco, menos tempo ele deve permanecer ativo, pois a trajetória se distanciaria muito da origem. Facilmente pode-se generalizar para C qualquer, por isso, não faremos isso aqui.

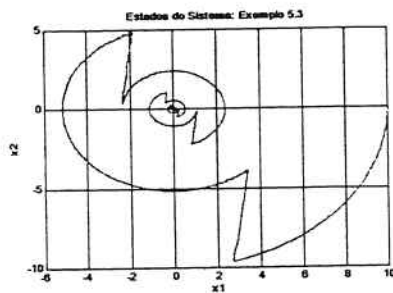


Figura 20: Exemplo de trajetória para sistema (centro, nó instável)

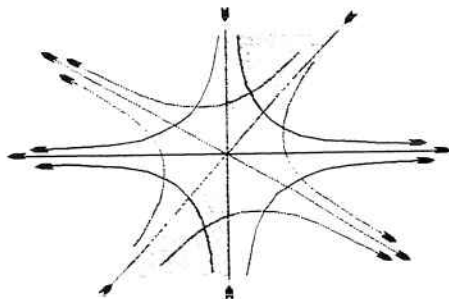


Figura 21: Exemplo de região favorável para (sela, sela)

4.7 (Sela, Sela), (Sela, Nó), (Nó, Nó)

Estes casos têm uma propriedade bastante ruim, que é o fato de nunca ser possível levar uma trajetória para uma região favorável, já que nenhum dos dois sistemas componentes contínuos é um centro ou foco instável. Pode-se exemplificar este fato com o caso de um sistema (sela, sela). Na figura 21, os setores hachurados formam a região favorável ao chaveamento. Qualquer ponto pertencente a essa região pode ser levado à origem através de chaveamento adequado. Qualquer outro ponto em qualquer outra região não pode ser levado à origem, como se pode ver, nem tampouco se pode levá-la para a região hachurada.

Não se conseguiu, até o momento, achar o algoritmo que estabilizasse tais pares, mas um possível ponto de partida seria buscar uma forma de mover a região favorável em direção à trajetória, definindo uma distância entre elas e procurar que esta distância tenda a zero. Tendo isso ocorrido,

bastaria aplicar o chaveamento. Isto fica como sugestão para pesquisa futura.

5 Conclusão

O problema de estabilização para sistemas híbridos, que é o problema mais importante da realimentação híbrida, ainda está pouco estudado. Neste trabalho, estudou-se sistemas híbridos bastante simples, constituídos somente de um par de sistemas componentes contínuos lineares e invariantes no tempo. Não foram encontradas técnicas de projeto para todos os casos de pares. Os casos de pares que foram estabilizados com sucesso tinham uma propriedade em comum, que era o fato de um dos sistemas componentes contínuos ter autovalores complexos (centro e foco instável).

Para se obter os autômatos estabilizantes, buscou-se sempre o menor número de estados e a menor quantidade de memória possível (de preferência nenhuma). Entretanto, em alguns casos, foi necessário usá-la. Buscou-se estudar o maior número possível de pares e dar uma técnica de projeto de autômatos estabilizantes para cada par estudado. O objetivo disto foi montar uma lista de projetos tal que dadas duas triplas de matrizes (C, A, B) , se obtivesse a técnica de projeto correspondente. Os autômatos obtidos não são os únicos possíveis. Talvez se possa obter números de estados e quantidade de memória menores que o que foi conseguido neste trabalho.

Referências

- [1] Zvi Artstein. Examples of stabilization with hybrid feedback. Technical report, Departament of Theoretical Mathematics, The Weizmann Institute of Science, Rehovot 76100, Israel.
- [2] Michael Stephen Branicky. *Studies in Hybrid Systems: Modeling, Analysis, and Control*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, June 1995.

BOLETINS TÉCNICOS - TEXTOS PUBLICADOS

- BT/PTC/9901 – Avaliação de Ergoespirômetros Segundo a Norma NBR IEC 601-1- MARIA RUTH C. R. LEITE, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE B. MORAES
- BT/PTC/9902 – Sistemas de Criptofonia de Voz com Mapas Caóticos e Redes Neurais Artificiais – MIGUEL ANTONIO FERNANDES SOLER, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/9903 – Regulação Sincronizada de Distúrbios Senodais – VAIDYA INÊS CARRILLO SEGURA, PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA
- BT/PTC/9904 – Desenvolvimento e Implementação de Algoritmo Computacional para Garantir um Determinado Nível de Letalidade Acumulada para Microorganismos Presentes em Alimentos Industrializados – RUBENS GEDRAITE, CLÁUDIO GARCIA
- BT/PTC/9905 – Modelo Operacional de Gestão de Qualidade em Laboratórios de Ensaio e Calibração de Equipamentos Eletromédicos – MANUEL ANTONIO TAPIA LÓPEZ, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE BARROS MORAES
- BT/PTC/9906 – Extração de Componentes Principais de Sinais Cerebrais Usando Karhunen – Loève Neural Network – EDUARDO AKIRA KINTO, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PTC/9907 – Observador Pseudo-Derivativo de Kalman Numa Coluna de Destilação Binária – JOSÉ HERNANDEZ LÓPEZ, JOSÉ JAIME DA CRUZ, CLAUDIO GARCIA
- BT/PTC/9908 – Reconhecimento Automático do Locutor com Coeficientes Mel-Cepstrais e Redes Neurais Artificiais – ANDRÉ BORDIN MAGNI, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR

