

348

Por um ponto P exterior a um dado círculo Γ passam uma secante e uma tangente a Γ . A secante intercepta Γ em A e B , e a tangente intercepta Γ em C , estando A , B e C do mesmo lado do diâmetro que passa por P . Seja Q a projeção de C sobre esse diâmetro. Prove que a reta QC bissecta o ângulo $A\hat{Q}B$.

349

a) Mostre que $\cos \frac{\pi}{7}$ é uma raiz da equação

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

b) Encontre todos os números racionais p , q e r tais que

$$p \cos \frac{\pi}{7} + q \cos \frac{2\pi}{7} + r \cos \frac{3\pi}{7} = 1.$$

(Sugestão do leitor *Wilson da Silva Ramos*, Belém, PA.)

350

a) Sejam m , n , k inteiros positivos. Mostre que

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0} \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \binom{m}{2} \binom{n}{k-2} + \dots + \binom{m}{k} \binom{n}{0}.$$

b) Seja p um número primo. Mostre que

$$\binom{2p}{p} - 2$$

é um múltiplo de p^2 .

PROBLEMINHAS

I

Em cada rodada de lançamento de dados, o famoso apostador *Hystrix Tardigradus* sempre aposta a metade do dinheiro que tem no momento. Quando ganha, ele ganha o dobro do que apostou. Ontem, *Hystrix* ganhou tantas rodadas quantas perdeu. No fim da noite, ele ganhou, perdeu ou saiu com a mesma quantia com que começou?

2

Um grilo começa em um quadrado com o número 1 e move-se de quadrado em quadrado numerando-os com números sucessivos até o 25. O grilo nunca entra mais do que uma vez em cada quadrado e move-se sempre horizontalmente e verticalmente, exceto por um pulo mostrado na figura da esquerda. Determine na figura da direita, na qual a maioria dos números foram apagados, o caminho do grilo.



	16		
			10
		20	
	3	19	

3

Escrevemos, com tinta invisível, na primeira linha da primeira coluna, um número de quatro dígitos diferentes entre 0 e 9. As linhas seguintes indicam tentativas de descobrir o número secreto. Cada tentativa é classificada com as letras C (certo) e B (bingo). C indica que o número tentado tem um dígito em comum com o número secreto, mas em posição diferente. A letra B indica que o número tentado tem um dígito em comum com o número secreto na mesma posição. Descubra os números secretos das tabelas.

	B B B B
1 2 5 9	C
1 3 8 9	C B
1 3 5 7	B B
4 3 9 7	B B

número secreto I

	B B B B
3 9 2 0	C C C
8 7 4 5	B
9 0 7 5	C C
8 3 9 7	C C C

número secreto II

(Tirados do livro *Hard-to-solve brainteasers*, de Jaime & Lea Ponichik.)