

## IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO MUSTIESCALA MRCM COM RESOLUTORES LOCAIS HDIV PARA O PROBLEMA DE DARCY

**Maria Victória Paulino de Souza**<sup>1</sup> - mariavictoriasouza@usp.br

**Rafael Trevisanuto Guiraldello**<sup>2</sup> - rafaeltrevisanuto@gmail.com

**Roberto Federico Ausas**<sup>1</sup> - rfausas@icmc.usp.br

<sup>1</sup>Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

<sup>2</sup>Piri Technologies, LLC

**Abstract.** *Apresentamos pela primeira vez uma implementação do método multiescala MRCM (Multiscale Robin Coupled Method) com resolutores locais  $H(\text{div})$  gerais em malhas de simplices não estruturadas, na plataforma de elementos finitos de código aberto FeniCS. A implementação é testada em problemas bidimensionais, primeiro, considerando um caso de permeabilidade suave com uma solução manufaturada para avaliar a convergência do método e segundo, num caso de permeabilidade altamente heterogênea para avaliar a qualidade da aproximação quando comparada com a solução de malha fina do problema.*

**Keywords:** *Escoamento de Darcy, Meio poroso, Método Multiescala, Decomposição de Domínio, Elementos Finitos*

### 1. MOTIVAÇÃO

Os métodos multiescala baseados em esquemas de decomposição de domínio não sobrepostos são uma escolha natural para resolver problemas elípticos de grande porte que tipicamente aparecem na simulação de reservatórios de petróleo, principalmente pelos seguintes motivos: (i) Simplicidade de implementação; (ii) Possibilita a inclusão de detalhes de escala fina do problema com reduzido custo computacional; (iii) Potencial de *speed up* ideal em arquiteturas multicore. Neste tipo de métodos a resolução do problema se dá em duas etapas. Primeiro, uma coleção de problemas definidos nos subdomínios são resolvidos. Estes problemas são independentes um dos outros e são resolvidos em paralelo. Segundo, um problema global de dimensão reduzida posto sobre o esqueleto da partição é resolvido para acoplar as soluções locais. Estes métodos podem ser pensados como uma alternativa aos métodos tradicionais de upscaling baseados em teoria de homogeneização, os quais não são inteiramente rigorosos do ponto de vista matemático, pois os problemas típicos encontrados nas aplicações de interesse não admitem separação de escalas. Recentemente, o método multiescala misto MRCM (*Multiscale Robin Coupled Method*) foi introduzido em Guiraldello(2018). Neste os problemas locais nos subdomínios são definidos via imposição de condições de contorno do tipo Robin no esqueleto da partição. O método tem sido extensamente avaliado por Guiraldello(2019), Rocha(2020), Rocha(2021), Guiraldello(2020) e Jaramillo(2021). Nestes trabalhos, a precisão das soluções com respeito às soluções de malha fina são avaliados para diferentes escolhas

de espaços de interface adotados no esqueleto da decomposição do domínio, tais como espaços polinomiais vistos por Guiraldello(2018), Guiraldello(2020), Jaramillo(2020), espaços informados presentes em Guiraldello(2019), Rocha(2020) e espaços baseados na física do problema (Rocha,2021). No entanto, um ponto em comum de todos estes trabalhos é que o método adotado para resolução dos problemas locais nos subdomínios é realizada por um método de volumes finitos de baixa ordem em malhas cartesianas ortogonais. A proposta no presente trabalho é justamente preencher esta lacuna e avaliar outros esquema de discretização espacial para os problemas locais. Fazendo uso da plataforma de elementos finitos de código aberto Fenics (Fenics,2012), iremos testar diferentes espaços conformes  $H(\text{div})$  em malhas não estruturadas de triângulos. Outras formulações baseadas em métodos de Galerkin descontínuo também são possíveis, assim como a possibilidade de realizar refinamentos locais e considerar geometrias não regulares, aspectos estes que não foram considerados até agora nas referências antes citadas.

No que resta do artigo apresentaremos a formulação matemática do problema de Darcy e a sua discretização pelo método de elementos finitos como preparação para introduzir o método de decomposição de domínio multiescala MRCM. Detalhes relacionados com a sua implementação na plataforma de código aberto FeniCS são fornecidos. Na sequência, resultados numéricos são apresentados considerando diferentes combinações de espaços discretos  $H(\text{div})$  nos subdomínios e polinomiais no esqueleto da decomposição. Finalmente, algumas conclusões são apresentadas.

