RT-MAE 2006-15

MODIFICAÇÕES E ALTERNATIVAS AOS TESTES DE LEVENE E DE BROWN E FORSYTHE PARA IGUALDADE DE VARIÂNCIAS E MÉDIAS

Antonia E. de Almeida, Silvia N. Elian
Juvêncio S. Nobre

Palavras-Chave: Teste de Levene, Teste de Brown e Forsythe, Médias Aparadas, Variâncias "Winsorizadas", *Bootstrap*.
Classificação AMS: 62H15.

- Setembro de 2006 -

Modificações e Alternativas aos Testes de Levene e de Brown e Forsythe para Igualdade de Variâncias e Médias

Antonia Erilânia de Almeida[1]

Silvia Nagib Elian[2]

Juvêncio Santos Nobre[3]

[1] **E-mail: erilania@usp.br**

[2] **Departamento de Estatística**
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo
C.P. 66281 – São Paulo, SP Brasil
E-mail: selian@ime.usp.br

[3] **E-mail: juvencio@ime.usp.br**

Resumo

Os testes usuais para comparar variâncias e médias, teste de Bartlett e teste F da análise de variância com um fator, supõem que as amostras sejam provenientes de distribuições normais. Para o teste de igualdade de médias, a suposição de homogeneidade de variâncias também é necessária. Alguns problemas se destacam quando tais suposições básicas são violadas, como tamanho excessivo e baixo poder. Neste trabalho descrevemos inicialmente o Teste de Levene para igualdade de variâncias, que é robusto a não normalidade, e o teste de Brown e Forsythe para igualdade de médias quando existe desigualdade de variâncias. Apresentamos várias modificações do teste de Levene e do teste de Brown e Forsythe, propostas por diferentes autores. Finalizando, analisamos e aplicamos uma forma do teste modificado de Brown e Forsythe a um conjunto de dados reais.

Palavras-Chave: Teste de Levene, Teste de Brown e Forsythe, Médias Aparadas, Variâncias "Winsorizadas", *Bootstrap*.

1. Introdução

Os testes de Levene e de Brown e Forsythe têm-se constituído em técnicas úteis para comparação de médias e variâncias quando as suposições básicas dos testes de igualdade de variâncias e de igualdade de médias não são satisfeitas.

Observa-se que estes testes tradicionais foram sofrendo modificações ao longo do tempo, propostas por diversos autores.

O Teste de Bartlett para homogeneidade de variâncias não é robusto para divergência de normalidade. Visando contornar esse problema, propõe-se o uso do Teste de Levene para a comparação de variâncias de k grupos de observações provenientes de distribuições contínuas e não necessariamente normais. O Teste de Levene é robusto à não-normalidade. No entanto, alguns autores destacam certas deficiências no teste, e apresentam pequenas alterações que podem melhorar sua eficiência.

Por outro lado, o teste F da análise de variância com um fator para comparar médias de k amostras independentes de populações normais apresenta desvios no nível de significância quando os grupos possuem variâncias populacionais diferentes. Para esse problema foram propostas várias soluções, entre elas o teste de Brown e Forsythe. Vários autores apontam alguma inadequação no Teste de Brown e Forsythe e apresentam algumas modificações para o mesmo.

O objetivo principal desse trabalho é analisar as modificações propostas aos testes de Levene e de Brown e Forsythe.

O presente artigo está esquematizado da seguinte forma: na Seção 2 é apresentado o Teste de Levene, que testa igualdade de variâncias quando os dados são de distribuições contínuas, mas não necessariamente normais, e algumas de suas modificações. Entre essas modificações está a proposta por Brown e Forsythe (1974a) que considera as distâncias das observações com relação à suas medianas amostrais ao invés das médias amostrais. Usando as medianas amostrais ao invés das médias, o teste se torna mais robusto para amostras pequenas e pode ser encontrado no pacote computacional MINITAB 14.

A Seção 3 se destina ao estudo do teste de igualdade de médias com amostras independentes de populações normais para variâncias desiguais, Teste de Brown e

Forsythe. Também nesta seção são apresentadas algumas modificações deste teste, propostas por diferentes autores.

Uma aplicação do Teste de Brown e Forsythe modificado a um conjunto de dados reais e algumas conclusões encontram-se na Seção 4.

Para a execução do teste de Brown e Forsythe modificado, apresentado na Seção 4, foi desenvolvido um programa na linguagem de programação R. O programa calcula a estatística do teste de Brown e Forsythe modificado e o nível de significância, que é estimado via *Bootstrap*. O programa e o conjunto de dados utilizados na Seção 4 são apresentados no Apêndice.

2. Teste de Levene e suas modificações

Muitas técnicas estatísticas requerem a suposição de igualdade de variâncias das variáveis de interesse para as populações envolvidas. O teste padrão de homogeneidade de variâncias, teste de Bartlett, é uma ferramenta eficiente somente se as variáveis possuem distribuição aproximadamente normal. Quando a suposição de normalidade é violada, o tamanho real do teste (nível de significância atingido) pode ser muito maior do que o nível de significância fixado. Um procedimento que é relativamente insensível a desvios da normalidade é o Teste de Levene. Este teste é robusto, no sentido de que, na ausência de normalidade, seu tamanho real quase coincide com o nível de significância fixado para uma grande variedade de distribuições de probabilidade.

Levene (1960) propôs uma estatística para testar igualdade de variâncias quando as amostras são de tamanhos iguais, que foi posteriormente generalizada para amostras de tamanhos diferentes. A estatística é obtida a partir de uma Análise de Variância com um fator, sendo que os níveis são as populações e cada observação é substituída pelo desvio absoluto da variável em relação à média do grupo.

Suponhamos que $k \geq 2$ amostras aleatórias independentes entre si, $X_{i1},\ldots,X_{in_i}$, $i=1,\ldots,k$, sejam tomadas. A amostra i é uma coleção de n_i variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas com distribuição G_i, média μ_i e variância σ_i^2, para G_i, μ_i e σ_i^2 desconhecidos. A hipótese nula de igualdade de variâncias,

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2,$$

é testada ao nível de significância α contra a hipótese alternativa que nem todas as variâncias são as mesmas,

$$H_a : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \quad \text{para algum } i \neq j,\ i, j = 1,2,...,k.$$

Denotamos os desvios absolutos das variáveis X_{ij} com relação às médias amostrais dos grupos $\overline{X}_{i.} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ por $Z_{ij} = \left|X_{ij} - \overline{X}_{i.}\right|$, $j = 1,2,...,n_i$, $i = 1,2,...,k$ e definimos a estatística,

$$W_0 = \frac{n-k}{k-1} \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\overline{Z}_{i.} - \overline{Z}_{..})^2}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - \overline{Z}_{i.})^2}$$

onde $\overline{Z}_{i.} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left|X_{ij} - \overline{X}_{i.}\right|$, $\overline{Z}_{..} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left|X_{ij} - \overline{X}_{i.}\right|$ e $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

O Teste de Levene consiste em rejeitar H_0 a favor de H_a se W_0 excede $F_{k-1,n-k,1-\alpha}$, o quantil de ordem $(1-\alpha)$ da distribuição F com $k-1$ e $n-k$ graus de liberdade, respectivamente, no numerador e denominador.

Portanto, o teste é uma análise de variância com um fator na variável desvio absoluto Z_{ij}. O uso de Z_{ij} ao invés de Z_{ij}^2 faz com que o critério do teste se torne menos sensível para distribuições G_i com caudas pesadas. Mesmo assim, como em geral as variáveis aleatórias Z_{ij} não são normalmente distribuídas nem independentes (verifica-se que Z_{ij} e Z_{il}, para $j \neq l$, têm uma correlação de ordem n_i^{-2}), a distribuição de W_0 sob a hipótese nula não é F de Snedecor.

No entanto, para uma variedade de distribuições G_i, por exemplo, distribuições normais e distribuições simétricas de caudas pesadas tais como a exponencial dupla e a t-Student com quatro graus de liberdade, a níveis de significâncias usuais, $\alpha = 0{,}01$, 0,05 ou 0,10 e amostras de tamanho pelo menos 10, o teste de Levene é robusto. Brown e Forsythe (1974a), num estudo de simulação, verificaram que, neste caso, o quantil de ordem (1-α) da distribuição nula de W_0, estimado pelo Método de Monte Carlo, é aproximadamente igual a $F_{k-1,\, n-k,\, 1-\alpha}$. Verificaram ainda que a falta de robustez devia-se à assimetria das distribuições e não à existência de correlação entre os desvios.

Estes fatos levaram à construção de formas alternativas do teste de Levene.

Para distribuições G_i assimétricas, como a qui-quadrado com quatro graus de liberdade, e distribuições com caudas extremamente pesadas, como a Cauchy, Brown e Forsythe (1974a) observaram que o teste de Levene tende a fornecer muitos resultados significativos, de modo que o tamanho real excede o nível de significância fixado. Por esse motivo, uma modificação do método de Levene é proposta pelos autores. Consiste em alterar a estatística W_0, substituindo o estimador de posição central $\overline{X}_{i.}$ por versões mais robustas.

Substituindo a média $\overline{X}_{i.}$ pela mediana do grupo, $M_{i.}$, na expressão de Z_{ij}, ou seja, utilizando-se $Z_{ij}^{(M)} = \left|X_{ij} - M_{i.}\right|$, $j = 1,\dots,n_i$, $i = 1,\dots,k$, define-se

$$W_{50} = \frac{(n-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{Z}_{i.}^{(M)} - \overline{Z}_{..}^{(M)})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Z_{ij}^{(M)} - Z_{i.}^{(M)}\right)^2},$$

onde

$$\overline{Z}_{i.}^{(M)} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left|X_{ij} - M_{i.}\right|,$$

$$\overline{Z}_{..}^{(M)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left|X_{ij} - M_{i.}\right| \text{ e } n = \sum_{i=1}^{k} n_i .$$

Utilizou-se ainda a estatística W_{10}, definida a partir de W_0, substituindo a média $\overline{X}_i$ por $\widetilde{X}_i$, sendo que $\widetilde{X}_i$ é a média aparada a 10% do i-ésimo grupo. Se $0 < \delta < 1$, dizemos que $\widetilde{X}$ é a média aparada a 100δ % se for obtida como a média após a eliminação das 100δ % menores observações e das 100δ % maiores observações.

Brown e Forsythe (1974a) realizaram um estudo de simulação cujos resultados indicaram que a igualdade de variâncias em distribuições de caudas pesadas pode ser melhor testada por uma estatística da forma W_{10} e em distribuições assimétricas, por uma estatística similar a W_{50}. Portanto, quando desvios de normalidade forem antecipados, a estimativa da média para cada grupo na estatística de Levene deve ser substituída por uma estimativa mais robusta de locação central. A perda no poder observada quando W_{10} é usada ao invés de W_0 é pequena relativa ao aumento da probabilidade de uma rejeição falsa da hipótese nula causada pela não normalidade.

O poder do teste de Levene de homogeneidade de variâncias, que emprega os resíduos calculados usando a mediana amostral, pode ser aumentado com as modificações propostas por Hines e Hines (2000).

Com o objetivo de aumentar o poder do teste de Levene com base na mediana, Hines e Hines (2000) propõem identificar e remover os zeros estruturais e usar contrastes relevantes, visto que o procedimento de Levene pode apresentar falhas, como por exemplo, ignorar a falta de independência dos resíduos envolvidos, não explorar o fato de que médias (ou medianas) e variâncias de variáveis aleatórias são relacionadas em muitas distribuições, como a distribuição Poisson e a Binomial. Segundo os autores, a presença dos zeros estruturais pode tornar o teste incapaz de detectar desigualdade de variâncias.

Outra modificação para o teste de Levene pode ser encontrada em O'Neill e Mathews (2000). Os autores propuseram uma forma alternativa do teste de Levene construída com base no procedimento de mínimos quadrados ponderados.

3. Teste de Brown e Forsythe e suas modificações

Suponhamos que X_{ij} represente a j-ésima observação da i-ésima amostra correspondente ao i-ésimo grupo, com $j = 1,2,...,n_i$ e $i = 1,2,...,k$, sendo que as k amostras são independentes, as populações normais e as variâncias iguais. A estatística F da análise de variância com um fator para testar a hipótese nula de igualdade de médias $H_0 = \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$, ao nível de significância α, contra a hipótese alternativa que nem todas as médias são as mesmas, $H_a : \mu_i \neq \mu_g$ para algum $i \neq g$, $i, g = 1,2,...,k$, é dada por:

$$F = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{X}_{i.} - X_{..}\right)^2}{(k-1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2}{(n-k)}},$$

onde $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $\overline{X}_{i.} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$,

$$X_{..} = \sum_i \sum_j \frac{X_{ij}}{n} = \sum_i \frac{n_i \overline{X}_{i.}}{n} \quad \text{e}$$

$$s_i^2 = \sum_j \frac{\left(X_{ij} - \overline{X}_{i.}\right)^2}{n_i - 1}.$$

Se as variâncias populacionais são iguais, quando há igualdade de médias, ou seja, sob H_0, essa estatística tem distribuição F de Snedecor central com $k-1$ e $n-k$ graus de liberdade no numerador e denominador respectivamente.

A estatística F da análise de variância com um fator produz um teste que é sensível à falta de homogeneidade de variâncias, ou seja, quando os grupos apresentam variâncias populacionais diferentes, o tamanho real do teste não coincide com o tamanho fixado. Neste caso, uma melhor solução seria o teste proposto por Brown e Forsythe (1974b), que leva seu nome e que utiliza a estatística F^*, uma modificação da estatística F.

O problema de comparar médias de distribuições normais independentes para três ou mais grupos quando há heterocedasticidade é conhecido como problema de Behrens-Fisher generalizado. Várias soluções foram propostas para esse problema, entre elas a de Brown e Forsythe (1974b) que utiliza a estatística F^* e será descrita a seguir.

Suponhamos que X_{ij} represente a j-ésima observação no i-ésimo grupo, com $j = 1,\ldots,n_i$ e $i = 1,\ldots,k$. Os X_{ij} são observações independentes e possuem distribuição Normal com média μ_i e variância σ_i^2. Desejamos testar a hipótese nula de igualdade de médias $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$, ao nível de significância α, contra a hipótese alternativa que nem todas as médias são iguais, $H_a : \mu_i \neq \mu_g$ para algum $i \neq g$, $i, g = 1,2,\ldots,k$.

A estatística proposta por Brown e Forsythe para testar H_0, F^*, é definida como

$$F^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{X}_{i.} - X_{..}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{n_i}{n}\right) s_i^2}.$$

Os valores críticos de F^* são obtidos da distribuição F de Snedecor com $k-1$ graus de liberdade no numerador e f no denominador, onde f é implicitamente definido pela aproximação de Satterthwaite (1941), discutida em Brown e Forsythe (1974b):

$$\frac{1}{f} = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i^2}{(n_i - 1)} \quad \text{e} \quad c_i = \frac{\left(1 - \frac{n_i}{n}\right) s_i^2}{\sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{n_i}{n}\right) s_i^2}.$$

Através de um estudo de simulação, utilizando diferentes variâncias populacionais e amostras de diversos tamanhos, Brown e Forsythe (1974b) compararam o tamanho e o poder do teste de igualdade de médias populacionais na situação de desigualdade de variâncias utilizando as estatísticas: F da Análise de Variância, F^*, e as propostas por Welch (1951) e James (1951).

A estatística proposta por Welch (1951) é dada por:

$$W = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} w_i \left(\overline{X}_{i.} - \widetilde{X}_{..}\right)^2}{k-1}}{\left[1 + \dfrac{2(k-2)}{(k^2-1)} \sum_{i=1}^{k} \dfrac{\left(1 - \dfrac{w_i}{u}\right)^2}{(n_i - 1)}\right]},$$

onde

$$w_i = \frac{n_i}{s_i^{\,2}}, \qquad u = \sum_i w_i \quad \text{e} \quad \widetilde{X}_{..} = \sum_i \frac{w_i \overline{X}_{i.}}{u}.$$

Quando as médias populacionais são iguais, W tem aproximadamente distribuição F de Snedecor, com $k-1$ e f graus de liberdade, sendo que f é definido de modo que

$$\frac{1}{f} = \frac{3}{k^2-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(1 - \dfrac{w_i}{u}\right)^2}{(n_i - 1)}.$$

A estatística proposta por James(1951) é da forma:

$$J = \sum_{i=1}^{k} \frac{w_i \left(\overline{X}_{i.} - \widetilde{X}_{..}\right)^2}{(k-1)}.$$

Se todas as médias populacionais forem iguais,

$$P\left\{J > a\left[1+\frac{3a+(k+1)}{2(k^2-1)}.\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(1-\frac{w_i}{u}\right)^2}{(n_i-1)}\right]\right\}=\alpha,$$

onde a é o percentil de ordem $1-\alpha$ da distribuição Qui-Quadrado com $k-1$ graus de liberdade.

Brown e Forsythe (1974b) verificaram, através do estudo de simulação, que a estatística F da análise de variância apresentou acentuados desvios no tamanho fixado do teste quando as variâncias dos grupos eram desiguais e as outras três estatísticas mostraram pequenas flutuações no tamanho do teste. Para amostras de tamanhos pequenos, verificaram que o teste de hipóteses com estatística J desviava-se mais do tamanho nominal e rejeitava a hipótese nula com maior freqüência. O teste de estatística F^* variou em tamanho um pouco mais do que o de estatística W e para grupos com mais de 10 observações, a diferença entre os níveis de significância fixado e atingido das duas estatísticas W e F^* foi pequena. Quando as variâncias eram iguais, ambas estatísticas W e F^* apresentavam poder similar ao da estatística F da análise de variância.

Observou-se ainda que quando os grupos com médias extremas tinham variâncias pequenas, a estatística W era mais poderosa do que F^*. Tal fato poderia ser explicado pela diferente ponderação de médias: a estatística W ponderava as médias usando $\frac{n_i}{s_i^2}$ e a estatística F^*, n_i. Dessa forma, médias extremas com variâncias pequenas tenderiam a aumentar W mais do que F^*, ocorrendo o inverso para médias extremas com variâncias grandes. Quando médias extremas vinham acompanhadas de variâncias grandes, o teste de Brown e Forsythe mostrou-se superior.

Mehrotra (1997) aponta uma inadequação na aproximação proposta por Brown e Forsythe (1974b) para a distribuição da estatística de teste F^*, sob a hipótese nula.

Através de um estudo utilizando formas quadráticas, o autor verifica que a distribuição da estatística F^*, sob H_0, tem aproximadamente distribuição F com f_1 e f_2

graus de liberdade dados por $$f_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^2}{n}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^4 + \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^2}{n}\right)^2 - 2\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^4}{n}} \quad (3.1),$$

$$f_2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{n_i}{n}\right)\sigma_i^2\right]^2}{\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(1-\frac{n_i}{n}\right)^2\sigma_i^4}{(n_i-1)}} \quad (3.2)$$ e não como havia sido proposto por Brown e Forsythe (1974b) (a distribuição de F^* era aproximadamente $F(k-1, f_2)$).

Na prática os valores de σ_i^2, presentes nas fórmulas (3.1) e (3.2) dos graus de liberdade, devem ser substituídos por s_i^2.

Keselman e Wilcox (1999) mostraram que, sob condições semelhantes envolvendo variâncias heterogêneas e também não normalidade, o teste modificado de Brown e Forsythe apresenta um aumento no erro do tipo I em modelos não balanceados, ou seja, quando os grupos são de tamanhos desiguais. Os autores propõem um procedimento que consiste num teste para igualdade de parâmetros de posição que adota uma estatística de teste utilizando estimadores robustos de tendência central e variabilidade, isto é, médias aparadas e variâncias "Winsorizadas", ao invés dos estimadores usuais. Sugerem ainda que os valores críticos associados a um particular nível de significância sejam obtidos através do método de *Bootstrap*.

