

UMA EQUAÇÃO INTERESSANTE

Claudio Possani

IME - USP

Há algum tempo, o professor Sidney Luiz Cavallanti mostrou-me a equação

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1. \quad (1)$$

e fez a seguinte observação: apesar de, no decorrer da resolução, elevarmos as equações somente a potências *ímpares* (duas elevações ao cubo), ainda assim, surpreendentemente, aparece uma raiz falsa. Por quê?

Antes de mostrar como o professor Sidney resolveu a equação, vejamos o porquê da sua surpresa.

Sabemos que

$$x = y \implies x^n = y^n, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$$

mas a recíproca desta afirmação só é verdadeira se n for ímpar. Isto é,

$$x^n = y^n \implies x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ se } n \text{ for ímpar.}$$

É fácil ver que a propriedade $x^n = y^n \implies x = y$ não vale se n for par - basta observar que $5^2 = (-5)^2$ e $5 \neq -5$.

Estes fatos aparecem nitidamente quando, no final do 1º grau, resolvemos com nossos alunos as equações irracionais. Vejamos um exemplo: Resolver

$$\sqrt{2x-3} = x-3. \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-3} = x-3 &\stackrel{1}{\Rightarrow} (\sqrt{2x-3})^2 = (x-3)^2 \stackrel{2}{\Leftrightarrow} 2x-3 = \\ &= x^2 - 6x + 9 \stackrel{3}{\Leftrightarrow} x^2 - 8x + 12 = 0 \stackrel{4}{\Leftrightarrow} x = 6 \text{ ou } x = 2.\end{aligned}$$

As passagens 2, 3 e 4 são equivalências, mas a recíproca da implicação 1 não é verdadeira. É por isso que, após resolvermos a equação, “testamos” as raízes encontradas, para ver se elas, de fato, satisfazem a equação inicial. No exemplo, 6 é raiz de (2), mas 2 não é.

Portanto, estamos acostumados com o aparecimento de “falsas raízes” na resolução de equações irracionais.

Mas, no exemplo que o professor Sidney apresentou, o fato de aparecer uma “raiz falsa” era estranho, pois a resolução da equação exigia apenas que seus membros fossem elevados ao cubo e sabemos que, em $\mathbb{R}$,

$$x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y.$$

Vejamos como o professor Sidney resolveu a equação:

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1. \quad (1)$$

Elevando ao cubo, obtemos

$$\begin{aligned}2x-1 + 3(\sqrt[3]{2x-1})^2 \cdot \sqrt[3]{x-1} + 3\sqrt[3]{2x-1} \cdot (\sqrt[3]{x-1})^2 + \\ + x-1 = 1\end{aligned} \quad (2)$$

$$3x-2 + 3\sqrt[3]{2x-1} \cdot \sqrt[3]{x-1} (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 1 \quad (3)$$

o termo entre parênteses vale 1 (é a própria equação (1)!)

$$3x-2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 \quad (4)$$

$$3x + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3 \quad (5)$$

$$\sqrt[3]{2x^2-3x+1} = 1-x \quad (6)$$

$$2x^2-3x+1 = (1-x)^3 \quad (7)$$

$$2x^2-3x+1 = 1-3x+3x^2-x^3 \quad (8)$$

$$x^3 - x^2 = 0. \quad (9)$$

E, portanto, $x = 0$ ou $x = 1$ ■

Verifica-se, por substituição em (1), que 1 é solução, mas 0 não é.

Onde e por que apareceu esta falsa raiz?

Sugiro que o leitor tente responder a esta pergunta antes de prosseguir.

Observe que $x = 0$ não é solução das equações (1), (2) e (3), mas é solução das equações a partir de (4). Na verdade, (1), (2) e (3) são equivalentes entre si (possuem o mesmo conjunto solução), e as equações de (4) a (9) também são equivalentes entre si, mas (3) e (4) não são equivalentes. Foi nesta passagem que fizemos algo "ilícito".

O que fizemos para passar de (3) a (4)? Ora, usamos novamente a equação (1) substituindo $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}$ por 1, e este procedimento não gera uma equação equivalente à anterior. Tendo duas equações equivalentes, (1) e (3), se substituirmos uma na outra, obtemos uma nova equação que é consequência das anteriores, mas não é, necessariamente, equivalente a elas. Assim $(3) \Rightarrow (4)$, mas não vale a recíproca.

Vejam os exemplos onde este fato é mais evidente:

$$x = 2 \quad (\text{o conjunto solução é } \{2\}),$$

$$2 = x \quad (\text{equivalente a de cima}).$$

Substituindo uma na outra, obtemos

$$x = x, \quad \text{cujo conjunto solução é } \mathbb{R}!$$

Assim, o aparecimento de uma raiz falsa não está ligado ao fato de a equação ser irracional nem às potências que tomamos, e sim, ao procedimento da resolução.

Uma palavra sobre a abordagem deste tema em sala de aula: o "truque" utilizado na passagem de (3) para (4) é útil, pois "limpou" a equação, mas não é uma equivalência – não podemos perder de

vista a equação original. Situações como esta são comuns, por exemplo, na trigonometria quando usamos, numa equação, a identidade $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Vamos ilustrar o aparecimento de falsas raízes através de mais dois exemplos:

$$x = 1 - x \quad (\text{e, portanto, } x = 1/2).$$

Se elevarmos ambos os membros ao cubo, teremos:

$$x = 1 - x \iff x^3 = (1 - x)^3 \iff x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \Rightarrow$$

(substituindo x por $1 - x$)

$$x^3 = 1 - 3(1 - x) + 3x^2 - x^3 \iff 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \iff$$

$$x = 1/2; \quad x = -1; \quad x = 2.$$

Outro exemplo:

$$x = 1.$$

$$x = 1 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

(substituindo x por 1)

$$x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Claudio Possani é professor do IME-USP, onde fez a graduação, o Mestrado e o Doutorado. Gosta de resolver problemas de Matemática, sejam os de sua área de pesquisa (Geometria) ou problemas elementares. Acredita que a Matemática é "lúdica e gostosa". Sua preocupação com o ensino de Matemática o levou a desenvolver um trabalho junto a alunos do 2º grau no Colégio Leonardo da Vinci em Jundiaí, SP. Suas atividades de lazer incluem: ficção científica e literatura policial, histórias em quadrinhos, rock (dos antigos!), cooper ...