## 2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho consideramos o problema de transporte de massa em meios porosos, o qual é de interesse para a indústria de Óleo e Gás. O problema é governado pela lei de Darcy e a equação de conservação da massa num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ) e pode ser escrito como um sistema não linear de equações a derivadas parciais acopladas, em que as incógnitas a determinar são a velocidade de Darcy  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , a pressão  $p(\mathbf{x})$  e a saturação de uma das fases, por exemplo, a saturação da fase água  $S_w$ , as quais satisfazem o problema elíptico

$$\begin{cases} \mathbf{u} = - \left( \frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(1 - S_w)}{\mu_o} \right) \mathbf{K}(\mathbf{x}) \nabla p & \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega \\ p = \bar{g}_p & \text{sobre } \Gamma_p \\ \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \bar{g}_u & \text{sobre } \Gamma_u. \end{cases} \quad (1)$$

e o problema hiperbólico que governa o transporte da saturação

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi(S_w) \mathbf{u}) = 0 & \text{em } \Omega \\ S_w(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \\ S_w(\mathbf{x}, t) = S_D & \text{em } \Gamma_u^- = \{\mathbf{x} \in \Gamma_u, \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{n}} < 0\} \end{cases} \quad (2)$$

em que  $k_{r\alpha}$  e  $\mu_\alpha$  são respectivamente a permeabilidade relativa e a viscosidade da fase  $\alpha$  ( $\alpha = w, o$ ),  $\mathbf{K} \in [L^\infty(\Omega)]^{d \times d}$  é o tensor de permeabilidades absolutas,  $f \in L^2(\Omega)$  é o termo fonte,  $\tilde{\mathbf{n}}$  é a normal exterior a  $\partial\Omega = \Gamma_p \cup \Gamma_u$ ,  $\Gamma_p$  e  $\Gamma_u$  são as fronteiras de Dirichlet e de Neumann respectivamente que satisfazem  $\Gamma_p \cap \Gamma_u = \emptyset$ . Finalmente,  $\bar{g}_p \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_p)$  e  $\bar{g}_u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_u)$  e  $\varphi$  são funções conhecidas. Neste trabalho será considerado, por simplicidade, o caso em que

o coeficiente de permeabilidade absoluta  $\mathbf{K}$  é um tensor isotrópico, i.e.,  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_{d \times d} \kappa(\mathbf{x})$ , sendo  $\mathbf{I}_{d \times d}$  o tensor identidade. Apesar desta simplificação, é importante destacar que o campo de permeabilidades  $\kappa(\mathbf{x})$  poderá apresentar grandes contrastes espaciais, i.e.,  $\kappa_{\max}/\kappa_{\min} \gg 1$  nos problemas que serão resolvidos no presente trabalho. É justamente neste caso que resulta importante caracterizar o comportamento do ponto de vista da precisão dos métodos multiescala para resolver o problema global. Finalmente, note que no modelo acima, dado pelas equações (1)-(2), tem sido considerados desprezíveis os efeitos de gravidade e capilaridade.

## 2.1 Formulação de elementos finitos para o problema de Darcy

Uma das estratégias mais usuais para resolver o problema acoplado (1)-(2) consiste em resolver este de modo segregado, i.e., o problema de Darcy (1) é primeiramente resolvido a fim de obter um campo de velocidades  $\mathbf{u}$ , o qual é usado para resolver o problema de transporte (2). Este método se conhece como IMPES (*Implicit Pressure - Explicit Saturation*) (Chen, 2004). A resolução numérica de ambos problemas apresenta desafios. Em particular, é essencial que esta seja feita por métodos localmente conservativos para assim prever corretamente o transporte de massa e consequentemente, as chamadas curvas de produção de um reservatório. A resolução numérica do problema hiperbólico (2) e do acoplamento não linear com o problema elíptico não será considerada aqui por questões de brevidade e será abordada em trabalhos futuros. Como dito anteriormente, o foco principal do presente trabalho será a resolução numérica do problema de Darcy (1) por métodos multiescala mistos baseados em decomposição de domínio sem sobreposição na presença de campos de permeabilidade altamente heterogêneos. Nesta classe de métodos, o problema de Darcy é resolvido localmente em cada subdomínio e as soluções acopladas através de condições de compatibilidade nas interfaces da decomposição. É essencial que a formulação seja conservativa localmente, no nível da malha fina dos subdomínios, e globalmente, no nível dos macroelementos da partição. Neste trabalho, o método multiescala MRCM será adotado como resolutor multiescala. Tal método generaliza uma família de métodos multiescala através de um parâmetro algorítmico relacionado com a condição de acoplamento entre subdomínios. Isto permitirá, posteriormente, comparar diferentes variantes do método. Independente do método multiescala misto adotado, um ingrediente essencial na formulação é a resolução local do problema de Darcy por métodos conservativos, o qual deve fornecer a velocidade nas interfaces da decomposição. Por este motivo é usual adotar formulações de elementos finitos mistas. Por completude, apresentamos na sequência as formulações variacionais contínua e discreta do problema, ingrediente essencial no estudo proposto.