A hipótese de igualdade de médias, $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$, é substituída pela de igualdade de médias aparadas, $H_0: \mu_{a1} = \mu_{a2} = \ldots = \mu_{ak}$.

O procedimento proposto pelos autores é o seguinte:

Suponhamos que n_i observações independentes $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ sejam amostradas da população i $(i = 1,2,\ldots,k)$. Assuma que os X_{ij}'s $(j = 1,2,\ldots,n_i)$ sejam obtidos de uma população normal com média μ_i e variância desconhecida σ_i^2, com $\sigma_i^2 \neq \sigma_{i'}^2$ para algum $i \neq i'$, $i,i'=1,2,...,k$.

Sejam $X_{(1)i} \leq X_{(2)i} \leq ... \leq X_{(n_i)i}$ as observações ordenadas associadas ao i-ésimo grupo e $J_i = [\gamma\, n_i]$, onde γ representa a proporção de observações aparadas de cada cauda da distribuição. Dessa forma, o tamanho amostral para o i-ésimo grupo é $h_i = n_i - 2J_i$. A i-ésima média amostral aparada é $\overline{X}_{ai.} = \frac{1}{h_i}\sum_{j=J_i+1}^{n_i-J_i} X_{(j)i}$.

Define-se ainda a i-ésima média "Winsorizada" como $\overline{X}_{Wi.} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$, onde

$Y_{ij} = X_{(J_i+1)i}$ se $X_{ij} \leq X_{(J_i+1)i}$,

$Y_{ij} = X_{ij}$ se $X_{(J_i+1)i} < X_{ij} < X_{(n_i-J_i)i}$,

$Y_{ij} = X_{(n_i-J_i)i}$ se $X_{ij} \geq X_{(n_i-J_i)i}$.

Observa-se então que, no cálculo da Média Winsorizada, observações inferiores ou iguais à $(J_i+1)-\textit{ésima}$ estatística de ordem são substituídas pela mesma. Analogamente, observações maiores ou iguais à $(n_i - J_i)-\textit{ésima}$ estatística de ordem são substituídas por esse valor.

A variância amostral "Winsorizada" para o i-ésimo grupo é definida como $s_{Wi}^2 = \frac{\sum_j \left(Y_{ij} - \overline{X}_{Wi.}\right)^2}{(n_i - 1)}$. De acordo com Wilcox (1996), uma estimativa da variância da média amostral aparada é dada por $\widetilde{s}_{Wi}^2 = \frac{(n_i - 1)s_{Wi}^2}{h_i(h_i - 1)}$. De posse desses estimadores robustos, as médias aparadas do grupo ($\overline{X}_{ai.}$'s) substituem as médias amostrais ($\overline{X}_{i.}$'s), os estimadores das variâncias "Winsorizadas" (s_{Wi}^2's) substituem os estimadores das variâncias usuais (s_i^2's) e $\sum_{i=1}^{k} h_i$ substitui $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, ou seja, h_i substitui n_i, na estatística do teste de Welch e em seus graus de liberdade. Dessa forma, obtém-se a estatística robusta de teste:

$$F_a = \frac{\dfrac{\sum_i w_{ai}\left(\overline{X}_{ai.} - \widetilde{X}_{a..}\right)^2}{k-1}}{\left[1 + \dfrac{2(k-2)}{(k^2-1)}\sum_i \dfrac{\left(1 - \dfrac{w_{ai}}{u_a}\right)^2}{(h_i - 1)}\right]},$$

onde $w_{ai} = \dfrac{h_i}{\widetilde{s}_{Wi}^{\,2}}$, $\widetilde{X}_{a..} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} w_{ai}\overline{X}_{ai.}}{u_a}$, $u_a = \sum_{i=1}^{k} w_{ai}$ e f_a é dado por $f_a = \dfrac{k^2-1}{3\sum_{i=1}^{k} \dfrac{\left(1 - \dfrac{w_{ai}}{u_a}\right)^2}{h_i - 1}}$.

Definida a estatística do teste, o valor crítico é estimado através da construção de distribuições empíricas via *Bootstrap*, da forma descrita a seguir.

Sejam $C_{ij} = X_{ij} - \overline{X}_{ai.}$, $i = 1,2,...,k$ e $j = 1,2,...,n_i$, os valores das variáveis originais centralizados pela média aparada.

Para o i-ésimo grupo, determina-se a amostra *Bootstrap* selecionando aleatoriamente, com reposição n_i observações dentre as C_{ij}, $j = 1,2,...,n_i$, gerando as novas observações $X_{i1}^{*},...,X_{in_i}^{*}$.

Se F_a^{*} é o valor de F_a calculado com base em $X_{i1}^{*},...,X_{in_i}^{*}$, $i = 1,2,...,k$, repete-se o procedimento B vezes, obtendo-se B valores $F_{a1}^{*},...,F_{aB}^{*}$.

O nível de significância estimado $\left(p^{*}\right)$ de uma estatística de teste *Bootstrap* é a proporção de vezes que esta estatística é maior do que a do teste baseado nos dados originais. Obtido p^{*}, se $p^{*} \leq \alpha$, rejeita-se $H_0 : \mu_{a1} = \mu_{a2} = ... = \mu_{ak}$.

Wilcox verificou que B=599 proporciona um controle satisfatório no erro do tipo I.

4. Aplicações

Nesta seção apresentaremos uma aplicação do Teste de Brown e Forsythe com as modificaçõe propostas por Keselman e Wilcox (1999) a um conjunto de dados fornecido pelo Centro de Estatística Aplicada- CEA-USP.

Os dados que utilizamos para realizar o teste foram retirados do conjunto de dados utilizado na elaboração do Relatório de Análise Estatística sobre o projeto: "Tipos Psicológicos Associados a Variáveis Estratégicas em Empreendedores de Pequena e Micro Empresa", Elian e Santos (2003).

Segundo este trabalho, no Brasil, as micros e pequenas empresas, que representam 98% do total, exercem um papel significante na economia brasileira. Estudos realizados mostram que essas empresas são responsáveis por 35 milhões de empregados e 20% do produto interno bruto total. Da mesma forma que 1,5 milhões de empresas do estado de São Paulo estão iniciando as suas atividades, em contrapartida, 1 milhão estão decretando falência. Uma das prováveis razões pela qual as empresas fracassam é a inexistência de um planejamento.

