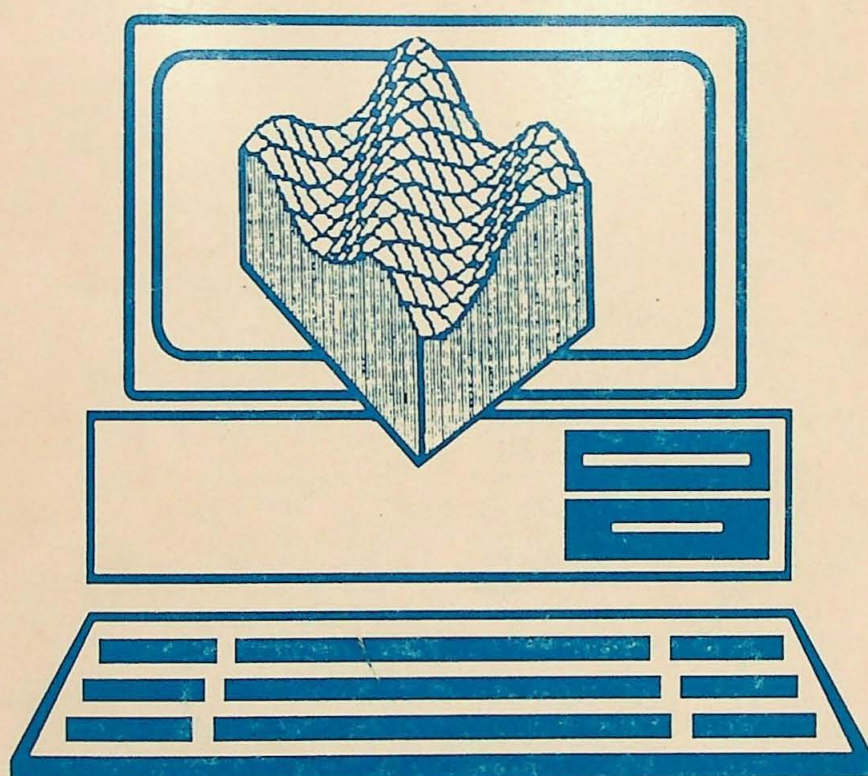


VI SIMPÓSIO DE QUANTIFICAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS

**BOLETIM DE RESUMOS
EXPANDIDOS**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE RIO CLARO**

24/05/95 a 26/05/95

AS EQUAÇÕES MULTIQUEÁDRICAS NORMALIZADAS PARA INTERPOLAÇÃO DE DADOS GEOLÓGICOS

*Jorge Kazuo Yamamoto**

A interpolação é um procedimento matemático que permite determinar um valor de interesse em um ponto não amostrado, a partir de informações de pontos de amostragem. Trata-se, portanto, de um procedimento comumente empregado em geologia na representação gráfica quantitativa, bem como para o cálculo de perfis, áreas e volumes. É preciso ressaltar que a informação geológica é essencialmente discreta, localizada em pontos de investigação em superfície ou subsuperfície.

Existem mais de tres dezenas de métodos de interpolação, de acordo com revisão feita por Franke (1982). Entre esses, o método das equações multiqueádricas, foi considerado por aquele autor, como o mais impressionante em termos de capacidade de ajuste e suavidade visual da superfície resultante.

As equações multiqueádricas, propostas por Hardy (1971), apresentam a forma:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i [(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + C]^{1/2} \quad (1)$$

onde: c_i é o coeficiente da i -ésima amostra;

C é uma constante de suavização;

(X_i, Y_i) são as coordenadas do i -ésimo ponto;

(X, Y) são as coordenadas do ponto a ser interpolado.

Os coeficientes ($c_i, i=1, n$) são obtidos pela resolução de um sistema de equações lineares da forma:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j [(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + C]^{1/2} \quad \text{para } i=1, n \quad (2),$$

ou em forma matricial, fazendo:

$$d_{ij} = ((X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + C)^{1/2},$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

* Departamento de Geologia Econômica-IGUSP

O método das equações multiquádras foi originalmente proposto como um interpolador global e, portanto, dependente de todos os pontos de dados, o que inviabilizaria a sua aplicação em geologia, devido a quantidade de dados, em geral da ordem de centenas a milhares de pontos. Assim, o estudo da aproximação local das equações multiquádras, realizado por Yamamoto (1990), concluiu pela viabilidade dessa aproximação quando se utiliza entre 12 e 24 pontos de dados, como um bom compromisso entre a precisão e o tempo de computação requerido.

