

Introdução à Teoria dos Nós

Eduardo Colli

Os nós

Uma das áreas mais fascinantes da Matemática é a Teoria dos Nós, cuja origem remonta ao final do século XIX e modernamente se insere no campo da Topologia Algébrica. Chama a atenção o fato de que alguns conceitos, demonstrações e problemas em aberto possam ser enunciados em linguagem elementar, permitindo a leigos o acesso a uma vasta porção da teoria.

A Teoria dos Nós estuda as curvas no espaço, sem auto-interseções e fechadas. Em outras palavras, as curvas que são imagens (injetivas e suaves) de um círculo no espaço tridimensional. Mas a Teoria considera como *equivalentes* duas curvas tais que uma pode ser deformada continuamente de tal forma a ficar idêntica à outra, sem que no processo de deformação se criem auto-interseções, sem que a curva “se rompa” e sem colapsos (como um nó tão apertado que desaparece). A preocupação não é com a forma exata das curvas, mas sim obter critérios para dizer se duas curvas são ou não são equivalentes. Um *nó* não é uma curva particular, mas todo o conjunto de posições que ela pode assumir se for deformada de acordo com esses critérios. Por exemplo, o *nó trivial* é a classe de curvas que podem se deformar até se tornarem círculos. Dizer coloquialmente “esta curva é desmanchável” significa dizer “esta curva está na classe de equivalência do nó trivial”.

O problema central da Teoria dos Nós é classificá-los. *Classificar* significa saber listá-los todos (mesmo que sejam em número infinito, como é o caso) e saber dizer, para cada curva, qual nó dessa lista ela representa. Isto implica, em particular, ter critérios para dizer se duas curvas são ou não são equivalentes.

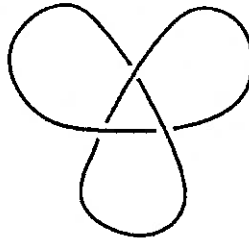
O polinômio de Jones é calculado sobre uma projeção do nó, que nada mais é do que sua imagem “achatada” no plano. Ele tem uma propriedade fundamental: duas projeções quaisquer *do mesmo nó* têm o *mesmo polinômio de Jones*. Por essa razão, esse polinômio é chamado de *invariante*.

Um invariante serve para distinguir projeções que não são equivalentes: se o resultado for diferente então uma não pode ser deformada na outra. Infelizmente a afirmativa inversa é falsa: não necessariamente duas projeções com polinômios iguais representam o mesmo nó! Por essa razão diz-se que o polinômio de Jones não é um invariante completo, pois ele não pode responder positivamente sobre a equivalência de duas projeções.

Não foi encontrado até hoje um invariante finito (isto é, calculável em um número finito de passos) que seja completo.

Projeções

A projeção é a maneira natural e necessária de se representar um nó através de um desenho no plano. O nome vem do fato de que podemos colocar o nó sob um fecho de luz e observar a sombra que se projeta sobre a mesa. Acontece que esse tipo de analogia é perigosa, pois do desenho da sombra não se distingue que pedaços do nó passam por cima ou por baixo. Então a projeção de um nó é o desenho de sua sombra acrescido de uma indicação de qual segmento passa por baixo, e isso é feito interrompendo o desenho da curva pouco antes do cruzamento, como mostra a figura abaixo, com o nó conhecido como *nó trifólio*.



Note que a informação sobre os cruzamentos dá a sensação e de fato a informação tridimensional.

Outra exigência em relação às projeções é que elas sejam regulares: cada cruzamento ocorre num só ponto, para cada cruzamento concorrem apenas dois segmentos da curva, os segmentos se cruzam transversalmente (formam um "X") e o número de cruzamentos deve ser finito.

O conceito de deformação contínua e sem auto-interseções de uma curva no espaço recebe o nome de isotopia. Existe um outro conceito, o de isotopia ambiente, que engloba o conceito de isotopia, mas é mais exigente: na isotopia

ambiente, o espaço inteiro deve ser deformado, arrastando a curva de uma posição a outra. Com isotopias ambientes impede-se que haja o colapso de uma porção não trivial do nó, reduzindo sua complexidade de forma artificial.

Como nestas notas não temos grandes preocupações formais, chamaremos as isotopias ambientes simplesmente de isotopias. Além disso, para não haver confusão demais, pensemos diretamente com os modelos físicos, isto é, as cordas. As curvas estão dentro das cordas, protegidas por elas, e essa proteção impede que façamos movimentos que não sejam isotopias ambientes.

As isotopias se transpõem naturalmente para as projeções, sendo bastante acompanhá-las pela sombra. Observe que uma isotopia pode desfazer cruzamentos ou mudar sua disposição, mas não pode inverter a posição de dois segmentos num cruzamento, fazendo quem passa por baixo passar por cima (se isso fosse possível, transformaríamos qualquer curva em um círculo!). Note também que quando um cruzamento é desfeito pode haver uma posição de transição que não seja regular, mas nós estamos preocupados apenas com as projeções regulares que ocorrem “antes” e “depois” da transição.

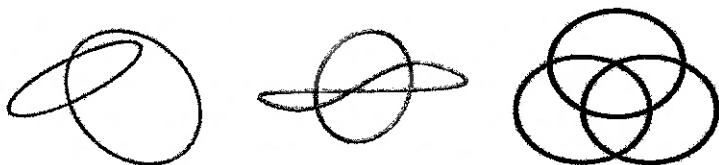
Assim como as curvas, dizemos que duas projeções são equivalentes se uma isotopia transforma uma na outra. Um nó então é representado pela sua classe de projeções (regulares) possíveis, todas equivalentes entre si.

Enlaces

A definição de nó pode ser generalizada da seguinte maneira. Em vez de apenas uma curva fechada no espaço, podemos considerar uma coleção (finita) de curvas no espaço, eventualmente enlaçadas entre si.

Todos os conceitos acima e os que vierem abaixo valem para essa situação também, e muitas vezes as duas noções têm que se misturar. Por exemplo, ao se calcular os polinômios de Jones de um nó é necessário conhecer polinômios de Jones de certos enlaces que aparecem no cálculo.

Na figura abaixo mostramos três desses nós: o *enlace de Hopf*, que são dois círculos enlaçados da maneira mais simples, o *enlace de Whitehead* e o *enlace de Borroméas*, sendo os dois primeiros com apenas duas componentes e o terceiro com três.



O símbolo das Olimpíadas é um enlace de 5 componentes!

Invariantes e os movimentos de Reidemeister

Os invariantes são, em geral mas nem sempre, calculados sobre projeções (regulares). Há vários tipos de invariantes: podem ser números, podem ser “verdadeiro” ou “falso”, no sentido de que a projeção tem ou não tem determinada propriedade, podem ser polinômios de uma ou mais variáveis, podem ser grupos, etc. Porém, para merecer esse nome, é essencial que o invariante não dependa da projeção do nó utilizada para calculá-lo.