O estudo realizado baseou-se em questionários aplicados a 115 empreendedores de micro (0 a 9 empregados) e pequenas empresas (10 a 99 empregados).

Várias variáveis foram obtidas através do questionário, porém trabalhamos apenas com a variável Variação Percentual do Faturamento bruto (VALFAT): Variação Percentual do faturamento bruto no período de 2000 a 2002, considerando como base o ano de 1999 e com a variável EMPRETEC: Participou alguma vez do curso de treinamento oferecido pelo SEBRAE (Serviço Brasileiro de Apoio às micros e pequenas Empresas): Sim ou Não.

Nosso objetivo é comparar a média da variável Variação percentual do faturamento bruto das empresas que fazem o curso de treinamento EMPRETEC (VALFAT com EMPRETEC) com a média da variável Variação percentual do faturamento bruto das empresas que não realizam o curso de treinamento EMPRETEC (VALFAT sem EMPRETEC).

Foram calculadas as medidas descritivas para as variáveis VALFAT com EMPRETEC e VALFAT sem EMPRETEC, presentes na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Medidas Descritivas para a Variação Percentual de Faturamento Bruto com EMPRETEC e Variação de Faturamento Bruto sem EMPRETEC

	VALFAT com EMPRETEC	VALFAT sem EMPRETEC
Média	162,4	125,1
Desvio Padrão	100,4	70,6
Mediana	138,0	127,0
1° Quartil	109,0	72,8
3° Quartil	187,0	160,0
Mínimo	0	0
Máximo	600	328
Tamanho da amostra	59	46

Observamos que 50% dos menores valores de VALFAT com EMPRETEC estão entre 0 e 138,0 e que o máximo dessa variável é um valor muito acima dos demais. Para a variável VALFAT sem EMPRETEC 50% dos menores valores estão entre 0 e 127,0.

Analisando a Figura 4.1, Boxplot das duas variáveis, podemos notar que ambas apresentam valores discrepantes e há evidências de assimetria nos dois grupos.

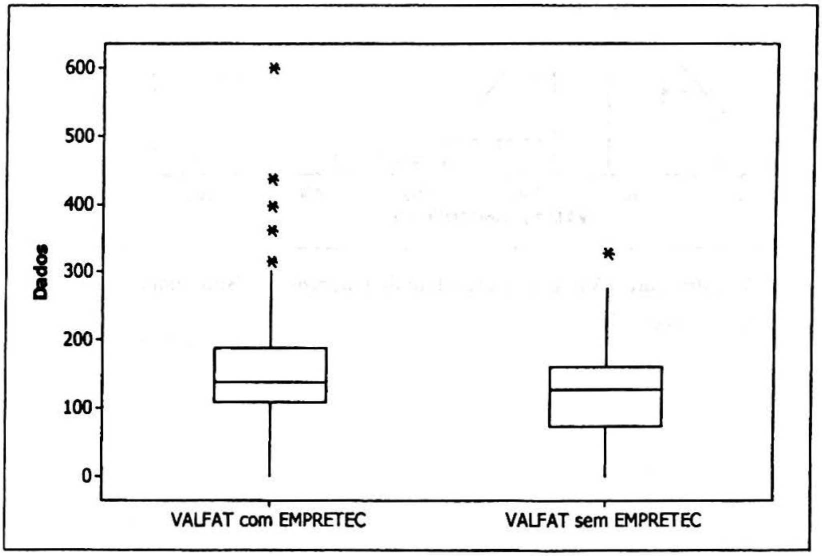

Figura 4.1 Boxplot para a Variação Percentual de Faturamento Bruto com EMPRETEC e Variação de Faturamento Bruto sem EMPRETEC

Obsevando o histograma das variávis VALFAT com EMPRETEC e VALFAT sem EMPRETEC, Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente, notamos que os dados não são normalmente distribuídos. A partir da Tabela 4.1, observa-se uma grande diferença entre os desvios padrão nos dois grupos, sugerindo desigualdade das variâncias populacionais.

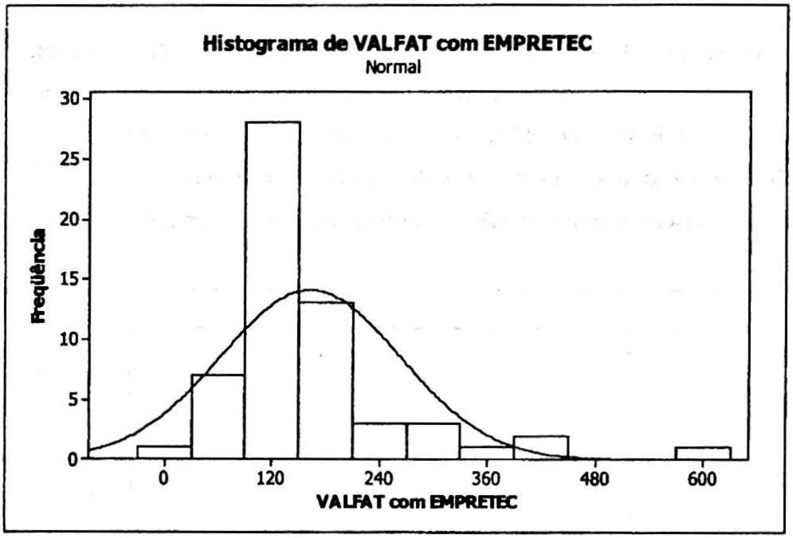

Figura 4.2 Histograma para a Variação Percentual de Faturamento Bruto com EMPRETEC

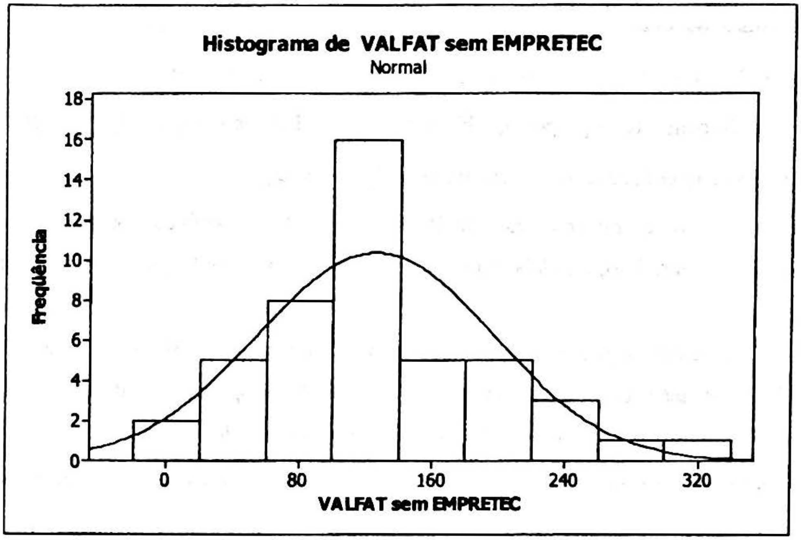

Figura 4.3 Histograma para a Variação Percentual de Faturamento Bruto sem EMPRETEC

Através da forma modificada do teste de Brown e Forsythe descrita na Seção 3, desejamos testar a hipótese nula de igualdade de médias

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

contra a hipótese alternativa

$$H_a : \mu_1 \neq \mu_2$$

onde

μ_1 :Média da variação percentual do faturamento bruto das empresas que fazem o curso de treinamento EMPRETEC e

μ_2 :Média da variação percentual do faturamento bruto das empresas que não fazem o curso de treinamento EMPRETEC.