Landim & Yamamoto (1988) apresentaram os resultados da comparação entre as equações multiquádras e a krigagem ordinária para interpolação de superfícies topográficas, a partir de pontos de amostragem irregularmente distribuídos no terreno. Os resultados obtidos mostraram que ambos os métodos proporcionam interpolações exatas e confiáveis, porém com a vantagem das equações multiquádras não necessitarem do mesmo rigor estatístico da krigagem no cálculo e modelagem de variogramas experimentais. A semelhança entre os sistemas de krigagem e equações multiquádras, observada neste trabalho, deu origem ao novo método de interpolação, como foi denominado por Yamamoto (1988). Este novo método de interpolação resultou de uma série de modificações introduzidas no sistema de equações multiquádras, que o tornou semelhante ao sistema da krigagem ordinária. Agora o valor de interesse em um ponto não amostrado é calculado exatamente como na krigagem ordinária, ou seja:

$$F = \sum_{i=1}^n W_i \cdot F_i \quad (4)$$

Os ponderadores do novo método são calculados a partir da resolução do sistema de equações do novo método;

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & 1 \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1p} \\ d_{2p} \\ \vdots \\ d_{np} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

O objetivo deste trabalho é demonstrar a superioridade do novo método em relação às equações multiquádras originais e, em seguida, apresentar uma interpretação adequada às transformações introduzidas empiricamente (Yamamoto 1988). Para esse fim, considere-se o conjunto de pontos de dados da Tabela 1, conforme o mapa de localização da Figura 1, para interpolação de ponto de coordenadas (30,30). Observando-se o mapa da Figura 1, verifica-se que este ponto está dentro do triângulo formado pelos pontos 1-2-3. Assim, a interpolação deste ponto dentro do domínio deste triângulo, por meio de um plano passando pelos seus três vértices, pode ser feita pela equação do plano ajustada pelo método dos mínimos quadrados:

$$Z = 720 + 1,25X + 0,5Y$$

Tabela 1: Coordenadas dos pontos de dados para comparação da eficiência do novo método em relação às equações multiquádricas.

ponto	X	Y	Z	ponto	X	Y	Z
1	20	30	760	16	10	40	750
2	40	40	790	17	10	50	760
3	40	20	780	18	15	45	770
4	20	50	772	19	10	10	730
5	30	50	775	20	10	20	735
6	40	50	788	21	15	15	745
7	20	20	750	22	50	10	788
8	20	40	770	23	50	15	792
9	10	30	740	24	45	10	780
10	20	10	748	25	50	45	795
11	30	10	753	26	50	50	790
12	40	10	773	27	45	50	789
13	50	20	795				
14	50	30	800				
15	50	40	799				

Portanto, a cota interpolada no ponto (30,30) é:

$$Z = 720 + 1,25 \cdot 30 + 0,5 \cdot 30 = 772,50.$$

A partir deste momento, a cota interpolada igual a 772,50 será utilizada como referência para o estudo da eficiência do novo método de interpolação.

Como o método original das equações multiquádricas foi desenvolvido como um interpolador global, sabia-se de estudos anteriores, como aquele realizado por Yamamoto (1990), que este método era fortemente dependente da quantidade de pontos de dados. Assim, foi realizado o estudo com o ajuste das equações multiquádricas para interpolação do ponto (30,30) utilizando subconjuntos de pontos de dados, variáveis de 3 a 27 pontos de dados em incrementos de 3. Os resultados obtidos nesta simulação, tanto para as equações multiquádricas como para o novo método, encontram-se na Tabela 2, juntamente com os erros relativos (%) calculados para a cota referência (772,50m). A variação das cotas interpoladas em relação à cota referência, bem como a distribuição dos erros relativos para os dois métodos encontram-se na Figura 2.

Observando-se os resultados da Tabela 2 e os gráficos da Figura 2, conclui-se pela superioridade do novo método em relação às equações multiquádricas, pois para este caso a cota interpolada com 27 pontos ainda não atinge a cota referência de 772,50 m esperada, enquanto, que para o novo método somente três pontos já foram suficientes para atingir a cota esperada.