Aqui definiremos dois invariantes: a *tricolorabilidade* e o *polinômio de Jones*. A tricolorabilidade é um invariante que só pode ter dois resultados: verdadeiro ou falso. Isto é, um nó ou é ou não é tricolorizável. Já o cálculo do polinômio de Jones pode ter vários resultados, e isso servirá para distinguirmos a maioria dos nós de poucos cruzamentos.

No entanto, pensando um pouquinho, chegamos rapidamente a uma pergunta crucial: como podemos saber que uma regra que associa a cada projeção um polinômio é realmente invariante, isto é, independente da projeção utilizada entre todas as projeções equivalentes?

Em geral não existe problema enquanto a isotopia não mexe com cruzamentos, mas apenas muda o formato da projeção (chamada de *isotopia planar*), pois os invariantes já costumam ser definidos sem se dar muita importância ao desenho exato das curvas. Mas quando um cruzamento é alterado ou desmanchado e a nova projeção é essencialmente diferente da projeção de partida, será que a regra continua gerando o mesmo polinômio?

Durante uma isotopia, se feita com um mínimo de cuidado, haverá instantes de transição onde a projeção pode não ser regular, e os demais instantes correspondem a projeções regulares, transformadas apenas por isotopias planares, onde essencialmente nada acontece. Durante a isotopia se transita de uma projeção regular a outra. Então parece que todo o segredo de mostrar que o polinômio independe da projeção é mostrar que ele não se altera entre

duas projeções regulares separadas por uma transição não regular.

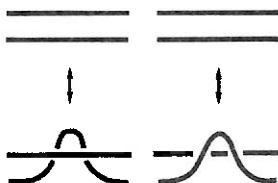
O problema é que para ter uma resposta deveríamos, necessariamente, conhecer todos os tipos de transição entre projeções regulares!

Felizmente esse trabalho já foi facilitado por um bonito teorema, devido a Kurt Reidemeister, que diz o seguinte: *toda isotopia entre duas projeções regulares pode ser efetuada com apenas três tipos de transições.* Essas transições receberam o nome de *movimentos de Reidemeister*. Antes de descrevê-las, concluímos o raciocínio iniciado acima: precisamos testar apenas três tipos de transições para saber se um polinômio não se altera entre as isotopias.

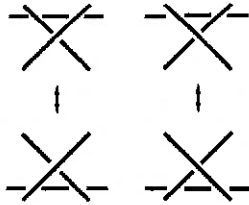
Os movimentos de Reidemeister são classificados em tipos: I, II e III. O movimento de tipo I é ilustrado na figura abaixo: um laço simples é criado ou deixa de existir. Observe que há duas variantes, uma sendo a imagem especular da outra.



O movimento de tipo II envolve dois segmentos, e tem também duas variantes. Na transição de uma projeção regular para outra há dois segmentos se tangenciando.



Já o movimento de tipo III envolve três segmentos, e a transição é um cruzamento onde concorrem três segmentos.

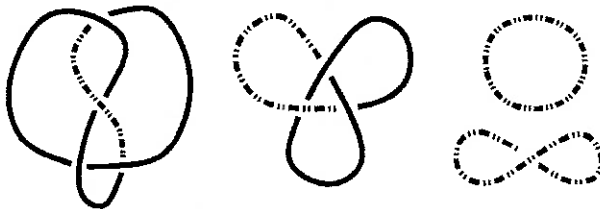


Note que não é preciso desenhar mais duas versões onde o segmento que se desloca (no caso o horizontal) esteja por cima dos outros dois. Pois as situações mostradas, quando rotacionadas, mostram exatamente esses casos: basta considerar como “horizontal” o segmento que esteja por cima dos outros dois.

Tricolorabilidade

A tricolorabilidade é um invariante fácil de definir e só pode dar dois resultados: sim ou não. Na verdade, o que se procura saber é se uma projeção do nó é ou não é tricolorizável, mas veremos adiante que se uma projeção qualquer do nó for tricolorizável então todas as outras também serão. De fato, é por essa razão que a tricolorabilidade é considerada um invariante.

Para definir tricolorização precisamos do conceito de supra-segmento de uma projeção. Um *supra-segmento* é um pedaço da curva de projeção com duas propriedades: (i) não passa por baixo de nenhum cruzamento; (ii) não pode ser prolongado sem violar a primeira regra. Na figura abaixo mostramos alguns exemplos de supra-segmentos, com linha tracejada (o nó da esquerda é conhecido como “nó figura-oito”).



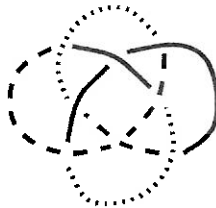
Em particular, projeções como o círculo ou como um nó trivial em forma de “oito”, mostradas à direita, têm apenas um supra-segmento.

Podemos olhar o entorno de cada cruzamento e verificar que: (i) há um supra-segmento que atravessa o cruzamento; (ii) há duas extremidades de supra-segmentos que terminam no cruzamento. Essas duas extremidades podem, eventualmente, pertencer ao mesmo supra-segmento, como ocorre no “oito” da figura acima, ou mesmo pertencer ao supra-segmento que atravessa o cruzamento por cima, como também é o caso do mesmo exemplo. Em todo o caso, olhando apenas para o entorno do cruzamento, concorrem três segmentos.

Tricolorizar uma projeção significa:

1. Atribuir a cada supra-segmento uma e uma só cor.
2. Usar no mínimo duas e no máximo três cores para pintar todos os supra-segmentos.
3. Respeitar a regra de que, para cada cruzamento, não podem concorrer (exatamente) duas cores: ou concorre apenas uma ou concorrem três.

O exemplo abaixo mostra uma projeção tricolorizada. Para o caso de este texto estar impresso em branco e preto, fizemos um tracejamento diferente para cada cor: linha contínua, linha tracejada e linha pontilhada. Observe que há cruzamentos com uma ou três cores, e nenhum com duas, respeitando a terceira regra.



Fica para o leitor a tentativa de tricolorizar a projeção mostrada acima do nó figura-oito. É possível?

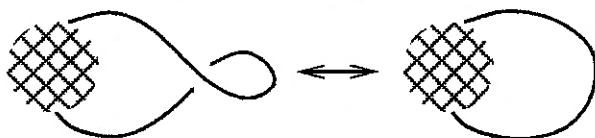
Por que a tricolorabilidade é um invariante?