Dispomos de duas amostras independentes ($n_1 = 59$, $n_2 = 46$, $s_1^2 = 10.080{,}16$ e $s_2^2 = 4.984{,}36$) com evidências de populações não normais e variâncias desiguais.

De acordo com o teste proposto, a hipótese de igualdade de médias, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, é substituída pela de igualdade de médias aparadas, $H_0 : \mu_{a1} = \mu_{a2}$.

Nosso objetivo é aplicar o teste de Brown e Forsythe modificado para testar as hipóteses descritas. Para isso, foi elaborado um programa no software R que se encontra no Apêndice A.

O teste foi realizado para aparos de 30%, 20%, 10%, 5%, 1% e 0%. O aparo de 30% corresponde à situação em que retira-se 30% das observações de cada cauda da distribuição. Por outro lado, o aparo de 0% significa a não retirada de observações.

A estatística do teste, F_a, foi calculada e o valor crítico foi estimado através da construção de distribuições empíricas via *Bootstrap*, conforme descrito na Seção 3. O procedimento de reamostragem via *Bootstrap* foi repetido B vezes e a estatística F_a foi calculada para cada uma das B reamostras.

Foi calculado o nível de significância estimado (p^*) de uma estatística de teste *Bootstrap*, ou seja, a proporção de vezes que a estatística calculada nas reamostras *Bootstrap* era maior do que a estatística do teste baseado nos dados originais, F_a.

Para aparos de 30%, 20% e 10% usamos B=100, 250, 599 e 1000. Para os demais aparos utilizamos B=599, pois não foram observadas alterações relacionadas à quantidade de reamostras nos aparos de 30%, 20% e 10% e Wilcox verificou que B=599 proporcionava um controle satisfatório no erro do tipo I. O valor de p^* foi obtido e a decisão tomada (se $p^* \le \alpha$, rejeitamos a hipótese nula de igualdade de médias aparadas).

A Tabela 4.2 exibe os resultados obtidos e a correspondente decisão a um nível de significância de 5%.

Tabela 4.2 – Resultados obtidos na realização do teste de Brown e Forsythe modificado.

	Estatística F_a	p-valor	Decisão a $\alpha = 0,05$
Aparos de 30%			
B=100	46,0994	0,200	Não rejeita H_0
B=250	46,0994	0,156	Não rejeita H_0
B=599	46,0994	0,145	Não rejeita H_0
B=1000	46,0994	0,165	Não rejeita H_0
Aparos de 20%			
B=100	76,7002	0,100	Não rejeita H_0
B=250	76,7002	0,128	Não rejeita H_0
B=599	76,7002	0,132	Não rejeita H_0
B=1000	76,7002	0,130	Não rejeita H_0
Aparos de 10%			
B=100	137,4755	0,070	Não rejeita H_0
B=250	137,4755	0,076	Não rejeita H_0
B=599	137,4755	0,075	Não rejeita H_0
B=1000	137,4755	0,071	Não rejeita H_0
Aparos de 5%			
B=599	201,4128	0,038	Rejeita H_0
Aparos de 1%			
B=599	264,4095	0,023	Rejeita H_0
Aparos de 0%			
B=599	264,4095	0,025	Rejeita H_0

Observa-se que quanto maior a porcentagem de aparo, maior é o p-valor, nos levando à aceitação da hipótese nula. Para aparos de 5% e 1%, rejeitamos a hipótese nula de igualdade de médias aparadas. Da mesma forma, rejeitamos H_0 quando não há aparos, ou seja, a porcentagem de aparos, γ, é 0%.

Esse comportamento faz sentido pois as medianas dos dois grupos são próximas, mas as médias são muito distintas, devido provavelmente à presença dos valores discrepantes observados no Boxplot da Figura 4.1. Uma alta porcentagem de aparos teria o efeito de excluir tais pontos discrepantes, tornando a média aparada próxima da mediana e levando portanto à aceitação da hipótese nula.

Com o objetivo de comparação, foram realizados os testes com as estatísticas F^*, W (Welch) e t.

Teste utilizando a estatística F^*

O valor da estatística F^* depende das seguintes quantidades:

- Tamanho da primeira amostra: $n_1 = 59$;
- Tamanho da segunda amostra: $n_2 = 46$;
- Variância amostral em cada grupo: $S_1^{\,2} = 10.080{,}16$ e $S_2^{\,2} = 4.984{,}36$;
- Média amostral em cada grupo: $\overline{X}_{1.} = 162{,}40$ e $\overline{X}_{2.} = 125{,}10$;
- Média geral : $\overline{X}_{..} = 146{,}03$ e $n = n_1 + n_2 = 105$.

Posteriormente obtivemos $F^* = 4{,}98$ e os graus de liberdade, conforme Seção 3. Os valores críticos de F^* são obtidos da tabela da distribuição F de Snedecor com $(k-1=2-1=1)$ e $(f=102)$ graus de liberdade no numerador e denominador respectivamente. A região crítica obtida ao nível de significância de 0,05 é $RC = \{F^* > 3{,}92\}$. Como $F^* = 4{,}98$ pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese nula de igualdade de médias a um nível de significância de 5%.

Teste utilizando a estatística de Welch, W

A estatística W, apresentada na Seção 3, foi calculada. O valor da estatística de Welch obtido, $W = 4{,}98$, coincidiu com o apresentado para estatística F^*. Tal fato pode ter ocorrido devido ao uso de amostras de tamanhos grandes. Como, sob H_0, W tem distribuição F de Snedecor com 1 e 102 graus de liberdade, a região crítica do teste é a mesma apresentada para o teste de estatística F^* e decidimos pela rejeição da hipótese nula de igualdade de médias.