Tabela 2: Erros relativos (%) para cotas interpoladas pelas equações multiquádricas.

nº pontos	equações multiquádricas		novo método	
	cota (m)	erro relativo (%)	cota (m)	erro relativo (%)
3	645,63	16,42	772,72	0,03
6	698,13	9,63	772,28	-0,03
9	729,96	5,51	774,28	0,23
12	749,59	2,97	773,79	0,17
15	759,07	1,74	773,39	0,12
18	761,43	1,43	773,25	0,10
21	763,59	1,15	773,26	0,10
24	764,87	0,99	773,25	0,10
27	766,18	0,82	773,37	0,11

A interpretação atual do sistema do novo método pode ser feita a partir de um artigo de Hardy (1977), onde ele demonstra que os sistemas de equações de covariância - semelhante ao da krigagem ordinária - (6) e o das equações multiquádricas (7), em notação matricial, são similares, como se reproduz a seguir:

$$Z_p = [C_{p1} \ C_{p2} \ \dots \ C_{pn}] * \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$Z_p = [Q_{p1} \ Q_{p2} \ \dots \ Q_{pn}] * \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde: $Q_{ij} = [(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + C]^{1/2}$

A equação (6) permite fazer uma interpretação adequada das transformações feitas no sistema de equações multiquádricas (Yamamoto, 1988), as quais, hoje, considera-se tenham sido empíricas. Assim, a transformação básica foi calcular o produto do vetor linha com a matriz das quádras, porém com uma condição adicional que a soma dos coeficientes assim obtidos fosse igual a um. Para ilustrar a interpretação, utilizou-se do subconjunto de pontos de dados (1-2-3) da Tabela 1. Portanto, a interpolação da cota Z_p no ponto de coordenadas (30,30), de acordo com a equação (6), é feita como:

$$Z_p = [10,488 \ 14,491 \ 14,491] * \begin{bmatrix} 3,162 & 22,583 & 22,583 \\ 22,583 & 3,162 & 20,248 \\ 22,583 & 20,248 & 3,162 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Multiplicando-se o vetor linha pela matriz inversa das quádricas, obtém-se o seguinte vetor linha:

$$[0,432 \quad 0,202 \quad 0,202] \quad (9),$$

que multiplicado pelo vetor coluna das cotas, resulta na cota interpolada no ponto (30,30):

$$Z_p = [0,432 \quad 0,202 \quad 0,202] * \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \end{bmatrix} = 645,46 \quad (10)$$

Agora de acordo com a formulação original de Hardy (1971), multiplicando-se a matriz inversa das quádricas pelo vetor coluna das cotas, obtém-se o vetor coluna:

$$\begin{bmatrix} 18,672 \\ 15,227 \\ 15,227 \end{bmatrix} \quad (11),$$

que multiplicado pelo vetor linha das quádricas no ponto (30,30), resulta também na cota interpolada:

$$Z_p = [10,488 \quad 14,491 \quad 14,491] * \begin{bmatrix} 18,672 \\ 15,227 \\ 15,227 \end{bmatrix} = 645,63 \quad (12)$$

As pequenas diferenças entre os resultados obtidos (10 e 12), devem-se a erros de arredondamento. A matriz linha (9) são os coeficientes equivalentes do sistema da krigagem ordinária. Entretanto, a soma desses coeficientes não resulta em um, portanto, o resultado obtido em (10) deve ser dividido pela soma dos coeficientes, segundo o cálculo da média ponderada. Assim, dividindo-se a cota obtida pela soma dos coeficientes, tem-se:

$$Z_p = 645,46/0,836 = 772,08 \quad (13),$$

ou seja, um resultado muito próximo ao valor da cota referência e, portanto, muito superior, em qualidade, ao resultado obtido pelas equações multiquádricas (12). Assim, no novo método, introduzindo-se empiricamente a condição para que a soma dos coeficientes fosse igual a um, estava-se na realidade normalizando os coeficientes como em (13). Como consequência, o novo método pode trabalhar com um número menor de pontos, para produzir uma interpolação de qualidade, em relação às equações multiquádricas, conforme pode-se observar nas Figuras 2A e 2B. Mas, por que a interpolação pelas equações multiquádricas tende a melhorar com o número de pontos? A resposta para esta questão deve estar justamente na soma dos coeficientes das equações multiquádricas, obtidos pelo produto do vetor linha pela matriz inversa das quádricas (equação 8). Assim, a fim de verificar esta resposta utilizou-se do conjunto de pontos de dados da Tabela 1, do qual foram extraídos 9 subconjuntos, de 3 a 27 pontos, em incrementos de 3, para interpolação do ponto de coordenadas (30,30). Para cada subconjunto foram calculados os coeficientes e a sua soma, cujos resultados encontram-se listados na Tabela 3.