Gostaríamos de mostrar que se uma projeção de um nó ou enlace é tricolorizável então todas as outras também serão. Ora, já sabemos que podemos

alterar a projeção original com isotopias planares e movimentos de Reidemeister para obtermos qualquer outra projeção. Se a projeção original for tricolorizável e nenhum dos movimentos alterar a propriedade de tricolorabilidade então sabemos que a projeção final será também tricolorizável.

Uma isotopia planar não altera a propriedade de tricolorabilidade porque não mexe nos cruzamentos, a não ser por deformações sem conseqüências. E o que dizer dos movimentos de Reidemeister?

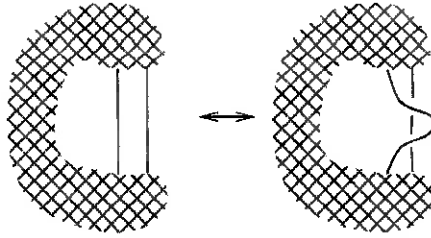
Vejam os o que faz o movimento do tipo I. Na figura abaixo, vemos à esquerda um cruzamento que será desmanchado por esse movimento, resultando na figura da direita. Não nos importará a forma do restante da projeção, dentro do círculo hachuriado, que se manterá inalterado pelo movimento.



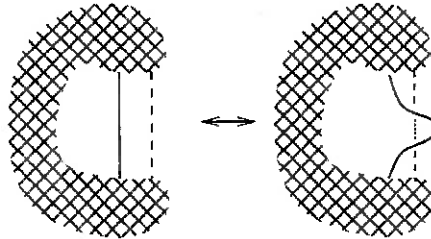
Note que *só uma cor pode concorrer no cruzamento mostrado*, pois pelo menos duas cores são forçosamente iguais. Escolhemos o vermelho (linha contínua) para o desenho. Agora suponha que a projeção da esquerda seja tricolorizável: isso implica que há pelo menos mais uma cor além do vermelho dentro da região tracejada, sempre respeitando a regra de que em cada cruzamento concorrem uma ou três cores.

Ao passarmos para a projeção da direita a propriedade de tricolorização continua intacta! Além disso, o mesmo raciocínio pode ser conduzido no sentido inverso.

Passemos ao movimento de tipo II, ilustrado na figura abaixo. Suponhamos que a projeção da esquerda seja tricolorizável e, num primeiro caso, admitamos que os dois segmentos envolvidos no movimento tenham a mesma cor, por exemplo, vermelho. Neste caso, uma segunda cor deve aparecer na região hachuriada. Passando à projeção da direita nenhuma cor precisa ser acrescentada, pois os dois novos cruzamentos ficam monocromáticos, respeitando a regra três, e a segunda cor é mantida dentro da região hachuriada.



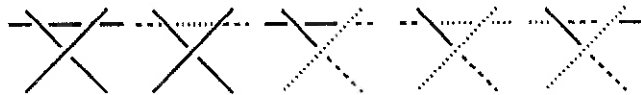
Precisamos, no entanto, analisar a outra possibilidade: a de que os segmentos envolvidos tenham cores diferentes, por exemplo, verde (linha tracejada) e vermelho (linha contínua). Neste caso, depois do movimento, somos obrigados a usar a cor restante (azul, ou linha pontilhada) para manter a regra três respeitada.



Observe que um raciocínio semelhante pode ser feito no sentido oposto do movimento.

Observe também que a alteração de cor não deve ser feita em segmentos que entram na região tracejada, pois não sabemos como é a projeção nessa região. Felizmente não precisamos disso para demonstrar a invariância da tricolorabilidade sob os movimentos de Reidemeister.

Resta apenas a análise dos movimentos de tipo III. Deixaremos para o leitor completar a demonstração, baseado na figura abaixo, que mostra as possibilidades de cores para os segmentos envolvidos no movimento.

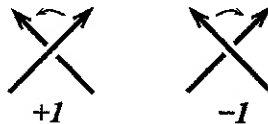


Torção: um não-invariante

Nesta e na próxima seção definiremos dois “não-invariantes” de um nó. O primeiro será um número inteiro e o segundo um polinômio, ambos calculados sobre uma projeção do nó. Eles não são invariantes porque o resultado muda após movimentos de Reidemeister de tipo I, embora não após movimentos de tipos II e III. No entanto, combinando os dois adequadamente obteremos um polinômio cujo resultado resiste também aos movimentos de tipo I, caracterizando-se como um legítimo invariante.

O primeiro não-invariante é chamado de *torção* da projeção, e será denotado por $\tau(J)$, se J simboliza a projeção. A idéia é dar um sentido para se percorrer o nó e em cada cruzamento analisar a orientação da troca entre os segmentos, atribuindo $+1$ ou -1 . O número $\tau(J)$ será a soma dos números atribuídos a cada cruzamento.

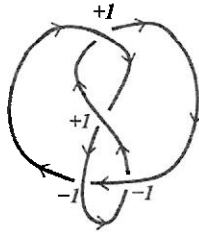
A atribuição de $+1$ ou -1 aos cruzamentos é feita em função da orientação dada. Com um sentido definido para percorrer a curva, em cada cruzamento os dois segmentos que ali concorrem herdaram uma orientação. Se o segmento de cima tem que ser girado no sentido anti-horário para coincidir com o de baixo atribui-se $+1$, caso contrário -1 , como mostra a figura abaixo.



Perceba que a inversão da orientação do nó não altera o resultado: os dois sentidos se invertem no cruzamento e a regra gera o mesmo número, $+1$ ou -1 . *Mas isso não é verdade para enlacs: a troca de orientação de apenas uma das componentes faz mudar apenas um dos sentidos em alguns cruzamentos!* Os cruzamentos em que um e apenas um dos sentidos mudam são aqueles que envolvem um segmento da componente que teve orientação trocada e um segmento de uma componente que não teve a orientação trocada.

Assim, enquanto a torção é definida para projeções de nós independentemente de sua orientação, para enlacs ela deve ser definida em *projeções orientadas*.

Como exemplo, calculamos a torção da seguinte projeção do nó figura-oto, e o resultado é zero. Veja na figura abaixo.



Podemos ver que a torção não se altera com movimentos do tipo II e III. Pois, no caso do tipo II, quando os dois cruzamentos existem, um deles vale $+1$ e o outro obrigatoriamente -1 , de forma que a contribuição total de ambos é nula. Desfazendo os cruzamentos os segmentos nem se cruzam, o que resulta em contribuição nula também. No caso do tipo III há três segmentos e três cruzamentos: o cruzamento fixo contribui da mesma forma antes e depois do cruzamento e os outros dois, embora se desloquem, não se alteram em termos de orientação.

Por outro lado, um movimento de tipo I cria ou destrói um cruzamento, portanto a torção se altera em uma unidade, para mais ou para menos.