Primeiramente, o problema de Darcy será rescrito de maneira simplificada como

$$\mathbf{u} = -\kappa(\mathbf{x}) \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

Vamos considerar métodos de elementos finitos mistos baseados na formulação de Galerkin para resolver o problema (3). O marco funcional correto para formular o problema é dado pelos espaços de Sobolev  $H(\text{div}, \Omega)$  e  $L^2(\Omega)$ , que estão definidos como

$$L^2(\Omega) = \left\{ q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx < \infty \right\}, \quad (4)$$

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d, \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (5)$$

Note que, no caso em que  $\Gamma_p = \emptyset$ , a solução  $p$  deve ser procurada no espaço  $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ . A formulação variacional contínua do problema é definida de maneira usual. Esta pode ser obtida

multiplicando as equações (3) por funções teste e integrando por partes, i.e.,

$$\int_{\Omega} \kappa^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma_p} \bar{g}_p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega), \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f q \, d\mathbf{x}, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (7)$$

O problema em sua forma abstrata pode ser escrito como: Encontrar o par  $(\mathbf{u}, p) \in H(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ , tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= c(\mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) &= \ell(q) \end{aligned} \quad (8)$$

$\forall \mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega)$  e  $\forall q \in L^2(\Omega)$ , com as formas dadas por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \kappa^{-1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (9)$$

$$c(\mathbf{v}) = - \int_{\Gamma_p} \bar{g}_p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds, \quad \ell(q) = - \int_{\Omega} f q \, d\mathbf{x}. \quad (10)$$

## 2.2 Formulação variacional discreta: O problema de malha fina

Para formular o problema no caso de dimensão finita vamos considerar aproximações conformes. Assim sendo, vamos considerar subespaços de dimensão finita de  $H(\text{div}, \Omega)$  e  $L^2(\Omega)$ . Aproximações não conformes baseadas em métodos de Galerkin descontínuo (dG) também podem ser consideradas, como visto por Brezzi(2005), porém isto é deixado para trabalhos futuros. Dentre os métodos conformes vale lembrar que nem toda combinação de espaços para velocidade e pressão leva a uma formulação discreta estável do problema. Dentre as escolhas mais populares temos os espaços de Raviart-Thomas (RT) (Raviart, 1977) e os espaços de Brezzi-Douglas-Marini (BDM) (Brezzi, 1985) de diferente ordem, os quais possuem continuidade da componente normal do fluxo nas arestas/faces entre elementos. Estes espaços são usados em conjunto com aproximações descontínuas para a pressão. Estes elementos estão definidos para o caso de quadriláteros/hexaedros e para o caso de triângulos/tetraedros (em 2D/3D, respectivamente) e, em particular, para o caso de elementos triangulares, estes estão disponíveis na plataforma de elementos finitos FeniCS que será usada neste trabalho. Consideremos uma família regular de triangulações  $\mathcal{T}_h$  do domínio  $\Omega$ , como ilustrado na Fig. 1. Primeiramente, vamos lembrar o espaço de Raviart-Thomas, o qual é definido por

$$V_h = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}|_E \in RT_k(E) \, \forall E \in \mathcal{T}_h\}, \quad (11)$$

$$Q_h = \{q \in L^2(\Omega) : q|_E \in P_k : \forall E \in \mathcal{T}_h\}. \quad (12)$$

Desta forma, dado um número inteiro  $k \geq 0$ , o espaço de Raviart-Thomas ( $RT_k$ ) de ordem  $k$ , definido no elemento de referência  $E$ , no caso bidimensional é dado por

$$RT_k(E) = P_k^2 + (x_1, x_2) P_k, \quad (13)$$

tal que se  $\mathbf{v} \in RT_k(E)$ , então  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_E \in P_k(E)$ . Para o espaço de Brezzi-Douglas-Marini temos

$$V_h = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega) : \mathbf{v}|_E \in BDM_k(E) \, \forall E \in \mathcal{T}_h\}, \quad BDM_k(E) = P_k^2 \quad (14)$$

o qual é também usado em combinação com o espaço  $Q_h$  definido em (12). Os graus de liberdade destes elementos estão associados às arestas e/ou faces dos elementos.

Para incorporar as condições de borda para a velocidade em  $\Gamma_u$ , introduzimos o espaço

$$V_{hg} = \{\mathbf{v} \in V_h : \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = g, \mathbf{x} \in \Gamma_u\}. \quad (15)$$

Note que na formulação mista a condição de borda essencial é definida para o fluxo  $\mathbf{u}$  enquanto a condição de borda natural aparece para o campo de pressões  $p$ , ao contrário do que acontece na formulação primal do problema. Com estas definições já estamos em condições de escrever a formulação variacional discreta do problema de malha fina. Este problema será resolvido para obter a solução do problema global, a qual será comparada com a solução fornecida pelo método multiescala. O problema é: Encontrar o par  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_{h\bar{g}_u} \times Q_h$ , tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= c(\mathbf{v}_h) \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= \ell(q_h) \end{aligned} \quad (16)$$

