UM CASO DE INSTABILIDADE DETECTADO POR JATOS NÃO HOMOGÊNEOS

Manuel Valentim de Pera Garcia

Abordamos no presente trabalho o problema de analisar a estabilidade segundo Liapunoff de um ponto de equilíbrio de um sistema mecânico conservativo com energias potencial e cinética π e T respectivamente, com dois graus de liberdade.

A energia potencial $\pi : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ será suposta de classe $C^2(\Omega)$, onde Ω é uma vizinhança aberta da origem O do $\mathbf{R}^2$,a qual será suposta um ponto crítico desta função, com $\pi(O) = 0$.

A energia cinética $T : \Omega \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ estará na classe $C^2(\Omega \times \mathbf{R}^2)$.

Além disso suporemos que π tem *jato punctual de ordem k na origem*, ou seja, que exista um polinômio P de grau menor ou igual a k, tal que:

$$\lim_{q \to O} \frac{(P - \pi)(q)}{\|q\|^k} = 0.$$

Observação:P, quando existe, é único e, se $\pi \in C^k(\Omega)$, então P é o polinômio de Taylor de ordem k de π em O.

Doravante denotaremos o jato punctual de ordem k em O de π por $J^k\pi$.

Um conceito, introduzido por Ângelo Barone Netto em 1980, que será fundamental é o de k-decidibilidade que passamos a definir:

Definição:"Diremos que uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ é k-decidível (em O), se existir J^kf e além disso for possível concluir olhando apenas para esse jato que a origem é um ponto de mínimo, máximo ou não é ponto de extremo de f."

Com as condições impostas à π vemos que $(O;O)$ é um ponto de equilíbrio das equações de Lagrange do sistema mecânico considerado. daqui até o final do trabalho, como é usual, denotaremos este ponto apenas por O, sem distingui-lo da origem do $\mathbf{R}^2$

Lembremos ter Liapunoff provado em 1898 que se π é 2-decidível e não tem mínimo em O então este será um ponto de equilíbrio instável do sistema mecânico considerado. Tal resultado foi generalizado em 1988 por

Moauro e Negrini para o caso em que π é k-decidível e não tem mínimo em O, desde que $J^k\pi$ seja homogêneo (ressaltemos que estes dois teoremas valem no contexto mais geral de n graus de liberdade).

Neste trabalho consideramos apenas o caso de 2 graus de liberdade, mas permitimos ao $J^k\pi$ que contém a informação de π não ter mínimo em O poder ser não homogêneo, provando que, *ao menos genericamente*, também nesta situação a origem é um ponto de equilíbrio instável segundo Liapunoff.

Inicialmente mostramos o seguinte teorema:

Teorema 0: "Suponhamos que π não tem mínimo em O e além disso:

(i) π é k-decidível.

(ii) π não é (k-1)-decidível.

(iii) Se $s < k$ então $J^s\pi$ não é k-decidível.

Então existe uma aberto $U \subseteq \Omega$ com $O \in \partial U$ tal que

$$\pi(q) < 0, \ \forall q \in U,$$
$$< \mathrm{grad}\pi(q) \mid q > \ < 0, \ \forall q \in U \text{ e}$$
$$\pi(q) = 0, \ \forall q \in \partial U."$$

Observação: As hipóteses (i) e (ii) simplesmente dizem que $J^k\pi$ é o primeiro jato que mostra que π não tem mínimo em O. Já a hipótese (iii) tem um carácter puramente técnico e *não é conseqüência das hipóteses anteriores* conforme mostra o exemplo seguinte, onde (i) e (ii) estão verificadas para $k = 6$, mas (iii) não vale, como se vê fazendo $s = 5$: $\pi(q_1; q_2) = q_2^4 - q_1^4 q_2$.

Uma vez provado o teorema 0 temos imediatamente estabelecido o fato seguinte:

Teorema 1: "Nas hipóteses do teorema 0 a origem é um ponto de equilíbrio instável segundo Liapunoff do sistema mecânico de energia $T + \pi$."

Como conseqüência deste nosso resultado segue-se agora o

Corolário: "Nas hipóteses acima se $J^k\pi$ não for homogêneo, mas $J^{k-1}\pi$ o for, então a origem é instável segundo Liapunoff."

Em particular num sistema conservativo com 2 graus de liberdade, se $J^3\pi$ mostra que π não tem mínimo em O esse é um ponto de equilíbrio instável.

Endereço do autor: Instituto de Matemática e Estatística - Departamento de Matemática Aplicada - Caixa Postal 20570 - São Paulo - Capital.