Polinômio-colchete: outro não-invariante

O *polinômio-colchete* de uma projeção J será denotado por $\langle J \rangle$. Esse polinômio é de uma variável, x , e engloba potências negativas, portanto é um polinômio de Laurent. Se quisermos explicitar a variável x na notação do polinômio escrevemos simplesmente $\langle J \rangle(x)$.

Ele será definido por um mecanismo indutivo, com uma regra que permite escrever o polinômio-colchete de uma projeção em função de x e em função de polinômios-colchetes de projeções com menor número de cruzamentos. Sendo assim, após um número finito de etapas eliminam-se completamente os cruzamentos, restando apenas círculos. É preciso notar que as projeções com menor número de cruzamentos geradas a partir de uma certa projeção podem ter mais do que uma componente, isto é, podem ser enlaces.

São três as regras de cálculo do polinômio-colchete. Primeiro, define-se o polinômio-colchete de um círculo, que denotaremos sempre por C :

$$\langle C \rangle = 1 .$$

Como ao final as expressões simplificam para expressões com esse colchete e

com a variável x , a regra se justifica para se eliminarem completamente os colchetes e restarem apenas os termos em x .

A segunda regra prevê o que acontece se a projeção for a união de uma projeção J qualquer com um círculo C , não enlaçado com J :

$$\langle J \dot{\cup} C \rangle = (-x^2 - x^{-2})\langle J \rangle .$$

Esta regra não reduz o número de cruzamentos, mas o número de componentes, etapa necessária se se quer chegar a apenas uma projeção circular, da qual dá conta a primeira regra.

A terceira regra ensina a desmanchar um cruzamento. Simbolicamente, ela é escrita da seguinte forma:

$$\langle \times \rangle = x \langle \rangle + x^{-1} \langle \curvearrowright \rangle$$

A projeção é representada pelo cruzamento que será desmanchado, no lado esquerdo da igualdade. As novas projeções deixam de ter o cruzamento, pois os segmentos são “religados” de outra forma. Só é preciso muita atenção para o fato de que no lado esquerdo *o segmento superior é aquele de inclinação positiva* (note que não é necessária a regra em que o segmento superior tem inclinação negativa, basta posicionar a projeção adequadamente).

Por exemplo, para o nó trifólio temos

$$\langle \text{Trifólio} \rangle = x \langle \text{Trifólio} \rangle + x^{-1} \langle \text{Trifólio} \rangle$$

Admite-se implicitamente que vale a regra

$$a\langle J \rangle + b\langle J \rangle = (a + b)\langle J \rangle ,$$

onde a e b são expressões em x . Assim, usando essa regra, além das outras três, passo a passo, conclui-se que o polinômio-colchete dessa projeção do nó trifólio é

$$x^7 - x^3 - x^{-5} .$$

É aconselhável que o leitor obtenha essa expressão por conta própria.

Podemos ver que o polinômio-colchete é invariante por movimentos de Reidemeister do tipo II. Basta focalizar na região onde é feito o movimento, começando pela situação em que há dois cruzamentos:

$$\langle \langle \rangle \rangle = x \langle \langle \rangle \rangle + x^{-1} \langle \langle \rangle \rangle$$

Depois cada um dos dois colchetes é desmembrado de acordo com o segundo cruzamento, prestando-se atenção sempre na posição do segmento superior. O resultado é:

$$x \left[x \langle \langle \rangle \rangle + x^{-1} \langle \langle \rangle \rangle \right] + x^{-1} \left[x \langle \langle \rangle \rangle + x^{-1} \langle \langle \rangle \rangle \right]$$

Agrupando os termos, obtém-se

$$\left[\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array} \right] (x^2 - x^{-2}) \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \right]$$

mas as duas últimas parcelas da soma se cancelam por causa da segunda regra (aliás, a segunda regra é feita para que essa conta dê certo). Resta apenas o polinômio-colchete de dois segmentos de corda que não se cruzam, exatamente a posição que eles adquirem depois do movimento de Reidemeister.

A seguinte seqüência de igualdades mostra a invariância do polinômio-colchete para movimentos de Reidemeister do tipo III:

$$\left[\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right] = x \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right] + x^{-1} \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right] = x \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right] + x^{-1} \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right]$$

A segunda igualdade decorre da aplicação, duas vezes seguidas, da invariância sob o movimento de tipo II.

Por outro lado, é fácil mostrar que valem as igualdades

$$\left[\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \right] = -x^{-3} \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \right] = -x^3 \left[\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \right]$$

Isto mostra que o movimento de tipo I altera o polinômio-colchete, multiplicando-o por $-x^{-3}$ ou $-x^3$, de acordo com o cruzamento. Note que no lado esquerdo o cruzamento contribuía com $\tau = -1$ para a torção, enquanto que no da direita contribuía com $\tau = +1$. Assim, podemos dizer que o efeito do movimento de tipo I é multiplicar por $-x^{3\tau}$ o polinômio-colchete, quando um cruzamento de torção τ é desfeito.

O polinômio de Jones

Felizmente o fato de a torção e o polinômio-colchete não serem invariantes pelos movimentos de tipo I permite que os combinemos de forma a criar um polinômio invariante pelo tipo I, sem que ele perca a propriedade de também ser invariante pelos movimentos de tipos II e III.

Seja J a projeção antes do movimento de tipo I e J' a projeção após o mesmo movimento, com a hipótese de que J' tenha um cruzamento a menos do que J (indicando o sentido em que é feito o movimento). Seja τ a torção do cruzamento que será desmanchado. Retomando a definição de torção, observamos que

$$\tau(J') = \tau(J) - \tau .$$

Por outro lado, da seção anterior deduzimos que

$$\langle J' \rangle = -x^{-3\tau} \langle J \rangle .$$

Agora definimos o polinômio q_J por

$$q_J(x) = (-x^3)^{-\tau(J)} \langle J \rangle$$

e queremos provar que $q_{J'} = q_J$. Ora,

$$\begin{aligned} q_{J'}(x) &= (-x^3)^{-\tau(J')} \langle J' \rangle \\ &= (-x^3)^{-\tau(J)+\tau} (-x^{-3\tau}) \langle J \rangle \\ &= (-x^3)^{-\tau(J)} (-x^3)^\tau (-x^{-3\tau}) \langle J \rangle \\ &= (-x^3)^{-\tau(J)} \langle J \rangle \\ &= q_J(x) . \end{aligned}$$

Observe que q_J também é invariante por movimentos de Reidemeister de tipos II e III, pois em sua definição entram apenas a torção e o polinômio-colchete, que são invariantes por esses movimentos.