$\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_{h0} \times Q_h$ . Como dito anteriormente, na formulação do método multiescala também será necessário resolver o problema de malha fina no nível dos subdomínios sujeito a condições de Robin. Neste ponto, resulta conveniente lembrar a forma geral de uma condição de Robin e como esta é tratada na forma variacional do problema. De maneira geral esta condição pode ser escrita como

$$-\gamma(\mathbf{x}) \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{n}} + p = \bar{g}_r, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_R \quad (17)$$

em que, dependendo do valor adotado para o parâmetro  $\gamma$ , a imposição fraca do valor do fluxo na interface será favorecida (se  $\gamma \rightarrow +\infty$ ) ou a imposição fraca do valor da pressão será favorecida (se  $\gamma \rightarrow 0$ ). Neste caso o problema variacional muda para

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + (\gamma \mathbf{u}_h \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{n}})_{\Gamma_R} &= c(\mathbf{v}_h) - (\bar{g}_r, \mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{n}})_{\Gamma_R} \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= \ell(q_h) \end{aligned} \quad (18)$$

em que  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$  representa o produto escalar  $L^2(\Gamma)$ .

### 3. UM MÉTODO MULTIESCALA BASEADO EM CONDIÇÕES DE ROBIN

Antes de introduzir o método multiescala MRCM é conveniente considerar uma formulação variacional do problema baseada na decomposição do domínio computacional em macroelementos ou subdomínios a serem acoplados através de condições de Robin para resolver o problema global de malha fina. Vamos tomar a formulação apresentada por Guiraldello (2018). Consideremos uma decomposição do domínio sem sobreposição  $\Omega = \bigcup_i^m \Omega_i$ . Nas bordas de  $\partial\Omega_i$ , considere a normal única  $\tilde{\mathbf{n}}$  definida como igual a normal exterior de  $\partial\Omega$  nas bordas em que  $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$  e como a normal exterior do subdomínio de menor índice em  $\partial\Omega_i \cap \Gamma_{ij}$ , em que,  $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$  (como exibido em Fig. 1). Consideremos também uma partição  $\mathcal{T}_h^i$  em cada  $\Omega_i$  e os espaços  $\mathbf{V}_{h\bar{g}_u}^i \subset H(\text{div}, \Omega_i)$ ,  $Q_h^i \subset L^2(\Omega_i)$ . O problema é: Encontrar o par  $(\mathbf{u}_h^i, p_h^i) \in \mathbf{V}_{h\bar{g}_u}^i \times Q_h^i$ , para  $i = 1, \dots, m$ , e o par  $(U_h, P_h) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{P}_h$  tais

que

$$\begin{aligned}
 (\kappa^{-1} \mathbf{u}_h^i, \mathbf{v})_{\Omega_i} - (p_h^i, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega_i} + (P_h - \beta_i U_h \check{\mathbf{n}}^i \cdot \check{\mathbf{n}} + \beta_i \mathbf{u}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i, \mathbf{v} \cdot \check{\mathbf{n}}^i)_{\Gamma_i} &= c(\mathbf{v}), \\
 (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^i)_{\Omega_i} &= (f, q)_{\Omega_i}, \\
 \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i, M_h)_{\Gamma_i} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^m (\beta_i (\mathbf{u}_h^i \cdot \check{\mathbf{n}}^i - U_h \check{\mathbf{n}}^i \cdot \check{\mathbf{n}}), V_h \check{\mathbf{n}}^i \cdot \check{\mathbf{n}})_{\Gamma_i} &= 0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

$\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_{h0}^i \times Q_h^i, i = 1, \dots, m, \forall (M_h, V_h) \in \mathcal{P}_h \times \mathcal{U}_h$ . As duas primeiras equações correspondem respectivamente à lei de Darcy e à equação de conservação da massa em cada subdomínio  $\Omega_i$  (ver Eq. (16)) e as duas últimas equações correspondem respectivamente às condições de continuidade fraca do fluxo e da pressão no esqueleto  $\Gamma$  da decomposição, respectivamente. Os campos auxiliares  $P_h \in \mathcal{P}_h$  e  $U_h \in \mathcal{U}_h$  estão definidos em  $\Gamma$  com a finalidade de acoplar as soluções dos subdomínios. Como sugerido por Guiraldello(2019), o parâmetro de Robin  $\beta_i(\mathbf{x})$  é tomado igual a  $\frac{\gamma(\mathbf{x})L}{\kappa(\mathbf{x})}$ , em que  $L$  é uma medida de comprimento característica (tipicamente o tamanho da interface entre subdomínios) e  $\gamma$  um parâmetro algorítmico a ser escolhido.