Teste t para duas amostras

Realizamos o teste t usual para igualdade de médias para amostras independentes, distribuições normais, com variâncias desconhecidas e desiguais. Obtivemos a estatística $t = 2{,}23$. Sob H_0, t tem distribuição t de Student com 102 graus de liberdade. Assim, a região crítica do teste é dada por $RC = \{t / t < -1{,}98 \text{ ou } t > 1{,}98\}$. Como $t = 2{,}23$ pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese nula a um nível de significância de 5%.

Pudemos verificar que quando realizados os testes de estatísticas F^*, W e t, a hipótese de igualdade de médias foi rejeitada a um nível de signifiância de 5%, ou seja, conclui-se que a média populacional da variável variação percentual do faturamento bruto para empresas que fazem o curso de treinamento EMPRETEC difere da correspondente média das empresas que não fazem o curso de treinamento EMPRETEC.

Em contrapartida, o teste de Brown e Forsythe modificado, que utiliza uma estatística robusta, rejeita a hipótese nula de igualdade de médias a um nível de significância de 5% somente para aparos iguais ou inferiores a 5%. Já para aparos de 10%, 20% e 30%, a decisão é pela não rejeição da hipótese nula.

Apêndice

Programa no R e conjunto de dados

O teste de Brown e Forsythe modificado foi programado utilizando o software R, versão 2.2.1 (Gentleman e Ihaka, 1997).

Os dados utilizados (RAE-CEA-03P27) encontram-se na Tabela A.1.

Tabela A.1- Conjunto de dados.

VALFAT com	259	41	398	95	120	127	53	172	192	110
EMPRETEC	151	176	0	437	165	127	144	600	136	130
	82	84	163	111	110	187	102	139	147	120
	100	216	362	191	125	127	104	120	109	273
	157	125	141	198	77	138	170	145	62	315
	152	206	97	85	129	300	140	245	92	
VALFAT sem	180	138	0	166	110	276	40	133	42	60
EMPRETEC	133	0	110	89	108	201	154	133	96	151
	158	68	73	72	133	100	38	257	24	129
	70	85	184	203	27	125	100	137	148	225
	100	180	110	328	230	130				

O programa lê o conjunto de dados, calcula a estatística robusta F_a e estima o valor crítico de F_a através de distribuições empíricas via *Bootstrap*.

Inicialmente os dados são lidos e é indicada a proporção de observações aparadas em cada cauda da distribuição. Em seguida é criada uma função para calcular a estatística robusta F_a.

Também são definidas e calculadas várias medidas necessárias ao cálculo dessa estatística, conforme segue:

1- Determina-se o tamanho das amostras;

2- As observações são ordenadas, em cada grupo;

3- São definidas e calculadas as médias amostrais e médias aparadas para cada grupo, (no programa a porcentagem de aparos é denotada por g);

4- Calcula-se o número de observações descartadas;

5- É calculado o novo tamanho amostral (após os aparos);

6- São definidas e calculadas as médias "winsorizadas" dos grupos;

7- São definidas e calculadas as variâncias "winsorizadas" dos grupos;

8- São definidos e calculados os pesos utilizados no cálculo da estatística F_a;

9- Calcula-se o numerador de F_a, o denominador e em seguida a estatística robusta F_a;

10- São construídas as distribuições empíricas via *Bootstrap* ;

11- A estatística F_a é calculada para as novas B observações ;

12- Determina-se o nível de significância estimado da estatística de teste *Bootstrap*, que é a proporção de vezes que esta estatística é maior do que a do teste baseado nos dados originais.

13- O programa retorna o valor da estatística F_a (*print (T)*) e o nível de significância estimado (*print (p)*).

O programa encontra-se a seguir:

```
k<-2 ### Número de populações
x1<-c(259,41,398,95,120,127,53,172,192,110,151,176,0,437,165,127,144,600,136,130,82,
84,163,111,110,187,102,139,147,120,100,216,362,191,125,127,104,120,109,273,157,125,1
41,198,77,138,170,145,62,315,152,206,97,85,129,300,140,245,92) ## Amostra da primeira
população
x2<-
c(180,138,0,166,110,276,40,133,42,60,133,0,110,89,108,201,154,133,96,151,158,68,73,72,
133,100,38,257,24,129,70,85,184,203,27,125,100,137,148,225,100,180,110,328,230,130)
## Amostra da segunda população
g<-0.1

    #############################################################
    ### Criando uma função para calcular Fa
    #############################################################
    Fr<-function(x1,x2,g){
    n1<-length(x1)
    n2<-length(x2)
    ## Ordenando os dados
    x1o<-sort(x1) ## Ordenando os valores da primeira amostra
    x2o<-sort(x2) ## Ordenando os valores da segunda amostra
    ## Média aparada
    m1<-mean(x1)
    m1a<-mean(x1,trim=g)
    m2<-mean(x2)
    m2a<-mean(x2,trim=g)
    medias<-data.frame(m1,m1a,m2,m2a)
    ## Número "efetivo" de observações descartadas
```

```
j1<-floor(g*n1)
j2<-floor(g*n2)
## Tamanho "efetivo" de observações utilizadas para calcular a média aparada
h1<-n1-2*j1
h2<-n2-2*j2
 ## Obtenção de Y_{ij}
 ## Amostra 1
  y1<-x1
   for (j in 1:n1){
        if (x1[j]<=x1o[j1+1]) {y1[j]<-x1o[j1+1]}
     else (if (x1[j]>=x1o[n1-j1]) {(y1[j]<-x1o[n1-j1])})
   }

 ## Amostra 2
  y2<-x2
   for (j in 1:n2){
        if (x2[j]<=x2o[j2+1]) {y2[j]<-x2o[j2+1]}
     else (if (x2[j]>=x2o[n2-j2]) {(y2[j]<-x2o[n2-j2])})
   }

 ## Médias Winsorizadas
 mw1<-mean(y1)
 mw2<-mean(y2)
 mw<-c(mw1,mw2)
 sw1<-var(y1)
 sw2<-var(y2)
 w<-data.frame(mw1,sw1,mw2,sw2)

 ## Estatística "Robusta" Fa
  ## Pesos
  sw1til<-((n1-1)*sw1)/(h1*(h1-1))
  sw2til<-((n2-1)*sw2)/(h2*(h2-1))
  w1<-h1/sw1til
  w2<-h2/sw2til
  w<-c(w1,w2)
  ma<-c(m1a,m2a)
  ma..<-weighted.mean(ma,w)
  ua<-sum(w)
    ## Numerador da estatística
   dif<-(c(ma-rep(1,k)*ma..))^2 ## desvios ao quadrado
   s<-t(w)%*%dif
   num<-s/(k-1)
   h<-c(h1,h2)
    ## Denominador da estatística
   quo<-(1-w/ua)^2/h
   den<-1+(2*(k-2)/(k^2-1))*sum(quo)
   F.r<-num/den
```

```
        return(F.r)
        ### Graus de liberdade
        fa= (k^2-1)/(3*sum(quo))
    }

T=Fr(x1,x2,g)

### Distribuições empiricas obtidas por Bootstrap
    n1<-length(x1)
    n2<-length(x2)
    g<-0.1
    m1a<-mean(x1,trim=g)
    m2a<-mean(x2,trim=g)
    c1=x1-rep(1,n1)*m1a
    c2=x2-rep(1,n2)*m2a
B<-599
Q<-rep(0,B) # Vetor que irá alocar os valores de Fa para as reamostragens
for (j in 1:B)
{
  C1r<-sample(c1,n1,replace=TRUE)
  C2r<-sample(c2,n2,replace=TRUE)
  Q[j]<-as.numeric(Fr(C1r,C2r,g))
}
a<-length(Q[Q>as.numeric(Fr(x1,x2,g))])
p<-a/B
print(p)
print(T)
```