A título de exemplo, voltamos à projeção do nó trifólio em que obtivemos o polinômio-colchete $x^7 - x^3 - x^{-5}$. Como a torção dessa projeção é igual a -3 então

$$q_J(x) = (-x^3)^3 (x^7 - x^3 - x^{-5}) = -x^{16} + x^{12} + x^4 .$$

O *polinômio de Jones* é definido a partir de q_J apenas trocando-se x por $t^{-1/4}$, por uma questão de respeito à maneira como ele foi originalmente

definido. Denotaremos esse polinômio por V_J , mas por simplicidade, quando estiver claro de que nó ou enlace estamos falando, usaremos apenas V . Então, no mesmo exemplo do nó trifólio,

$$V(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}.$$

O polinômio de Jones para enlaces

Observe que para enlaces com duas ou mais componentes o polinômio de Jones pode depender da escolha de orientação, não por causa do polinômio-colchete, cujo cálculo não depende da orientação, mas por causa da torção. Assim, o polinômio de Jones é um invariante entre projeções orientadas, mas não fica unicamente definido num enlace sem orientação. Mesmo assim, como sabemos que a orientação entra apenas na determinação da torção, podemos ter uma idéia de como diferem os polinômios de Jones do mesmo enlace com orientações distintas.

Chamemos de J o enlace orientado. Como

$$q_J(x) = (-x^3)^{-\tau(J)} \langle J \rangle (x)$$

e x deve ser substituído por $t^{-1/4}$, então

$$V_J(t) = (-t^{-3/4})^{-\tau(J)} \langle J \rangle (t^{-1/4}).$$

Agora chamemos de \tilde{J} um enlace que tenha a mesma projeção de J , mas seja orientado diferentemente. Como o polinômio-colchete é determinado sem uso da orientação, temos $\langle J \rangle = \langle \tilde{J} \rangle$, logo

$$\frac{V_J(t)}{V_{\tilde{J}}(t)} = \frac{(-t^{-3/4})^{-\tau(J)} \langle J \rangle (t^{-1/4})}{(-t^{-3/4})^{-\tau(\tilde{J})} \langle \tilde{J} \rangle (t^{-1/4})} = (-t^{3/4})^{\tau(J) - \tau(\tilde{J})}$$

Ou seja, o polinômio de Jones para uma orientação é o polinômio de Jones para outra orientação multiplicado por uma certa potência de $-t^{3/4}$.

Obtenção direta do polinômio de Jones

Nesta Seção abordaremos uma maneira direta de se obter os polinômios de Jones.

A maneira direta acaba sendo mais prática porque, olhando para apenas um cruzamento podemos reduzir o polinômio procurado a uma combinação de polinômios de nós ou enlaces mais simples, e se já soubermos os polinômios desses nós mais simples não precisaremos decompor outros cruzamentos.

Relação de novelo Em primeiro lugar, da Seção anterior inferimos que o polinômio de Jones de um nó trivial é igual a 1:

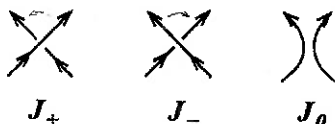
$$V_C(t) = 1 = t^0. \quad (1)$$

Substituindo-se x por $t^{-1/4}$ e levando-se em conta que $\tau(J \cup C) = \tau(J)$ e $\tau(C) = 0$, a segunda regra do polinômio-colchete se traduz, para o polinômio de Jones, em

$$V_{J \cup C}(t) = -(t^{1/2} + t^{-1/2})V_J(t). \quad (2)$$

A terceira regra também implica em uma relação para os polinômios de Jones, chamada de *relação de novelo* ("skein relation", em inglês), que passamos a descrever.

Sejam três enlaces orientados J_+ , J_- e J_0 que diferem apenas num cruzamento. Nesse cruzamento, eles são como mostra a figura abaixo:



Para produzir J_0 , é preciso conectar o segmento que chega ao cruzamento por cima com aquele que sai por baixo, e o segmento que chega por baixo ao que sai por cima. Então a relação entre seus polinômios de Jones é dada pela equação

$$t^{-1}V_{J_+}(t) - tV_{J_-}(t) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V_{J_0}(t) = 0. \quad (3)$$

Com o uso dessas três regras é possível escrever o polinômio de um enlace complicado em função de polinômios de enlaces mais simples. Como os polinômios de Jones são iguais em projeções equivalentes, pode-se tomar projeções mais simples dos enlaces restantes, não havendo necessidade de decompor um por um cada cruzamento. Aplicando-as seguidamente determina-se o polinômio de qualquer enlace.

Prova da relação de novelo

Sugere-se fortemente que o leitor não leia esta Seção e tente mostrar por conta própria porque vale a relação de novelo, usando a terceira regra

do polinômio-colchete. Em todo o caso, se o leitor não se sentir seguro, apresentamos a demonstração.

Primeiro, vamos diretamente às definições. Temos

$$V_{J_+}(t) = q_{J_+}(t^{-1/4}) = (-1)^{\tau(J_+)}(t^{3/4})^{\tau(J_+)}\langle J_+ \rangle(t^{-1/4}),$$

$$V_{J_-}(t) = q_{J_-}(t^{-1/4}) = (-1)^{\tau(J_-)}(t^{3/4})^{\tau(J_-)}\langle J_- \rangle(t^{-1/4}),$$

$$V_{J_0}(t) = q_{J_0}(t^{-1/4}) = (-1)^{\tau(J_0)}(t^{3/4})^{\tau(J_0)}\langle J_0 \rangle(t^{-1/4}).$$

Por simplicidade, vamos omitir o argumento $t^{-1/4}$ nas expressões de $\langle J_+ \rangle$, $\langle J_- \rangle$ e $\langle J_0 \rangle$.

As torções se relacionam pelas expressões

$$\tau(J_+) = \tau(J_0) + 1, \quad \tau(J_-) = \tau(J_0) - 1.$$

Os polinômios-colchetes se relacionam pela terceira regra. Pela terceira regra, surgem dois tipos de enlases que desfazem o cruzamento: um é o próprio J_0 , e o outro é o que une segmentos com orientações opostas, o qual chamaremos de J'_0 . Note que J'_0 não é um enlace orientado, porque as orientações entraram em conflito pela maneira como o segmento foram religados. No entanto, só estamos preocupados com o polinômio-colchete de J'_0 , e este ignora a orientação. A terceira regra diz que

$$\langle J_+ \rangle = t^{-1/4}\langle J_0 \rangle + t^{1/4}\langle J'_0 \rangle,$$

onde substitui-se x por $t^{-1/4}$. Quanto a J_- , temos que adaptar para obter

$$\langle J_- \rangle = t^{-1/4}\langle J'_0 \rangle + t^{1/4}\langle J_0 \rangle.$$

Agora podemos substituir essas expressões todas nas fórmulas dos polinômios de Jones dos três enlases. Para simplificar, denotaremos

$$\chi_+ = (-1)^{\tau(J_0)}(t^{3/4})^{-\tau(J_0)}V_{J_+}(t),$$

e χ_- , χ_0 analogamente, multiplicando os respectivos polinômios pelo mesmo fator. Achando a relação entre χ_+ , χ_- e χ_0 teremos a relação entre os polinômios, bastando cancelar o fator comum.