### 3.1 A formulação multiescala

É importante notar que a formulação apresentada acima não é nada mais do que um método para resolver o problema global de malha fina em  $\Omega$  via decomposição de domínio. Em Guiraldello(2018) prova-se que a solução deste problema é a mesma que a do caso não

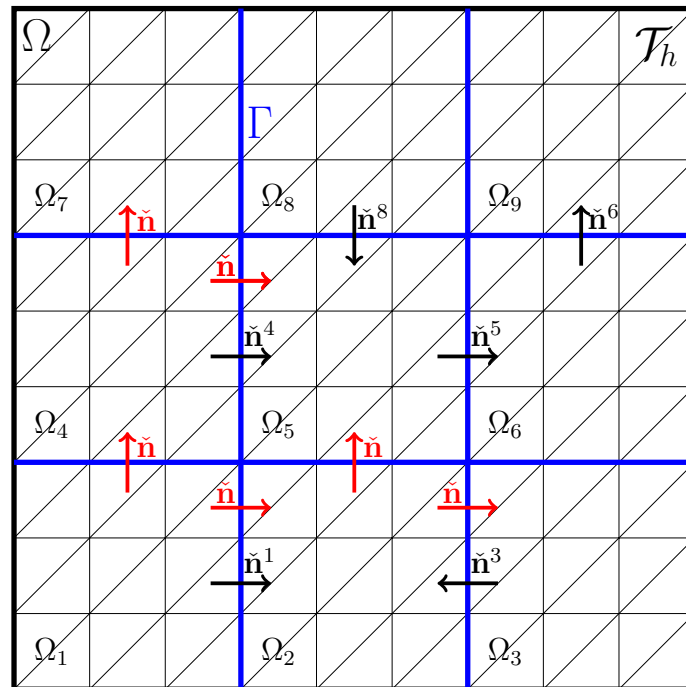


Figure 1- Esquema de decomposição de domínio adotado.

decomposto. Nesta situação tivesse sido suficiente introduzir apenas um multiplicador de Lagrange no esqueleto, p.e., a pressão  $P_h \in \mathcal{P}_h$  para impor de forma fraca a continuidade do fluxo. Isto é equivalente a tomar  $\beta_i = 0, \forall i$ . Note que a dimensão do espaço  $\mathcal{P}_h$  está relacionada com a discretização induzida no esqueleto pela malha dos subdomínios e de modo similar para  $\mathcal{U}_h$ . Portanto, acabamos com o dobro de incógnitas do que seria necessário para resolver o problema. No entanto, quando consideramos a chamada formulação multiescala, a qual surge quando são escolhidos em  $\Gamma$  espaços  $\mathcal{P}_H \subset \mathcal{P}_h$  e  $\mathcal{U}_H \subset \mathcal{U}_h$ , com  $\dim \mathcal{P}_H \ll \dim \mathcal{P}_h$  e  $\dim \mathcal{U}_H \ll \dim \mathcal{U}_h$ , o método proposto pode fornecer uma aproximação do problema de malha fina a um custo computacional reduzido, como avaliado de maneira exaustiva em Guiraldello(2019), Rocha(2021), Guiraldello(2020) e Jaramillo(2021), em diferentes contextos e aplicações. Neste trabalho iremos considerar espaços polinomiais no esqueleto, tanto para  $\mathcal{U}_H$  como para  $\mathcal{P}_H$ . Considerando uma partição do esqueleto  $\mathcal{T}_H(\Gamma)$ , temos

$$\mathcal{U}_H = \mathcal{P}_H = \{\psi, \psi(\mathbf{x})|_e \in P_k(e) \forall e \in \mathcal{T}_H(\Gamma)\} \quad (20)$$

Notar que a formulação é localmente conservativa, pelo fato de espaços  $H(\text{div})$  serem usados nos problemas locais é também é conservativa na escala grossa, pelo fato do espaço  $\mathcal{P}_H$  conter as funções constantes, o que surge claramente da terceira equação em (19), i.e., toda a massa que sai de um domínio através de uma interface entra no domínio vizinho. Para concluir esta seção, é interessante notar que dependendo do valor adotado para o parâmetro  $\gamma$  na condição de Robin e da escolha para os espaços  $\mathcal{P}_H$  e  $\mathcal{U}_H$ , podem ser recuperados outros métodos disponíveis na literatura. Concretamente, temos:

- (a) *Multiscale Mixed Mortar Finite Element Method* (MMMFEM) (Arbogast,2007 e Ganis,2009);
- (b) *Multiscale Hybrid Mixed Method* (MHM) (Harder, 2013);
- (c) *Multiscale Mixed Method* (MuMM) (Francisco, 2014);