A variação da soma dos coeficientes com o número de pontos foi representada graficamente como se apresenta na Figura 3.

Como se pode verificar na Tabela 3, a soma dos coeficientes tende a um com o aumento do número de pontos, acompanhada da diminuição do erro relativo. Portanto, a

simples correção dos coeficientes, por meio da sua normalização, já é suficiente para melhorar a qualidade da interpolação com um mínimo de pontos. Assim, o novo método consiste simplesmente na utilização dos coeficientes normalizados !

Se o novo método utiliza os coeficientes normalizados das equações multiquádricas, o ideal seria manter a denominação original de "equações multiquádricas" acrescida da expressão "normalizadas". As "equações multiquádricas normalizadas" mantêm as mesmas propriedades originais, porém com a vantagem de ser tanto um interpolador local como global.

Tabela 3: Resultados da interpolação pelas equações multiquádricas para interpolação do ponto (30,30), o erro relativo e a soma dos coeficientes.

nº pontos	cota (m)	erro relativo (%)	soma coeficientes
3	645,63	16,42	0,836
6	698,13	9,63	0,905
9	729,96	5,51	0,942
12	749,59	2,97	0,968
15	759,07	1,74	0,981
18	761,43	1,43	0,985
21	763,59	1,15	0,987
24	764,87	0,99	0,989
27	766,18	0,82	0,991

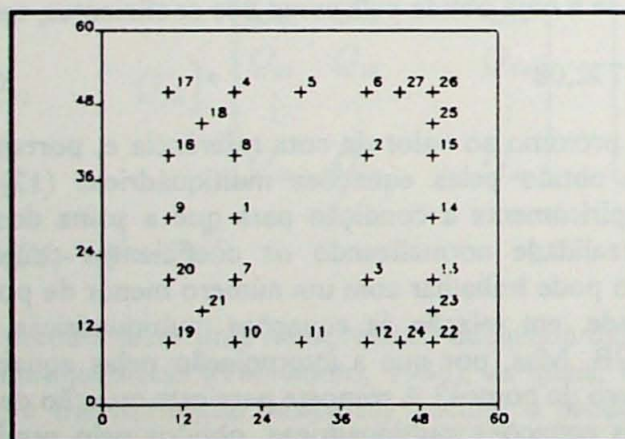


Figura 1: Mapa de localização dos pontos de dados para estudo da eficiência do novo método em relação às equações multiquádricas.