Então

$$\chi_+ = -t^{3/4} (t^{-1/4}\langle J_0 \rangle + t^{1/4}\langle J'_0 \rangle) = -t^{1/2}\langle J_0 \rangle - t\langle J'_0 \rangle,$$

$$\chi_- = -t^{-3/4} (t^{-1/4} \langle J'_0 \rangle + t^{1/4} \langle J_0 \rangle) = -t^{-1} \langle J'_0 \rangle - t^{-1/2} \langle J_0 \rangle,$$

$$\chi_0 = \langle J_0 \rangle.$$

A relação de novelo é obtida ao se eliminar $\langle J'_0 \rangle$ das equações:

$$t^{-1} \chi_+ - t \chi_- = -t^{-1/2} \langle J_0 \rangle + t^{1/2} \langle J_0 \rangle = (-t^{-1/2} + t^{1/2}) \chi_0.$$

Palíndromos

Imaginemos a seguinte situação: tomamos uma projeção e também sua *imagem especular*, que pode ser desenhada apenas invertendo todos os cruzamentos (isto é, fazendo os segmentos superiores se tornarem inferiores, e vice-versa).

Como se comporta o polinômio de Jones de um nó ou de um enlace (orientado) quando se invertem as posições de todos os cruzamentos?

A resposta é bastante simples: o polinômio de Jones da imagem especular é exatamente o polinômio de Jones original trocando-se t por t^{-1} (fica como exercício para o leitor olhar para a relação de novelo para se convencer desse fato). Por exemplo, a imagem especular da projeção do nó trifólio que nos serviu de exemplo tem um polinômio de Jones

$$V(t) = t + t^3 - t^4$$

(sempre escrevemos o polinômio com as potências em ordem crescente).

Dáí podemos tirar uma importante conclusão: *como as duas projeções têm polinômios de Jones diferentes então elas não correspondem ao mesmo nó!* Em outras palavras, não há uma isotopia que transforme uma projeção na outra! Isso mostra que o nó trifólio não é um só, ele se apresenta em duas versões!

Por outro lado, tomando uma projeção do nó figura-oito obteremos o polinômio de Jones

$$V(t) = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$$

(1 representa t^0 e t representa t^1). Curiosamente, sua imagem especular também deve ter o mesmo polinômio, pois a troca de t por t^{-1} não muda nada. Esse polinômio é um *palíndromo*, expressão usada para denotar palavras simétricas como “arara”. Nesta analogia, as letras correspondem aos coeficientes das potências de t .

De fato esse polinômio tinha que ser palindrômico, simplesmente porque para o nó figura-oito qualquer projeção sua é isotópica a sua imagem especular, fato que convidamos o leitor a verificar. Se as projeções são isotópicas, seus polinômios têm que ser iguais, afinal o polinômio é um invariante! Então, ao contrário do nó trifólio, só existe um nó figura-oito.

Há que se ter cuidado, no entanto, com a afirmação inversa: não podemos concluir que um nó cujas projeções tenham polinômios palindrômicos se apresenta em apenas uma forma. Como já dissemos, o polinômio de Jones não é um invariante completo, no sentido de que polinômios de Jones iguais não implicam em projeções equivalentes.

Entre os nós de até sete cruzamentos, apenas os nós 4_1 (figura-oito) e 6_3 são palindrômicos. Os nós palindrômicos são candidatos a se apresentarem em apenas uma versão, mas esse fato precisa ser verificado. Sugerimos ao leitor que tente mostrar que a projeção do nó 6_3 mostrada na tabela é equivalente a sua imagem especular. Se conseguir, ótimo. Se não conseguir, ainda não poderá afirmar nada, pode ter sido apenas falta de sorte! Mas pode ter sido também porque isso é impossível! Para provar que é impossível, se for este o caso, será preciso recorrer a outro invariante que assuma valores diferentes em cada projeção.

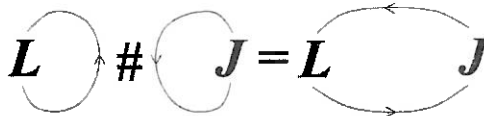
Exercícios e experimentos

1. Verificar que a projeção do nó figura-oito é equivalente a sua imagem especular.
2. Conseguindo o item anterior com corda, mostre a isotopia entre uma projeção e outra usando exclusivamente movimentos de Reidemeister e isotopias planares.
3. Tentar o mesmo com o 6_3 .
4. Termine a demonstração de que a tricolorabilidade é um invariante.
5. Tente, com corda, construir um nó bem complicado. Veja se é possível arranjar uma projeção com o menor número possível de cruzamentos (você verá que é muito difícil saber ao certo se conseguiu). Calcule o polinômio de Jones e procure uma tabela de nós para pelo menos tentar identificá-lo. Sua projeção é igual à do nó encontrado na tabela? Como saber que se trata do mesmo nó? *Sugestão: faça os exercícios abaixo*

para ter melhores ferramentas para ajudar no cálculo do polinômio e encontre um atlas completo sobre nós e enlaces no site

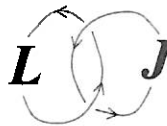
<http://www.math.toronto.edu/~drorbn/KAtlas/Knots/>

- Sejam L e J dois enlaces orientados quaisquer que não estão enlaçados entre si, isto é, que podem ser afastados um do outro. Ache uma fórmula para o polinômio de $L \cup J$ em função dos polinômios de L e J .
- Seja $L \# J$ a *composição* dos enlaces L e J , como mostra a figura abaixo. Expresse o polinômio de Jones de $L \# J$ em função dos polinômios de Jones de L e J .



Um enlace é dito *primo* se não pode ser escrito como a composição de dois outros. Em geral, as tabelas de nós só apresentam nós primos. Uma pergunta em aberto é saber se dois nós não triviais podem ser compostos de tal forma a resultar no nó trivial.

- Faça uma dedução semelhante no caso em que os dois enlaces se enlaçam como na figura abaixo.



E se uma das orientações for invertida?