## 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 4.1 Avaliação do método com uma solução manufaturada

Vamos considerar a solução manufaturada empregada por Guiraldello(2018) para avaliar as propriedades de convergencia da implementação. Tomando  $f = 8\pi^2 \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2)$  em  $\Omega = [0, 1]^2$ , uma permeabilidade homogênea  $\kappa(\mathbf{x}) = 1$ , a solução do problema corresponde a um campo de pressões  $p = \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2)$  e um campo de velocidades  $\mathbf{u} = [2\pi \sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2), 2\pi \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)]^\top$ . Notar que a média de  $p$  é zero e que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  em  $\partial\Omega$ . O problema é resolvido impondo a solução exata como condição de borda. Especificamente, em  $x_1 = 0$  e  $x_1 = 1$  tomamos  $\bar{g}_p = p$  e em  $x_2 = 0$  e  $x_2 = 1$  tomamos  $\bar{g}_u = 0$ . Serão calculados o erro na pressão  $e_p = \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$  e no fluxo  $e_u = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$ . Há várias formas de avaliar a convergência do método no caso multiescala. Neste trabalho será realizado um estudo de refinamento no qual o tamanho dos subdomínios é variado deixando o número de incógnitas de malha fina fixo em cada  $\Omega_i$ , i.e.,  $H/h$  será mantido constante com  $h = H/20$ . A sua vez, serão consideradas aproximações lineares  $P_1(\Gamma)$  e quadráticas  $P_2(\Gamma)$  no esqueleto e o elemento  $BDM_k$ ,  $k = 1, 2$ . Outras variantes são certamente possíveis, mas não serão consideradas aqui por brevidade. Na tabela 1 apresentamos os resultados obtidos.

Table 1- Erros de discretização do método multiescala para um problema com a solução manufaturada.

$N_x \times N_y$	$P_1(\Gamma)$		$P_2(\Gamma)$	
	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}$	$\ p - p_h\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{L^2(\Omega)}$
$4 \times 4$	0.0143	0.198	0.0130	0.0249
	0.0057	0.198	0.00052	0.0245
$6 \times 6$	0.0089	0.104	0.0087	0.0089
	0.0020	0.103	0.00015	0.0087
$8 \times 8$	0.0066	0.071	0.0065	0.0044
	0.0011	0.071	0.00007	0.0043
$10 \times 10$	0.0052	0.055	0.0052	0.0026
	0.0007	0.055	0.00004	0.0025
$12 \times 12$	0.0044	0.045	0.0043	0.0017
	0.0005	0.045	0.00002	0.0016

Para cada caso  $N_x \times N_y$  a primeira linha corresponde a  $BDM_1$  e a segunda a  $BDM_2$ . O primeiro que podemos notar é que o erro na velocidade não é afetado pela escolha do espaço de elementos finitos nos subdomínios, o que significa que o erro de discretização é dominado pelo aproximação multiescala relacionada à escolha dos espaços de interface. As ordens estimadas são  $\mathcal{O}(H^{\frac{3}{2}})$  e  $\mathcal{O}(H^{\frac{5}{2}})$  para  $P_1(\Gamma)$  e  $P_2(\Gamma)$  respectivamente. O contrário acontece com a pressão quando usado o elemento  $BDM_1$ , em que se observa o mesmo erro e uma ordem de convergência  $\mathcal{O}(H)$ , independente da escolha para  $P_k(\Gamma)$ . No entanto, para o caso  $BDM_2$  a ordem de convergência tomando  $P_1(\Gamma)$  é  $\mathcal{O}(H^2)$  e tomando  $P_2(\Gamma)$  é  $\mathcal{O}(H^3)$ . Estes resultados mostram que a implementação proposta do método MRCM é convergente quando a partição em subdomínios de  $\Omega$  é refinada e os espaços de interface enriquecidos. Também, fixando a ordem da aproximação em  $\Gamma$ , se o interesse é o determinar  $\mathbf{u}_h$ , uma aproximação de baixa ordem para os problemas locais pode ser escolhida sem detrimento no erro, porém, se o interesse é determinar  $p_h$  com precisão, o erro exibido pelo elemento  $BDM_2$  é significativamente menor.

## 4.2 Avaliação do método em formações altamente heterogêneas

Para estudar o comportamento do método num caso mais desafiante em que o campo de permeabilidades é heterogêneo, vamos considerar a camada 36 do *benchmark* SPE10. Adicionalmente, iremos considerar em cada subdomínio uma cavidade circular, como ilustração do tratamento de geometrias irregulares, o que é possível com a implementação proposta. Estas cavidades podem ser pensadas como *vugs* ou cavernas que estão presentes em muitos reservatórios carstificados. Na figura 2 mostra-se o campo de permeabilidades em escala logarítmica, o qual é definido como constante por elemento e a partição em  $4 \times 2$  subdomínios adotada. Também mostra-se a solução obtida pelo método de malha fina (não decomposto) para fins de comparação considerando  $\bar{g}_p = 10$  na borda de baixo ( $x_2 = 0$ ) e  $\bar{g}_p = 1$  na borda de cima ( $x_2 = 11/3$ ). Na figura 3 mostra-se o campo de pressões e velocidades obtido com a formulação proposta tomando  $\gamma = 1$  e o espaço de Raviart-Thomas de mais baixa ordem e funções constantes para  $\mathcal{P}_H$  e  $\mathcal{U}_H$  (primeira e terceira figuras) e o espaço de Brezzi-Douglas-Marini de ordem 2 junto com funções quadráticas no esqueleto (segunda e quarta figuras). Um detalhe da malha de triângulos não estruturada utilizada é mostrado para o subdomínio 0, possuindo aproximadamente 2400 – 2700 elementos, dependendo do subdomínio. Note as descontinuidades que aparecem nas interfaces entre os subdomínios, tanto no campo de



pressões quanto no campo de velocidades. Também, observa-se que o problema de malha fina possui aproximadamente 21K elementos, o que leva a 224K graus de liberdade para o elemento  $BDM_2$ . No caso decomposto são resolvidos vários problemas de menor porte envolvendo apenas  $\sim 27K$  incógnitas. Embora, a comparação apresentada seja qualitativa, o resultados mostram o potencial da implementação proposta para resolver problemas de interesse para a indústria em geometrias não regulares.

