UMA CONJECTURA DE GAUSS SOBRE CURVAS PLANAS

EDUARDO ALMEIDA PRADO

ORIENTADOR: VERA LUCIA CARRARA ZANETIC

Definição: Uma curva fechada normal de classe C^1 é uma imersão C^1 $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ tal que se $x \neq y$ e $f(x)=f(y)$, então $\{x,y\}$ é um ponto duplo de f e $\{f'(x),f'(y)\}$ Podemos pensar em f como sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, periódica de período 1.

Definição: Um laço de f é uma restrição de f a um intervalo $[a,b]$ t.q. $f|[a,b)$ é injetora e $f(a)=f(b)$.

Sejam $\{x_1,y_1\},\ldots,\{x_n,y_n\}$ os pontos duplos de f em $[0,1), x_1<\ldots<x_n$, $x_i<y_i$ e $f(x_i)=f(y_i)$, $\forall\ i \in \{1,\ldots,n\}$.

Associaremos a f uma palavra w(f) construída colocando-se os x_i's e y_i's, $1\leq i\leq n$, na ordem natural de $\mathbb{R}$: $w(f) = z_1\ldots z_{2n}$, $z_i = x_j$ ou y_j, para algum j, $1\leq j\leq n$.

Faremos uma prova do seguinte

<u>Teorema</u> (Conjectura de Gauss)

Seja f uma curva fechada normal de classe C^1 com n pontos duplos. Então para cada i, $1\leq i\leq n$, o número de símbolos de w(f) entre x_i e y_i é par.

<u>Lema</u>. Se $f|[x_i,y_i]$ não é laço, então existe $\{x_j,y_j\}$ ponto duplo t.q. $x_i<x_j<y_j<y_i$ e $f|[x_j,y_j]$ é laço.

Demonstração

Demonstraremos por indução no número k de pontos duplos $\{x_j,y_j\}$ t.q. $x_i<x_j<y_j<y_i$ (pontos duplos nestas condições!).Para k=1 o resultado é imediato.

Suponhamos que seja verdade para $k<\ell$. Seja $k=\ell$, tomemos um ponto duplo $\{x_j,y_j\}$ t.q. $x_i<x_j<y_j<y_i$. Se $f|[x_j,y_j]$ é laço, nada temos a demonstrar, caso contrário, aplicando a hipótese de indução para $\{x_j,y_j\}$ temos que $\{x_t,y_t\}$ ponto duplo t.q. $f|[x_t,y_t]$ é laço e $x_i<x_j<x_t<y_t<y_j<y_i$.

Demonstração do Teorema

1º caso: $f|[x_i,y_i]$ é laço.

Neste caso, entre x_i e y_i não existem pares $\{x_j,y_j\}$ de pontos duplos, logo, o número de símbolos entre x_i e y_i é igual ao número de vezes que $f|[y_i,(x_i)+1]$ corta o laço $f|[x_i,y_i]$.

Sejam $a_1,\ldots,a_k$ em $w(f)$ entre x_i e y_i e sejam $b_1,\ldots,b_k$ t.q. $\{a_j,b_j\}$ é ponto duplo, $1\leq j\leq k$; $\sigma:\{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,k\}$ permutação t.q. $b_{\sigma(1)}<\ldots<b_{\sigma(k)}$.

Os arcos $f((y_i,b_{\sigma(1)}))$, ..., $f((b_{\sigma(k-1)},b_{\sigma(k)}))$, $f((b_{\sigma(k)},(x_i)+1))$ estão alternadamente em componentes conexas distintas de $\mathbb{R}^2-f([x_i,y_i])$. Como $f((y_i,b_{\sigma(1)}))$ e $f((b_{\sigma(k)},(x_i)+1))$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^2-f([x_i,y_i])$ temos um número ímpar de arcos, a saber k+1, portanto k é par.

2º caso: $f|[x_i,y_i]$ não é laço.

Neste caso, pelo lema, $\{x_j,y_j\}$ ponto duplo de f com $x_i<x_j<y_j<y_i$ e $f|[x_j,y_j]$ laço. Podemos supor que se $\{x,y\}$ é ponto duplo t.q. $x_i<x<y<y_i$ e $f|[x,y]$ é laço, então $x_j<x$. Chamaremos

$f|[x_j,y_j]$ de 1º laço de $f|[x_i,y_i]$.

Obs.: Neste caso $f([x_i,x_j))$ está inteiramente contida em uma componente conexa de $R^2-f([x_i,y_i])$ pois / $\{x_\ell,y_\ell\}$ ponto duplo t.q. $x_i<x_\ell<x_j<y_\ell<y_j<y_i$.

Do 1º caso sabemos que entre x_j e y_j existe um número par de símbolos $a_1,\ldots,a_{2m}$. Sejam $b_1,\ldots,b_{2m}$ pontos de $[0,1)$ t.q. $\{a_k,b_k\}$ é ponto duplo de f, $1\le k\le 2m$.

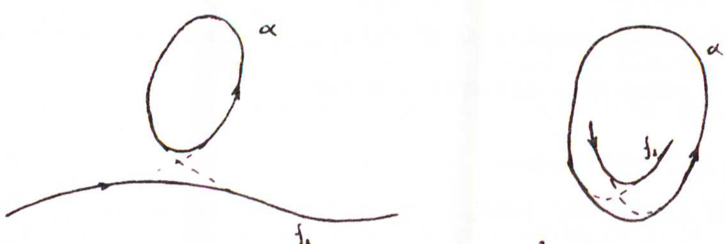
i) Do fato de $f|[x_j,y_j]$ ser laço temos que / b_k, $x_j<b_k<y_j$.

ii) Por construção / b_k t.q. $x_i<b_k<x_j$

iii) Se existir algum b_k, $1\le k\le 2m$, $y_j<b_k<y_i$, então o número de b_k's entre y_j e y_i é par. A demonstração deste fato é análoga à demonstração do 1º caso, tomando o laço $f|[x_j,y_j]$ e os arcos $f((y_j,t_1)),\ldots,f((t_{p-1},t_p)),f((t_p,y_i))$, onde $t_1<\ldots<t_p$ e $t_1,\ldots,t_p$ são os b_k's t.q. $y_j<b_k<y_i$, e notando que $f((y_j,t_1))$ e $f((t_p,y_i)$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^2-f([x_i,y_i])$, fato que segue da observação acima.

Logo, o número de b_k's entre x_i e y_i é par.

Seja um laço de uma curva f. Podemos separá-la da seguinte maneira:



obtendo uma nova curva fechada normal c^1: f_1.

Se $f|[x_i,y_i]$ não é laço, seja $f|[x_j,y_j]$ o 1º laço de

$f|[x_i,y_i]$. Ao separarmos f em (x_j,y_j) obtemos uma nova curva f_1. De i, ii e iii temos que a paridade do número de símbolos entre x_i e y_i em $w(f)$ e $w(f_1)$ não se altera. Podemos repetir o processo até obtermos uma curva f_q onde $f_q|[x_i,y_i]$ é laço. Do 1º caso e da preservação da paridade mensionada acima, segue o resultado.

BIBLIOGRAFIA:

Craveiro de Carvalho, F.J. Characterizing maximally looped closed curves, Amer. Math. Montly, March 1985, 202-7.