- Os nós são, em geral, apresentados por projeções com o mínimo de cruzamentos possível, e por esse número são ordenados. O número mínimo de cruzamentos não deixa de ser um invariante. Hoje em dia há programas de computador feitos para tabular nós (são progressos bem recentes, ver por exemplo o artigo de Hoste-Thistlethwaite-Weeks, "The first 1701936 knots", *Math. Intelligencer* 20(4) (1998) 33-46), o

que permite também contar o número de nós primos para um dado número mínimo n de cruzamentos. Até $n = 22$ os resultados são (resultados tirados do site mencionado acima):

0	1
1	0
2	0
3	1
4	1
5	2
6	3
7	7
8	21
9	49
10	165
11	367
12	1.288
13	4.878
14	19.536
15	85.263
16	379.799
17	1.769.979
18	8.400.285
19	40.619.285
20	199.631.989
21	990.623.857
22	4.976.016.485

Investigue que regra de crescimento parecem obedecer esses números.

10. Tome um nó trivial projetado com apenas um cruzamento (em forma de “oito” ou infinito) e use essa projeção para mostrar que a relação de novelo (terceira regra) implica na segunda regra (aquela que fornece o polinômio da união não enlaçada de um enlace qualquer e de um nó trivial).
11. Existem vários polinômios invariantes, alguns deles até mais eficientes do que os polinômios de Jones. O polinômio de Alexander, que foi o primeiro a ser descoberto, na década de 1920, é menos eficiente do

que o polinômio de Jones, pois não distingue imagens especulares e se repete em alguns nós de poucos cruzamentos. Chamando de A esse polinômio, ele também pode ser obtido de uma relação de novelo:

$$A(J_+) - A(J_-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})A(J_0) = 0,$$

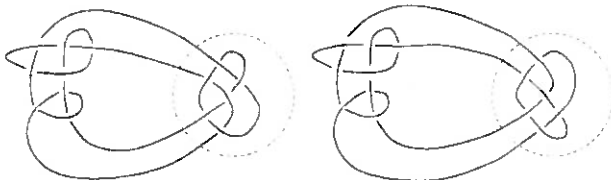
além de $A(C) = 1$. Calcule esse polinômio em alguns exemplos de nós e enlaces e tente obter algumas propriedades. Por exemplo, qual é o polinômio de Alexander do enlace trivial de duas componentes? Ou ainda, o polinômio de Alexander distingue imagens especulares?

12. O polinômio HOMFLY (nome que incorpora iniciais de seus descobridores) é mais geral que o polinômio de Jones e o polinômio de Alexander. Ele é um polinômio de duas variáveis x e y , e pode ser calculado pela relação de novelo

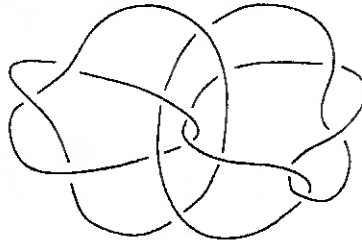
$$xP(J_+) + x^{-1}P(J_-) + yP(J_0) = 0.$$

Calcule o polinômio HOMFLY para o enlace trivial de duas componentes.

13. Verifique que substituindo x por it^{-1} e y por $i(t^{-1/2} - t^{1/2})$ no polinômio HOMFLY, onde $i = \sqrt{-1}$, resulta no polinômio de Jones. Já o polinômio de Alexander sai de $x = i$ e $y = i(t^{1/2} - t^{-1/2})$.
14. Os dois nós abaixo são os *nós mutantes de Kinoshita-Terasaka*. Um é obtido do outro rodando em 180 graus a região dentro do círculo e depois tomando sua imagem especular. Veja se algum polinômio distingue esses dois nós (*dica: se o HOMFLY não funcionar então os outros não podem funcionar tampouco, uma vez que são casos particulares dele*). Pode-se mostrar que esses nós são de fato diferentes.



15. Uma pergunta em aberto é se existe algum nó não trivial cujo polinômio de Jones dê igual a 1. Recentemente (M. Thistlethwaite, "Links with trivial Jones polynomial", *J. of Knot Theory and its ramifications* **10** (4) (2001) 641-643) mostrou-se que há enlaces de duas componentes cujos polinômios de Jones são iguais ao do enlace trivial com mesmo número de componentes (isto é, $-t^{1/2} - t^{-1/2}$). Um artigo de 2003 do mesmo autor, com colaboradores, mostra que há infinitos enlaces desse tipo, com qualquer número de componentes maior ou igual a 2 (mais precisamente, enlaces não triviais de k componentes com o mesmo polinômio de Jones que o enlace trivial de k componentes). A figura abaixo mostra um enlace de duas componentes, com 15 cruzamentos.



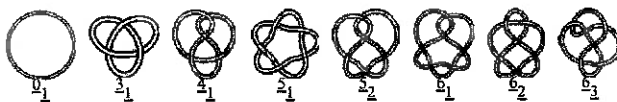
Verifique a afirmação do autor para esse enlace. Mostre que, no entanto, o polinômio HOMFLY distingue esse enlace do enlace trivial de duas componentes.

Pesquisar

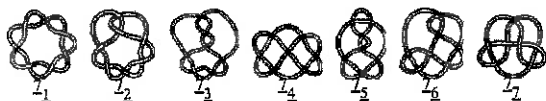
Estas notas foram redigidas a partir do livro "The Knot Book", de Colin C. Adams, voltado para um público bastante amplo de não-matemáticos. Recomenda-se fortemente a leitura do livro. Ele contém também muitos problemas abertos, mas como foi editado em 1993 pode ser que alguns deles já tenham sido resolvidos desde lá.

A tabela anexa, contendo os nós primos de até 10 cruzamentos, foi tirada do site citado acima.