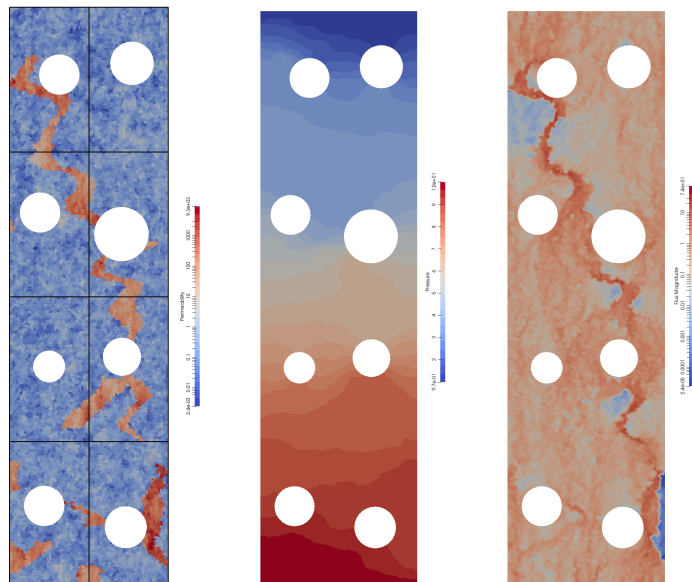


Figure 2- Permeabilidade do benchmark SPE10, pressão e velocidade obtidos pelo método de malha fina (não decomposto) usando  $BDM_2$ .

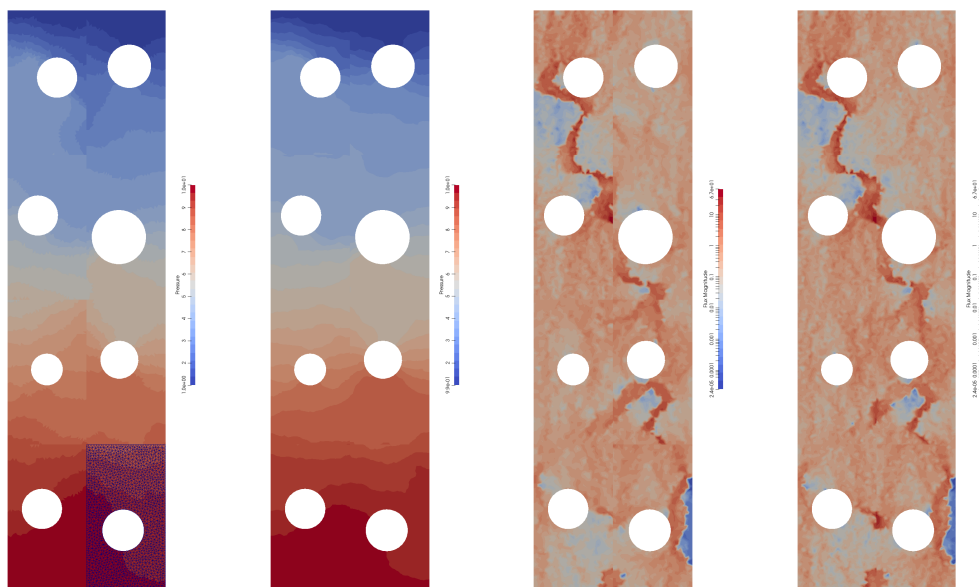


Figure 3- Pressão e velocidade para o benchmark SPE10 usando  $RT_0$  com  $P_1(\Gamma)$  e  $BDM_2$  com  $P_2(\Gamma)$ .

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma implementação do método multiescala misto MRCM na plataforma de código aberto de elementos finitos FeniCS. A implementação permitiu avaliar pela primeira vez o uso malhas não estruturadas e espaços  $H(\text{div})$  gerais para os problemas locais. A implementação foi testada em problemas envolvendo permeabilidades suaves para avaliar as ordens de convergência do método e em problemas envolvendo permeabilidades altamente heterogêneas. Os resultados apresentados mostram o potencial de formulação proposta para lidar com geometrias não regulares. Trabalhos futuros incluem o estudo de reservatórios que apresentam estruturas carstificadas, presença de cavernas ou *vugs*, redes de condutas imersas ou outras heterogeneidades que precisam ser resolvidas com a geometria detalhada. Este tipo de simulações poderiam fornecer coeficientes efetivos a serem utilizados em simuladores multiescala baseados em outros esquemas de discretização que não permitam malhas que adaptadas às características geométricas do problema.