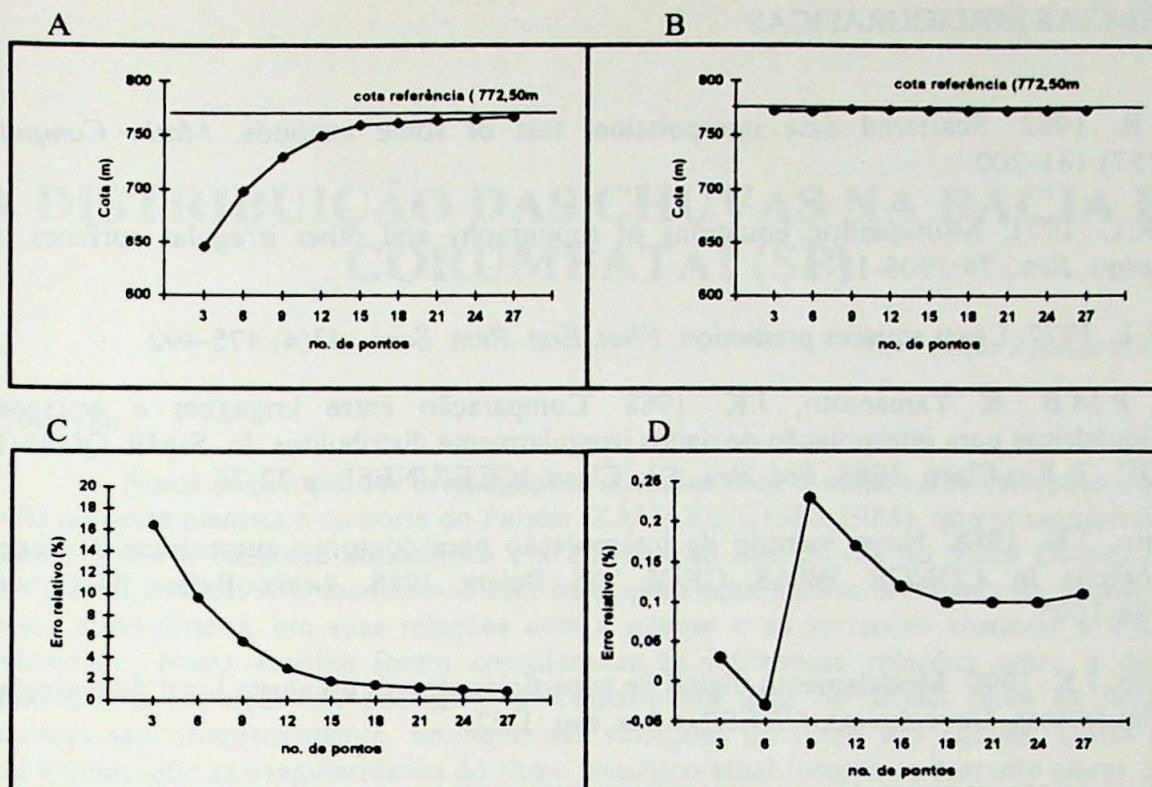


Figura 2: variação das cotas em relação à cota referência para o método das equações multiquádricas (A) e para o novo método (B); distribuição dos erros relativos das cotas interpoladas pelas equações multiquádricas (C) e pelo novo método (D).

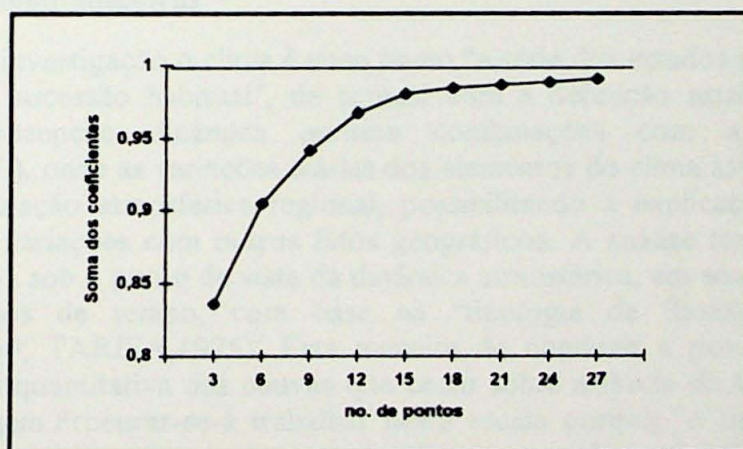


Figura 3: Variação da soma dos coeficientes das equações multiquádricas para interpolação do ponto (30,30) a partir dos subconjuntos de pontos extraídos da Tabela 1.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Franke, R. 1982. Scattered data interpolation: test of some methods. *Math. Comput.*, **38**(157):181-200.
- Hardy, R.L. 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *J. Geophys. Res.*, **76**:1905-1915.
- Hardy, R.L. 1977. Least squares prediction. *Phot. Eng. Rem. Sens.*, **43**(4):475-492.
- Landim, P.M.B. & Yamamoto, J.K. 1988. Comparação entre krigagem e equações multiquádricas para interpolação de dados irregularmente distribuídos. In: SIMP. QUANT. GEOC., 3, Rio Claro, 1988. *Bol. Res.* Rio Claro, IGCE/UNESP. p.72-76.
- Yamamoto, J.K. 1988. Novo método de interpolação para contorno automático de dados geológicos. In: CONGR. BRAS. GEOL., 35, Belém, 1988. *Anais.* Belém, SBG. v.4, p.1684-1695.
- Yamamoto, J.K. 1990. Modelamento digital de superfícies através do ajuste local de equações multiquádricas. *Geociências*, UNESP, núm. esp.:1-22.