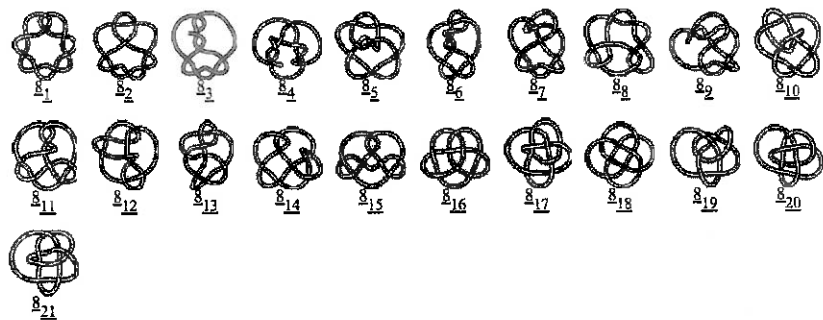
Nós com até 6 cruzamentos



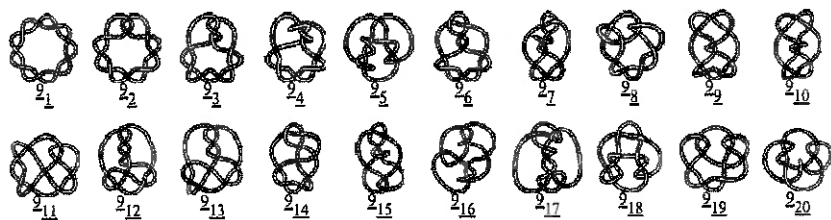
Nós com 7 cruzamentos

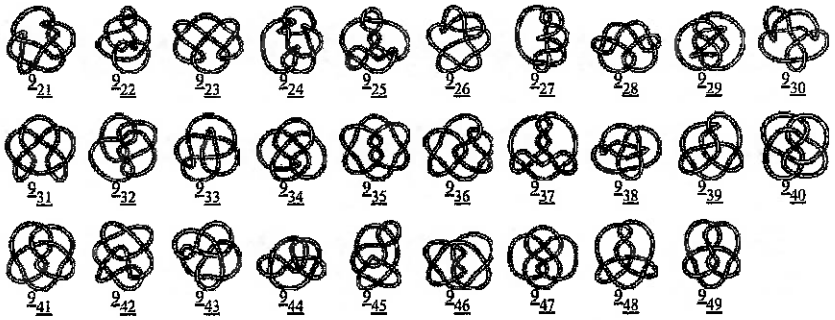


Nós com 8 cruzamentos

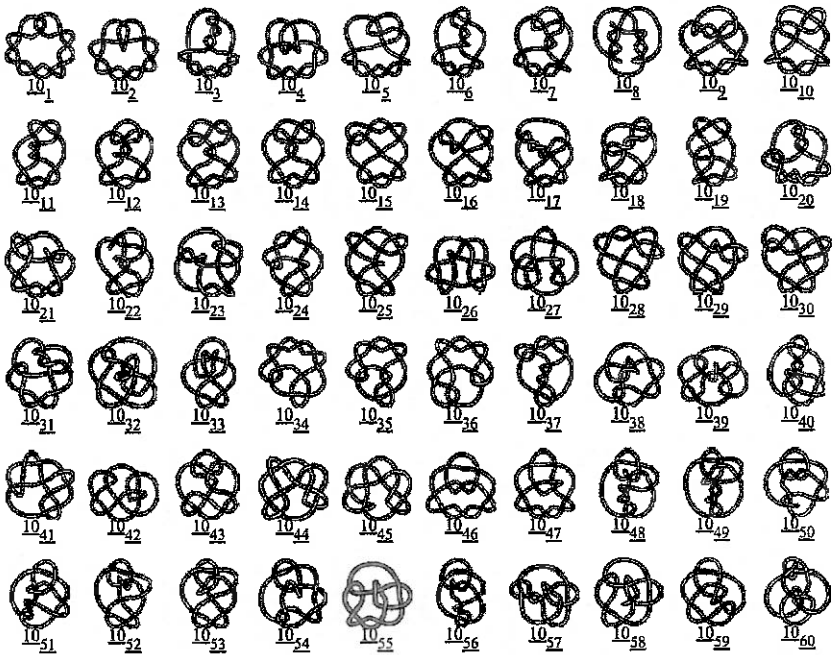


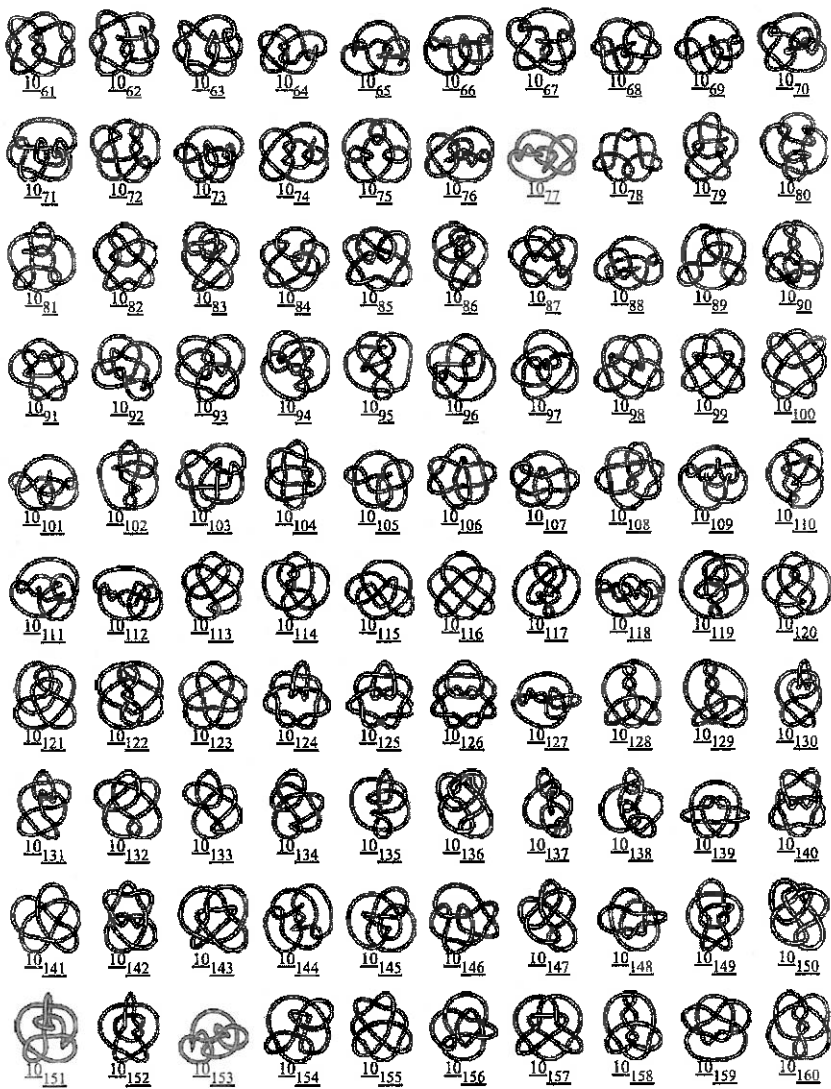
Nós com 9 cruzamentos

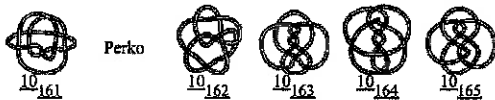




Nós com 10 cruzamentos







In 1974 K. Perko notou que os nós etiquetados como 10_{161} e 10_{162} nas tabelas de Rolfsen eram de fato equivalentes. Nesta tabela foi removido o antigo 10_{162} e os nós seguintes renumerados, de forma que o total de nós (primos) com 10 cruzamentos (mínimo) é 165, um a menos que os 166 de Rolfsen.