## REFERÊNCIAS

- Anders, L.; Kent-Andre, M.; Garth, N. W.; and others (2012), “Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method”, Springer, doi.10.1007/978-3-642-23099-8, isbn.978-3-642-23098-1.
- Arbogast, T.; Pencheva, G.; Wheeler, M. F.; Yotov, I. (2007), “A Multiscale Mortar Mixed Finite Element Method”, *Multiscale Modeling & Simulation*, Society for Industrial & Applied Mathematics(SIAM) vol. 6, 319-346.
- Brezzi, F.; Marini, H. L.; Masud, A. (2005), “Mixed Discontinuous Galerkin Methods for Darcy Flow”, *Journal Scient Computacional*, vol. 22, 119-145.
- Brezzi, F.; Douglas, J.; Marini, L.D. (1985), “Two Families of Mixed Finite Elements for Second Order Elliptic Problems”, *Numer. Math.*, vol. 47, 217-236.
- Chen, Z.; Huan, G.; Li, B. (2004), “An improved IMPES method for two-phase flow in porous media”, *Transport in porous media*, n. 3, Springer, vol. 54, 361-376.
- Francisco, A.; Ginting, V.; Pereira, F.; Rigelo, J. (2014), “Design and Implementation of a Multiscale Mixed Method Based on a Nonoverlapping Domain Decomposition Procedure”, *Math. Comput. Simul.*, vol. 99, 125-138.
- Ganis, B. and Yotov, I. (2009), “A Implementation of a Mortar Mixed Finite Element Method using a Multiscale Flux Basis”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 198, 3989-3998.
- Guiraldello, R. T; Ausas, R.F; Sousa, F.S; Pereira, F.; Buscaglia, G. C. (2018), “The Multiscale Robin Coupled Method for flows in porous media”, *Journal of Computational Physics*, Elsevier, vol. 355, 1-21.
- Guiraldello, R. T; Ausas, R.F; Sousa, F.S; Pereira, F.; Buscaglia, G. C. (2019), “Interface spaces for the Multiscale Robin Coupled Method in reservoir simulation”, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 164, 103-119.
- Guiraldello, R. T; Ausas, R.F; Sousa, F.S; Pereira, F.; Buscaglia, G. C. (2020), “Velocity postprocessing schemes for multiscale mixed methods applied to contaminant transport in subsurface flows”, *Computational Geosciences*, Springer Science and Business Media LLC, vol. 24, 1141-1161, doi. 10.1007/s10596-019-09930-8.
- Harder, C.; Paredes, D.; Valentin, F. (2013), “A family of Multiscale Hybrid-Mixed finite element methods for the Darcy equation with rough coefficients”, *Journal of Computational Physics*, vol. 245, 107-130.
- Jaramillo, A.; Guiraldello, R. T.; Stevens, P.; Sousa, F. S.; Ausas, R.F; Pereira, F.; Buscaglia, G. C. (2021), “Towards HPC simulations of Billion-cell Reservoirs by Multiscale Mixed Methods”, *arXiv:2103.08513*.
- Raviart, P.A and Thomas, J.M (1977), “A Mixed Finite Element Method for 2nd Order Elliptic Problems”, *Mathematical Aspects of the Finite Elements Method*, Springer, Berlin, 292-315.

Rocha, F. F.; Sousa, F. S.; Ausas, R.F; Pereira, F.; Buscaglia, G. C. (2020), “Multiscale mixed methods for two-phase flows in high-contrast porous media”, *Journal of Computational Physics*, Elsevier, vol. 409, 109-316.

Rocha, F. F.; Sousa, F. S.; Ausas, R.F; Pereira, F.; Buscaglia, G. C. (2021), “Interface spaces based on physics for multiscale mixed methods applied to flows in fractured-like porous media”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, vol. 385, 114035, doi. 10.1016/j.cma.2021.114035, issn.0045-7825.

## APÊNDICE A

### IMPLEMENTATION OF THE MRCM MULTISCALE METHOD WITH LOCAL HDIV RESOLVERS FOR THE DARCY’S PROBLEM

**Abstract.** We present for the first time an implementation of the multiscale method MRCM (Multiscale Robin Coupled Method) with general  $H(\text{div})$  local solvers on unstructured meshes made of simplices in the open-source finite element platform FeniCS. The implementation is tested in two-dimensional problems, first considering a case of smooth permeability with a manufactured solution to assess the convergence of the method, and second a case of highly heterogeneous permeability to assess the quality of the approximation compared to the fine-mesh solution of the problem.

**Keywords:** Darcy Flow, Porous Media, Multiscale Method, Decomposition of Domain, Finite Elements