5. Referências Bibliográficas

Bartlett, M. S. (1937). Properties of sufficiency and statistical tests, *Proc. Roy. Statist. Soc. Ser.* A 160, 268-282.

Box, G. E. P. (1954). Somc theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems, I. Effect of inequality of variance in the one-way classification. *Annals of Mathematical Statistics*, 25, 290-403.

Brown, M. B. and Forsythe, A. B. (1974a). Robust tests for the equality of variances, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 364-367.

Brown, M. B. and Forsythe, A. B. (1974b). The small sample behavior of some statistics which test the equality of several means, *Technometrics*, 16, 129-132.

Elian, S. N., Santos, L. D. (2003). Relatório de análise estatística sobre o projeto: "Tipos psicológicos associados a variáveis estratégicas em empreendedores de pequena e micro empresa". São Paulo, IME-USP. (RAE-CEA-03P27).

Gentleman, R. and Ihaka, R. (1997). The R language. In L. Billard e N. Fisher (eds), *Proceedings of the 28th Symposium on the Interface,* The Interface Foundation of North America.

Graybill, F. A. (1976). *Theory and Application of the Linear Model.* Duxburry Press, Belmont, California, Wadsworth Publishing Company Inc.

Hines, W. G. S. And O'Hara Hines, R.J. (2000). Increased power with modified forms of the Levene (Med) test for heterogeneity of variance, *Biometrics*, 56, 451-454.

James, G. S. (1951) Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown. *Biometrika*, 38, 19-43.

Keselman, H. J. and Wilcox, R. R. (1999) The 'improved' Brown and Forsythe test for mean equality: some things can't be fixed, *Communications in Statistics - Simulation*, 28, 687-698.

Levene, H. (1960) Robust test for equality of variances, *In Contributions to Probability and Statisticas: Essays in Honor of Harold Hotteling*, I. Olkin et al., eds. Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 278-292. (Includes a Monte Carlo study of power functions).

Mehrotra, D. V. (1997) Improving the Brown-Forsythe solution to the generalized Behrens-Fisher problem, *Communications in Statistics - Simulation an Computation*, 26(3), 1139-1145.

O'Neill,M. E. and Ky Mathews (2000) A weighted least squares approach to Levene's test of homogeneity of variance, *Austral. & New Zealand J. Statist.*, 42 (1), 81-100.

Sattherthwaite, F. E.(1941) Synthesis of variance. *Psychometrika* 6, 309-316.

Welch, B. L. (1951) On the comparison of several mean values: an alternative approach. *Biometrika*, 38, 330-336.

Wilcox, R. R. (1996) *Statistics for the social sciences*. New York: Academic Press.

ÚLTIMOS RELATÓRIOS TÉCNICOS PUBLICADOS

2006-01 - SILVA, M.F. DA, FERRARI, S.L.P., CRIBARI-NETO, F. Improved likelihood inference for the shape parameter in Weibull regression. 2006. 24p. (RT-MAE 2006-01)

2006-02 - LACHOS, V.H., BOLFARINE, H., ARELLANO-VALLE, R. B., MONTENEGRO, L. C. Inference in multivariate skew-normal regression models. 2006. 21p. (RT-MAE 2006-02)

2006-03 - BUENO, V. DA C. Redundancy allocation for a coherent system of dependent components. 2006. 16p. (RT-MAE 2006-03)

2006-04 - ESPINHEIRA, P.L., FERRARI, S. L. P., CRIBARI-NETO, F. On Beta regression residuals. 2006. 17p. (RT-MAE 2006-04)

2006-05 - BAZÁN, J. L., BOLFARINE, H., BRANCO, M. D. A generalized skew probit class link for binary regression. 2006. 22p. (RT-MAE 2006-05)

2006-06 - MIRANDA, J. C. S. DE; MORETTIN, P. A. On the estimation of the intensity of point processes via wavelets. 2006. 45p. (RT-MAE 2006-06)

2006-07 - DUARTE, D.; GALVES, J.; GARCIA, N. L. Markov approximation and consistent estimation of unbounded probabilistic suffix trees. 2006. 12p. (RT-MAE 2006-06)

2006-08 - RIFO, L. R.; WECHSLER, S. Regularly varying densities for St. Petersburg envelopes. 2006. 8p. (RT-MAE 2006-08)

2006-09 - FERRARI, S. L. P.; CYSNEIROS, A. H. M. A. Skovgaad's adjustment to likelihood ratio tests in exponential family nonlinear models. 2006. 15p. (RT-MAE 2006-09)

2006-10 - POLPO, A., PEREIRA, C. A. B., Parallel and series systems: rates, distributions and sub-distributions. 2006. 13p. (RT-MAE 2006-10)

2006-11 - LACHOS, V. H., BOLFARINE, H., GENTON, M.G. Bayesian inference for measurement error models with flexible skew-symmetric distributions. 2006. 29p. (RT-MAE 2006-11)

2006-12 - BUENO, VANDERLEI DA COSTA, A Martingale Estimator for a Structural Importance Measure of a Coherent System's Component Through its Critical Level.

2006-13 - BUENO,VANDERLEI DA COSTA, Estimating system´s component reliability importance under dependence conditions. 2006. 09p. (RT-MAE 2006-13)

2006-14 - PANZIERI, A., BELITSKY, V., ROCHA, P. R. M., ALMEIDA PRADO, F. P. An implicit measure of tail dependence and its application for identification of the charge of dependence between assets in market booms and crashes. 2006. 29p. (RT-MAE-2006-14)

The complete list of "Relatórios do Departamento de Estatística", IME-USP, will be sent upon request.

Departamento de Estatística
IME-USP
Caixa Postal 66.281
05311-970 - São Paulo, Brasil